

УДК 629.114.2:517.93

Ки-Йонг Чой, И. С. Сазонов, В. А. Ким

УРАВНЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ КАЧЕНИЯ И МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

UDC 629.114.2:517.93

Ki-Young Choi, I. S. Sazonov, V. A. Kim

EQUATIONS OF KINEMATIC CONSTRAINTS OF ROLLING AND METHODS OF DETERMINING THEIR COEFFICIENTS EXPERIMENTALLY

Аннотация

В работе получены новые дифференциальные уравнения кинематических связей качения упругого пневматика второго порядка, не требующие дифференцирования при их совместном решении с динамическими уравнениями движения колесных машин, что позволяет решать прямые и обратные задачи динамики колесных машин. Разработана методика экспериментального определения коэффициентов, входящих в новые уравнения кинематических связей качения упругого пневматика по недеформируемой опорной поверхности.

Ключевые слова:

упругий пневматик, кинематические связи, неголономные связи, дифференциальные уравнения, задачи динамики, опорная поверхность, динамика, колесные машины.

Abstract

The paper presents the new second order differential equations of kinematic constraints of rolling of a resilient pneumatic element, requiring no differentiation if solved together with dynamic equations of motion of wheeled vehicles, which allows solving direct and inverse problems of dynamics of wheeled vehicles. The technique has been developed to determine experimentally the coefficients in the new equations of kinematic constraints of rolling of a resilient pneumatic element over the non-deformable bearing surface.

Key words:

resilient pneumatic element, kinematic constraints, nonholonomic constraints, differential equations, problems of dynamics, bearing surface, dynamics, wheeled machines.

Рассмотрим сущность гипотезы качения колеса по недеформируемой опорной поверхности. Пусть K_{O_1} – кривизна линии качения деформированного пневматика в центре пятна контакта O_1 ; K_{C_0} – кривизна проекции линии движения центра деформированного пневматика на опорную плоскость в соответствующей центру пятна контакта точке; K'_{O_1} – кривизна линии качения недеформированного пневматика; K'_{C_0} – кривизна проекции

линии движения центра недеформированного пневматика на опорную плоскость (рис. 1).

Для устранения недостатков, имеющих в теории качения колеса по недеформируемой опорной поверхности, предлагается рассмотреть качение колеса по произвольной криволинейной траектории, дополняющей известную теорию М. В. Келдыша. Предлагаемая теория опирается на несколько гипотез [1]. В общем случае будем считать, что угол наклона колеса χ^* к вертикальной

плоскости не равен параметру угловой деформации вокруг продольной оси, а определяется по соотношению

$$\chi^* = \chi' + \chi, \quad (1)$$

где χ' – угол наклона плоскости колеса к вертикали в случае отсутствия угловой деформации вокруг продольной оси; χ – параметр угловой деформации вокруг продольной оси колеса.

