

УДК 517:004
ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДА АНАЛИЗА СИНГУЛЯРНОГО СПЕКТРА
С РЕАЛИЗАЦИЕЙ НА БАЗЕ ПАКЕТА SCILAB

Г. Ю. ЮРЧЕНКО

Научные руководители А. И. ЯКИМОВ, канд. техн. наук, доц.;

Е. А. ЯКИМОВ, канд. техн. наук

БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Основной задачей исследования является реализация базового метода сингулярного спектрального анализа (ССА) временных рядов в пакете Scilab. Такая реализация ССА позволит исследовать свойства самого метода анализа сингулярного спектра, а также проводить верификацию других программных реализаций ССА.

Этап вложения [1]. Для экспериментальных исследований исходный ряд $G = (g_0, g_1, \dots, g_{N-1})$ может быть задан по известным функциям либо определен результатами функционирования исследуемой системы. Формируется матрица A , которая по правилам построения является ганкелевой. Процедура вложения является преобразованием исходного одномерного ряда G в последовательность L -мерных векторов, число которых равно $K = N - L + 1$:

$$A_i = (g_{i-1}, \dots, g_{i+L-2})^T, \quad 1 \leq i \leq K. \quad (1)$$

Программный код этапа вложения в Scilab (X соответствует матрице A , y – исходному ряду G , L – ширина окна, K – число окон):

```
X = zeros(L, K)
for i = 1 : K
    X(:, i) = y(i : i + L - 1)
end.
```

Полученные вектора образуют траекторную матрицу $A = [A_1; \dots; A_K]$ ряда G , в которой $a_{ij} = g_{i+j-2}$, т. е. матрица A имеет одинаковые элементы на диагонали $i+j = \text{const}$.

Этап сингулярного разложения. Обозначим $S = A \cdot A^T \in R^{L \times L}$. Матрица $A \cdot A^T$ симметричная и неотрицательно определенная, а значит ее собственные числа $\{\lambda_k\}_{k=1}^L$ вещественны и неотрицательны.

Программный код получения матрицы S в Scilab:

```
S = X * X' / K.
```

Представленные в виде $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_L \geq 0$ собственные числа называют сингулярными значениями матрицы A . Пусть U_1, \dots, U_L – соответствующие им ортонормированные собственные вектора. Будем называть $p = \max\{k/\lambda_k > 0\}$ порядком сингулярного разложения. Обозначим

$$V_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} A^T U_k, \quad k = 1, \dots, p. \quad (2)$$

Тогда сингулярным разложением матрицы A называется ее представление в виде суммы элементарных матриц

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_p, \quad A_k = \sqrt{\lambda_k} U_k V_k^T. \quad (3)$$

Каждая из матриц A_k имеет ранг, равный единице. Поэтому их можно назвать элементарными матрицами. Вектор U_k называют k -м левым сингулярным вектором или просто k -м собственным вектором, вектор V_k – правым сингулярным вектором. Набор $\langle \sqrt{\lambda_k}, U_k, V_k \rangle$ будем называть k -ой собственной тройкой.

Объединенная матрица U с левыми и правыми сингулярными векторами определяется с использованием функции `svd()`:

$$[U, LAMBDA] = \text{svd}(C).$$

Собственные числа $\{\lambda_k\}_{k=1}^L$ матрицы A в пакете Scilab представлены вектором LAMBDA. Из полученной матрицы сингулярных значений извлекается вектор LAMBDA с использованием функции `diag()`.

Программный код в Scilab:

$$LAMBDA = \text{sqrt}(\text{diag}(LAMBDA)).$$

Этап группировки. Вид левых и правых сингулярных векторов, трактуемых в ССА как временные ряды, является очень важным для следующего шага метода – группировки. При этом для одномерного ССА левые и правые сингулярные вектора обладают определенной симметрией, так как в этих случаях сингулярные разложения траекторных матриц с длиной окна L и $K = N - L + 1$ эквивалентны.

Процедура группировки формально одинакова для всех разновидностей ССА. На основе разложения (3) процедура группировки делит все множество индексов $\{1, \dots, p\}$ на m непересекающихся подмножеств I_1, \dots, I_m .

Пусть $I = \{i_1, \dots, i_p\}$. Тогда результирующая матрица A_I , соответствующая группе I , определяется как $A_I = A_{i_1} + \dots + A_{i_p}$. Такие матрицы вычисляются для $I = I_1, \dots, I_m$, тем самым разложение (3) может быть записано в сгруппированном виде:

$$A = A_{I_1} + \dots + A_{I_m}.$$

Этап диагонального усреднения. На последнем шаге базового алгоритма каждая матрица сгруппированного разложения переводится в новый ряд длины N . Для произвольной матрицы X процедуру приведения ее к ганкелевому виду и последующему преобразованию в ряд (обозначим его как G^B) выразим следующим образом. Пусть X – матрица размера $L \times K$ с элементами x_{ij} , $1 \leq i \leq L$, $1 \leq j \leq K$. Положим $L^* = \min(L, K)$, $K^* = \max(L, K)$ и

$N=L+K-1$. Пусть $z_{ij}=x_{ij}$, если $L < K$ и $z_{ij}=x_{ji}$ в остальных случаях. Тогда диагональное усреднение переводит матрицу X в ряд $(g_0^B, \dots, g_{N-1}^B)$ по формуле

$$g_k^B = \begin{cases} \frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} z_{j, k-j+2} / 0 \leq k \leq L^* - 1; \\ \frac{1}{L^*} \sum_{j=1}^{L^*} z_{j, k-j+2} / L^* - 1 \leq k \leq K^*; \\ \frac{1}{N-k} \sum_{j=k-K^*+2}^{N-K^*+1} z_{j, k-j+2} / K^* \leq k \leq N. \end{cases}$$

Это выражение соответствует усреднению элементов матрицы вдоль побочных диагоналей $i+j=k+2$: выбор $k=0$ дает $g_0^B=x_{11}$, для $k=1$ получаем $g_1^B=(x_{12}+x_{21})/2$ и т. д. Применив диагональное усреднение к матрицам, полученным на этапе группировки, приходим к разложению исходного ряда в сумму m рядов.

Программный код в Scilab:

```
y = zeros(N, 1)
for i = 1 : K + L - 1
    v = adia(RC, i)
    y(i) = sum(v) / length(v)
end
y = real(y).
```

Полученная реализация метода анализа сингулярного спектра временных рядов в Scilab позволяет исследовать особенности восстановления трендовой, периодической и шумовой составляющей для извлечения дополнительной информации об исследуемом объекте. Проведена верификация программы BelSim2#.SSA в составе программно-технологического комплекса имитации сложных систем BelSim с помощью реализации в Scilab, в результате подтверждена корректность исследуемой программы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Golyandina, N.** Analysis of Time Series Structure: SSA and Related Techniques / N. Golyandina, V. Nekrutkin, A. Zhigljavsky. – Boca Raton : Chapman & Hall/CRC, 2001. – 310 p.