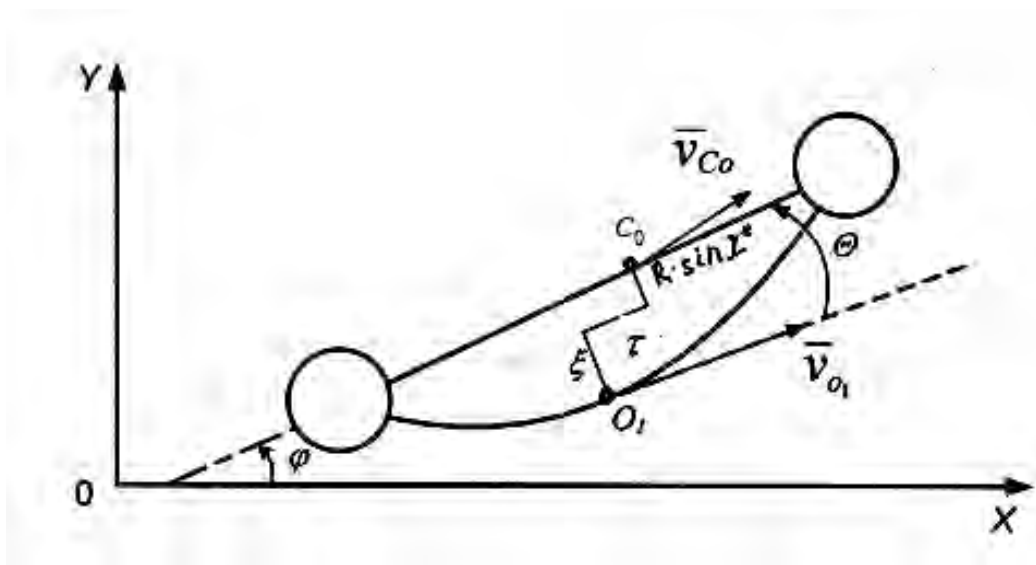


Рис. 1. Проекция пневматика на опорную плоскость

В частном случае качения пневматика можно считать, что параметр угловой деформации пневматика вокруг продольной оси совпадает с углом наклона колеса, тогда равенство (1) упрощается:

$$\chi^* = \chi. \quad (2)$$

Сформулируем новые гипотезы для общего случая качения колеса.

1. Касательная к линии качения и касательная к проекции центральной окружности деформированного пневматика в центре пятна контакта совпадают, т. е. касательная к линии качения образует с проекцией горизонтального диаметра на опорную плоскость угол, равный параметру угловой деформации вокруг нормали к опорной поверхности (первая гипотеза Келдыша).

2. Разность изохронных вариаций кривизны, линии качения пятна контакта пневматика и геометрического центра обода колеса при внезапной деформации пневматика однозначно оп-

ределяется значениями параметров деформации.

Рассмотрим гипотезы 1 и 2.

Изохронные вариации можно представить в виде разностей:

$$\delta \cdot K'_{O_1} = K_{O_1} - K'_{O_1}; \quad (3)$$

$$\delta \cdot K'_{C_0} = K_{C_0} - K'_{C_0}. \quad (4)$$

Из геометрического соотношения (см. рис. 1) следует, что

$$K'_{O_1} = K'_{C_0} + R_c \sin \chi', \quad (5)$$

где R_c – радиус недеформированного пневматика.

Таким образом, согласно гипотезам 1 и 2, а также равенствам (3) и (4) получаем

$$\begin{aligned} \delta \cdot K'_{O_1} &= K_{O_1} - K'_{C_0} - R \sin \chi' = \\ &= f_1(\xi, \theta, \chi, \tau, \delta); \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \delta \cdot K'_{C_0} &= K_{C_0} - K'_{C_0} = \\ &= f_2(\xi, \theta, \chi, \tau, \delta), \end{aligned} \quad (7)$$

где ξ, τ, δ – параметры боковой, касательной и нормальной деформаций соответственно; θ – параметр угловой деформации вокруг нормали; χ – параметр угловой деформации вокруг продольной оси.

Из рис. 1 следует, что

$$\chi' = \chi^* - \chi, \quad (8)$$

где χ^* – полный угол наклона деформированного пневматика относительно продольной плоскости; χ' – угол наклона недеформированного пневматика.

Поскольку диск колеса недеформируемый, а шина деформируемая, то гипотезы 1 и 2 можно объединить в одну. Действительно, из равенств (3)...(5) с учетом (8) имеем

$$\begin{aligned} \delta \cdot K'_{O_1} - \delta \cdot K'_{C_0} &= \delta(K'_{O_1} - K'_{C_0}) = \\ &= K_{O_1} - K'_{C_0} - R \sin(\chi^* - \chi) - \\ - K_{C_0} + K'_{C_0} &= K_{O_1} - K_{C_0} - R \sin(\chi^* - \chi) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \delta \cdot K'_{O_1} - \delta \cdot K'_{C_0} &= \\ &= K_{O_1} - K_{C_0} - R \sin(\chi^* - \chi). \end{aligned} \quad (9)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \delta \cdot K'_{O_1} - \delta \cdot K'_{C_0} &= f_1(\xi, \theta, \chi, \tau, \delta) - \\ - f_2(\xi, \theta, \chi, \tau, \delta) &= f(\xi, \theta, \chi, \tau, \delta). \end{aligned} \quad (10)$$

На основании (9) и (10) получим

$$\begin{aligned} K_{O_1} - K_{C_0} - R \sin(\chi^* - \chi) &= \\ &= f(\xi, \theta, \chi, \tau, \delta) \end{aligned} \quad (11)$$

или

$$\begin{aligned} K_{O_1} - K_{C_0} &= \\ &= R \sin(\chi^* - \chi) + f(\xi, \theta, \chi, \tau, \delta). \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнение (12) соответствует гипотезам 1 и 2. Разность между кривизной линии качения центра пятна контакта колеса и кривизной траектории геометрического центра колеса однозначно определяется параметрами деформаций шины и углом его наклона колеса к плоскости. В формуле (12) R – динамический радиус колеса. В случае, когда угол наклона колеса совпадает с параметрами угловой деформации вокруг продольной оси $\chi^* = \chi = \chi'$, уравнение (12) имеет вид:

$$K_{O_1} - K_{C_0} = f(\xi, \theta, \chi, \tau, \delta) + R \sin \chi. \quad (13)$$

В таком виде уравнение используется далее. В случае недеформируемого колеса будем полагать, что

$$\xi = \theta = \chi = \tau = \delta = 0$$

и

$$f(\xi, \theta, \chi, \tau, \delta) = 0.$$

Тогда уравнение (13) примет вид:

$$K_{O_1} - K_{C_0} = R \sin \chi', \quad (14)$$

где χ' – угол наклона плоскости колеса к продольной плоскости.

Функция $f(\xi, \theta, \chi, \tau, \delta)$ обладает свойством непрерывности при условии отсутствия скольжения и отрыва колеса от опорной плоскости. В случае существования отрыва колеса от опорной плоскости и наличия скольжения возникают разрывы конечного рода. Разложив функцию $f(\xi, \theta, \chi, \tau, \delta)$ в ряд Тейлора в нулевой точке и ограничиваясь линейными членами, уравнение (14) приближенно можно представить в виде

$$\begin{aligned} K_{O_1} - K_{C_0} &= R \sin \chi^* + A\xi + \\ &+ B\theta + C\chi + D\tau + E\delta \end{aligned} \quad (15)$$

или, полагая, что $\sin \chi^* = \chi, R = R(\delta)$,

$$\begin{aligned} K_{O_1} - K_{C_0} &= A\xi + B\theta + \\ &+ C\chi + D\tau + E\delta, \end{aligned} \quad (16)$$

где A, B, C, D, E – коэффициенты кривизны, переменные в общем случае (их следует определять экспериментально).

Предлагаемая гипотеза позволяет получить уравнение кинематической связи относительно первых и вторых производных от обобщенных скоростей и координат в виде

$$K = \frac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \dot{y} \cdot \ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}, \quad (17)$$

где $\dot{x}, \ddot{x}, \dot{y}, \ddot{y}$ – текущие производные обобщенных координат.

Для составления уравнения кинематической связи с помощью гипотез 1 и 2 необходимо установить связь между координатами центра пятна контакта x_{O_1}, y_{O_1} и координатами проекции центра колеса на опорную плоскость x_{C_0}, y_{C_0} . Для этого рассмотрим проекцию пневматика на опорную плоскость ОХУ (см. рис. 1), где φ – курсовой угол, \bar{v}_{C_0} – проекция скорости центра на опорную плоскость, v_{O_1} – скорость перемещения центра пятна контакта.

Согласно рис. 1 можно получить следующие уравнения:

$$\begin{cases} x_{O_1} = x_{C_0} + R \sin \chi^* \cdot \sin \varphi - \\ - \tau \cos(\varphi - \theta) + \xi \sin(\varphi - \theta); \\ y_{O_1} = y_{C_0} + R \sin \chi^* \cdot \cos \varphi - \\ - \tau \sin(\varphi - \theta) - \xi \cos(\varphi - \theta), \end{cases} \quad (18)$$

где x_{O_1}, y_{O_1} – координаты центра пятна контакта; x_{C_0}, y_{C_0} – координаты центра колеса; R – динамический радиус центра колеса.

Динамический радиус центра колеса и его свободный радиус связаны формулой

$$R = R_C - \delta / \cos \chi^*, \quad (19)$$

где R_C – свободный радиус колеса; δ – нормальная деформация пневматика.

Таким образом, система (18) с уче-

том (19) примет вид:

$$\begin{cases} x = x_{C_0} + \left(R_C - \frac{\delta}{\cos \chi^*} \right) \sin \chi^* \times \\ \times \sin \varphi - \tau \cos(\varphi - \theta) + \xi \sin(\varphi - \theta); \\ y_{O_1} = y_{C_0} - \left(R_C - \frac{\delta}{\cos \chi^*} \right) \sin \chi^* \times \\ \times \cos \varphi - \tau \sin(\varphi - \theta) - \xi \cos(\varphi - \theta). \end{cases} \quad (20)$$

Продифференцировав систему уравнений (20) по времени дважды, определим зависимость между скоростями и ускорениями точек O_1 и C_0 .

Полученные выражения с учетом равенства (17) подставляются в уравнение (15). При этом получается линейное уравнение кинематической связи относительно производных второго порядка:

$$\begin{aligned} & a_1 \ddot{x}_{C_0} + a_2 \ddot{y}_{C_0} + a_3 \ddot{\varphi} + a_4 \ddot{\xi} + \\ & + a_5 \ddot{\Theta} + a_6 \ddot{\tau} + a_8 \ddot{\delta} = b_1 \dot{\xi} + \\ & + b_2 \dot{\Theta} + b_3 \dot{\chi} + b_4 \dot{\tau} + b_5 \dot{\delta} + b_6 \dot{\chi}^*, \end{aligned} \quad (21)$$

где $a_1 \dots a_8, b_1 \dots b_6$ – коэффициенты, в которые входят координаты, курсовой угол, параметры деформации и их первые производные по времени.

В случае, когда угол наклона колеса к плоскости качения равен нулю, уравнение (21) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} & a_1 \ddot{x}_{C_0} + a_2 \ddot{y}_{C_0} + a_3 \ddot{\varphi} + a_4 \ddot{\xi} + a_5 \ddot{\Theta} + \\ & + a_6 \ddot{\tau} + a_8 \ddot{\delta} = b_1 \dot{\xi} + b_2 \dot{\Theta} + b_3 \dot{\chi} + \\ & + b_4 \dot{\tau} + b_5 \dot{\delta}. \end{aligned} \quad (22)$$

Следует отметить, что уравнения (21) и (22) считаются уравнениями кинематической связи второго порядка и являются новыми. В литературе подобные уравнения не встречаются применительно к процессу эластичного колеса, поэтому уравнение будем называть новым уравнением кинематической связи [1].

Обычно при теоретических исследованиях параметры деформаций χ , τ , δ рассматривают как обобщенные координаты и энергию их скоростей учитывают, а энергией скоростей деформации $\dot{\xi}$ и $\dot{\theta}$ пренебрегают – для определения этих параметров служат уравнения кинематических связей.

Рассмотрим методику экспериментального определения коэффициентов кинематических связей, входящих в уравнение (22).

Пусть колесо, имеющее пневматическую шину, шарнирно закреплено к кривошипу (рис. 2).

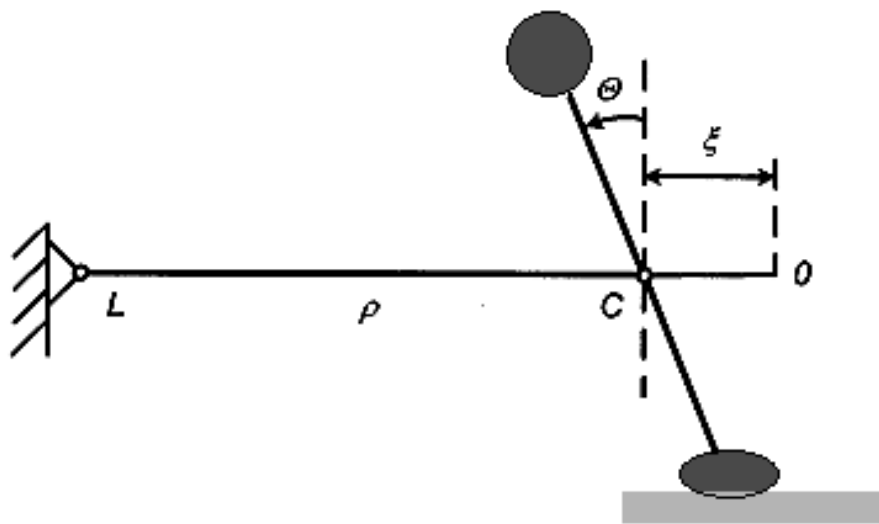


Рис. 2. Схема стенда для определения коэффициентов кинематических связей качения колеса

Для определений коэффициентов кинематических связей качения колеса проведены следующие серии экспериментов.

1. Колесо устанавливалось так, что его плоскость была перпендикулярна кривошипу LC и опорной плоскости, при этом $\theta = 0$; $\chi = 0$. Кривошип вращался с постоянной угловой скоростью ω при постоянной нормальной нагрузке на колесо и постоянным давлением в шине.

Тогда

$$K_C = \frac{1}{\rho}; \quad K_O = \frac{1}{\rho + \xi}.$$

Согласно гипотезе

$$K_C - K_O = A\xi$$

или

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho + \xi} = A\xi.$$

Откуда

$$A = \frac{1}{\rho(\rho + \xi)}. \quad (23)$$

В формуле (23) боковая деформация ξ определялась путем измерения.

2. Колесо устанавливалось в вертикальной плоскости под углом $\frac{\pi}{2} - \theta$ к кривошипу (см. рис. 2), определялся угол θ (он являлся параметром угловой деформации вокруг вертикальной оси), следовательно, $\xi = 0$, $\theta = 0$, $\chi = 0$. Кривошип вращался с постоянной угловой скоростью ω .

Тогда, согласно гипотезе,

$$K_C - K_O = A\xi + B\theta.$$

Кроме того,

$$K_C = \frac{1}{\rho}; \quad K_O \approx \frac{1}{\rho + \xi}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho + \xi} = A\xi + B\theta.$$

Откуда

$$B = \frac{\xi}{\theta} \left(\frac{1}{\rho(\rho + \xi)} - A \right). \quad (24)$$

Следует заметить, что в формулах (23) и (24) параметры деформации ξ имеют одинаковые значения.

3. Колесо устанавливалось под углом $\frac{\pi}{2} - \chi$ к опорной плоскости (рис. 3), следовательно, $\xi \neq 0$, $\theta \neq 0$, $\chi \neq 0$. Причем угол χ являлся параметром угловой деформации вокруг продольной оси. Кривошип вращался с постоянной угловой скоростью ω .

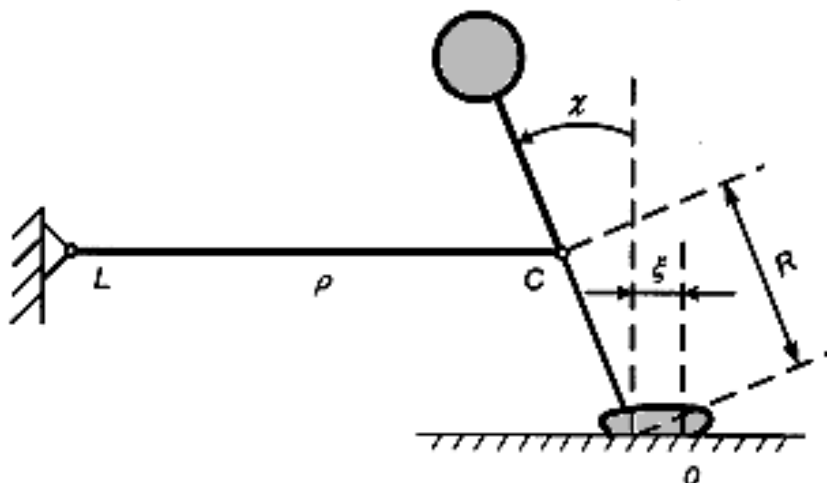


Рис. 3. Кинематическая схема стенда для определения коэффициентов уравнений кинематических связей качения колеса

Согласно предлагаемой гипотезе

$$K_C - K_O = A\xi + B\theta + C\chi.$$

Кроме того,

$$K_C = \frac{1}{\rho}; \quad K_O = \frac{1}{\rho + \xi + R \sin \chi},$$

где R – динамический радиус колеса.

Таким образом,

$$C = \frac{1}{\chi} \left(\frac{\xi + R \sin \chi}{\rho(\rho + \xi + R \sin \chi)} - A\xi \right). \quad (25)$$

В рассмотренной методике измеряемым параметром является параметр ξ , все остальные величины назначаются.

Кинематические коэффициенты A и B можно определить и другим методом, используя коэффициенты кривизны Келдыша.

1. *Определение коэффициента A .* Пусть $\theta = 0$, $\chi = 0$, тогда $K_O = a_1\xi$, где $K_O = 1/\rho$ и $a_1 = 1/\rho\xi$, отсюда $\xi = 1/\rho a_1$.

По предлагаемой гипотезе

$$K_C - K_O = A\xi,$$

отсюда

$$A = \frac{1}{\xi}(K_C - K_O).$$

Кроме того,

$$K_C = \frac{1}{\rho}; \quad K_O = \frac{1}{\rho + \xi}.$$

Следовательно,

$$A = \frac{1}{\xi} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho + \xi} \right) = \frac{1}{\rho(\rho + \xi)},$$

но по теории Келдыша

$$\xi = \frac{1}{\rho \cdot a_1},$$

тогда

$$A = \frac{1}{\rho \left(\rho + \frac{1}{\rho \cdot a_1} \right)} = \frac{a_1}{\rho^2 a_1 + 1}.$$

Таким образом,

$$A = \frac{a_1}{\rho^2 a_1 + 1}. \quad (26)$$

2. Определение коэффициента В.

Пусть $\xi \neq 0$, $\theta \neq 0$, $\chi \neq 0$. Согласно гипотезе Келдыша

$$K_O = a_1 \xi - a_2 \theta,$$

при этом $K_O = 1/\rho$.

Следовательно,

$$\frac{1}{\rho} = a_1 \xi - a_2 \theta$$

или

$$a_2 = -\frac{1}{\theta} \left(\frac{1}{\rho} - a_1 \xi \right). \quad (27)$$

С другой стороны,

$$a_2 = \psi_{ш} 2\sqrt{a_2}; \quad (28)$$

$$-\frac{\xi}{\theta} = \frac{K_6}{C_\xi}, \quad (29)$$

где K_6 – коэффициент сопротивления уводу; C_ξ – боковая жесткость шины; $\psi_{ш}$ – коэффициент относительного затухания переходного процесса в шине, зависящий только от конструкции шины, $\psi_{ш} = 0,917 \dots 1,28$ [1–3].

Из (29) имеем

$$\xi = -\theta \frac{K_6}{C_\xi}. \quad (30)$$

Из (30) имеем

$$\theta = -\frac{1}{a_2} \left(\frac{1}{\rho} - a_1 \xi \right).$$

Подставляя в эту формулу выражение для ξ , получим

$$\theta = -\frac{1}{a_2} \left(\frac{1}{\rho} - a_1 \theta \cdot \frac{K_6}{C_\xi} \right).$$

Отсюда

$$\theta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{a_1 \frac{K_6}{C_\xi} + a_2} \right). \quad (31)$$

По предлагаемой гипотезе

$$K_C - K_O = A\xi + B\theta,$$

где $K_C = \frac{1}{\rho}$; $K_O = \frac{1}{\rho + \xi}$.

Отсюда

$$B = \frac{\xi}{\theta} \left(\frac{1}{\rho(\rho + \xi)} - A \right). \quad (32)$$

Это равенство с учетом (28)...(30) перепишем в следующем виде:

$$B = -\frac{K_{\delta}}{C_{\xi}} \left\{ \frac{1}{\rho \left(\rho + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{a_1 \frac{K_{\delta}}{C_{\xi}} + 2\psi_{ш} \sqrt{a_1}} - A \right)} - A \right\} = \frac{K_{\delta}}{C_{\xi}} \left\{ A - \frac{1}{\rho^2 + \frac{1}{a_1 \frac{K_{\delta}}{C_{\xi}} + 2\psi_{ш} \sqrt{a_1}}} \right\} \quad (33)$$

или, окончательно,

$$B = -\frac{K_{\delta}}{C_{\xi}} \left\{ \frac{a_1}{a_1 \rho^2 + 1} - A - \frac{1}{\rho^2 + \frac{1}{a_1 \frac{K_{\delta}}{C_{\xi}} + 2\psi_{ш} \sqrt{a_1}}} \right\} \quad (34)$$

Результаты расчета коэффициентов A и B при различных радиальных нагрузках приведены в табл. 1.

Табл. 1. Результаты определения коэффициентов уравнений кинематических связей колеса с плоскостью его качения

Тип шины	C_{ξ} , Н/м	K_{δ} , Н/рад	$\psi_{ш}$	A_1 , м ⁻²	a_2 , м ⁻¹	A , м ⁻²	B , м ⁻¹	ρ , м
14,00–22e HD	<u>594860</u>	<u>224420</u>	<u>0,917</u>	<u>23,8</u>	<u>8,9</u>	<u>0,960</u>	<u>0,00563</u>	1
	594860	177380	0,918	37,9	11,4	0,980	0,00743	
9,00–20e HD	<u>387100</u>	<u>168560</u>	<u>1,150</u>	<u>28,2</u>	<u>12,5</u>	<u>0,965</u>	<u>0,00217</u>	1
	387100	146020	1,180	39,1	14,8	0,975	0,00378	
9,00–20e HDx	<u>279300</u>	<u>199920</u>	<u>1,150</u>	<u>10,3</u>	<u>7,4</u>	<u>0,980</u>	<u>0,03230</u>	1
	279300	159740	1,280	20,0	11,5	0,950	-0,00134	

На рис. 4 представлено изменение коэффициента A в зависимости от радиальной нагрузки N и давления воздуха P в шине.

Выводы

1. Сформулирована новая гипотеза качения упругого пневматика по недеформируемой опорной поверхности, позволяющая получить уравнения кинематических связей качения пневмати-

ка в виде дифференциальных уравнений второго порядка.

2. Гипотеза позволяет установить функциональную связь между вертикальной, боковой и угловой деформациями пневматической шины с жестким ободом, оказывающую влияние на угол увода колеса.

3. Дифференциальные уравнения

кинематических связей качения колес второго порядка позволяют совместное решение с динамическими уравнениями движения колесной машины без дифференцирования, тем самым исключая потерю начальных условий при решении прямой и обратной задач динамики движения автомобиля.

4. Разработана методика определения коэффициентов уравнений кинематических связей колеса, основанная на использовании метода изохронной вариации кривизны линии качения центра пятна контакта пневматика с опорной поверхностью.

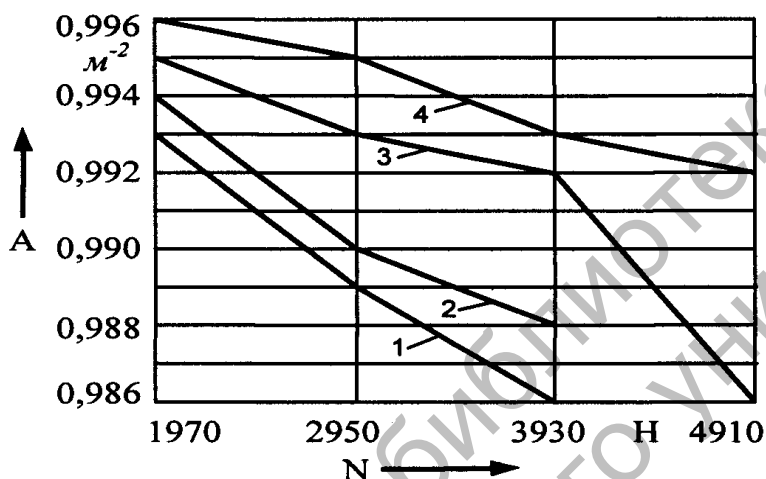


Рис. 4. Изменение коэффициента A в зависимости от радиальной нагрузки N и давления воздуха в шине P : 1 – при $N = 44300$ Н; 2 – при $N = 24500$ Н; 3 – при $N = 24500$ Н; 4 – при $N = 14600$ Н

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Неймарк, Ю. И.** Динамика неголономных систем / Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев. – М.: Наука, 1967. – 519 с.: ил.
2. **Ким, В. А.** Методология создания систем активной безопасности автотранспортных средств на основе анализа сил / В. А. Ким. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2003. – 347 с.: ил.
3. **Сазонов, И. С.** Динамическое регулирование режимов движения полноприводных колесных машин / И. С. Сазонов. – Минск: БГПА, 2001. – 185 с.: ил.

Статья сдана в редакцию 9 сентября 2014 года

Ки-Йонг Чой, начальник отдела, Могилевский филиал физико-технического института НАН Беларуси.
Игорь Сергеевич Сазонов, д-р техн. наук, проф., Белорусско-Российский университет.
 Тел.: 8-0222-26-61-00.
Валерий Андреевич Ким, д-р техн. наук, проф., Белорусско-Российский университет.
 Тел.: 8-0222-26-33-71.

Ki-Young Choi, Head of the Department, Mogilev branch of the Institute of Physics and Technology of the NAN of Belarus.

Igor Sergeevich Sazonov, DSc (Engineering), Prof., Belarusian-Russian University. Phone: 8-0222-26-61-00.
Valery Andreyevich Kim, DSc (Engineering), Prof., Belarusian-Russian University. Phone: 8-0222-26-33-71.