МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Автоматизированные системы управления»

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

Методические рекомендации к самостоятельной работе для студентов специальности 1-53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации» заочной формы обучения

Могилев 2022

УДК 519.6
ББК 22.176
С48

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Автоматизированные системы управления» «11» января 2022 г., протокол № 6

Составители: д-р техн. наук, доц. А. И. Якимов;
канд. техн. наук Е. А. Якимов

Рецензент канд. техн. наук, доц. С. К. Крутолевич

Изложены рекомендации по решению задач к контрольной работе, приведены примеры решения задач, а также учебно-методическая литература. Предназначены для выполнения самостоятельной работы студентами специальности 1-53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации» заочной формы обучения.

Учебно-методическое издание

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

Ответственный за выпуск А. И. Якимов

Корректор Т. А. Рыжикова

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 26 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Функции со случайными параметрами

1.1 Статистические характеристики случайных процессов

Случайные процессы – случайные функции независимой переменной – времени t. Случайной считается функция, значение которой для каждого значения аргумента является случайной величиной. По результатам n опытов случайный процесс $X(t)$ может отобразиться n различными функциями времени $x_i(t)$, где $i=1,...,n$, которые называются реализациями (возможными значениями) случайного процесса (рисунок 1). Должна изучаться не каждая реализация в отдельности, а свойства всего множества $X(t)$.

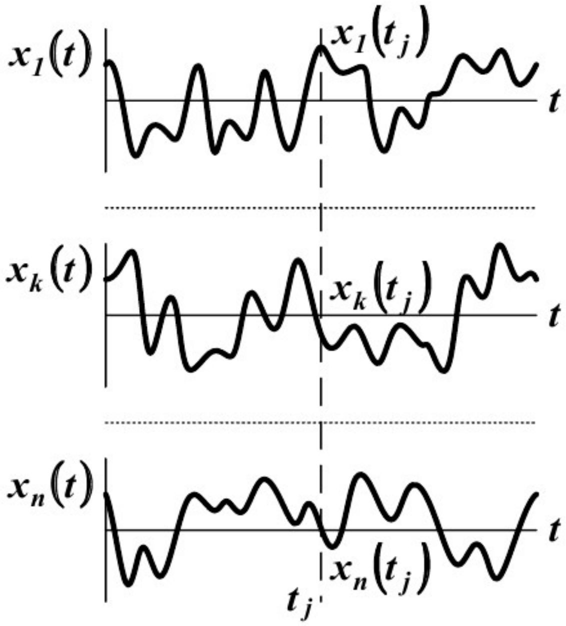

Рисунок 1 – Реализации случайного процесса

Для любого фиксированного момента времени $t=t_j$ реализация $x_i(t_j)$ является регулярной (неслучайной), а $X(t_j)$ – случайной функцией, полученной путем статистического усреднения свойств различных реализаций. Функция $X(t_j)$ называется сечением случайного процесса в момент времени t_j.

Пример 1 – Пусть $f_0(t),\ f_1(t),\ f_2(t),...$ – обычные неслучайные функции, а $u_1, u_2, ...$ – случайные величины (случайные параметры), тогда $X(t)=f_0(t)+u_1\ f_1(t)+u_2 f_2(t)+...$ – случайная функция, а при заданных $u_1, u_2, ...$ – некоторая реализация случайного процесса.

Математическое ожидание случайного процесса $X(t)$ – регулярная функция, значение которой в любой момент времени t_j равно математическому ожиданию соответствующего сечения $X(t_j)$:

$$\mathrm{M}_X(t) = \mathrm{M}[X(t)].$$

Можно определить центрированный случайный процесс

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - \mathrm{M}_X(t),$$

математическое ожидание которого

$$\mathrm{M}\left[\overset{\circ}{X}(t)\right] = \mathrm{M}\big[X(t) - \mathrm{M}_X(t)\big] = \mathrm{M}\big[X(t)\big] - \mathrm{M}_X(t) = 0.$$

Любой случайный процесс можно представить как совокупность регулярной составляющей (математического ожидания) и центрированной случайной составляющей:

$$X(t) = \mathrm{M}_X(t) + \overset{\circ}{X}(t).$$

Дисперсия случайного процесса $X(t)$ – регулярная функция, значение которой в любой момент времени t_j равно дисперсии соответствующего сечения $X(t_j)$:

$$\mathrm{D}_X(t) = \mathrm{M}\left[\overset{\circ}{X}{}^2(t)\right] = \mathrm{M}\big[X^2(t)\big] - \big(\mathrm{M}\big[X(t)\big]\big)^2.$$

Среднеквадратичное отклонение случайного процесса $X(t)$ находится как квадратный корень из его дисперсии:

$$\sigma_X(t) = \sqrt{\mathrm{D}_X(t)}.$$

Стационарным в узком смысле называют случайный процесс $X(t)$, статистические характеристики которого неизменны во времени.

Стационарным в широком смысле называют случайный процесс $X(t)$, математическое ожидание которого постоянно, а функции распределения и плотности вероятности любой размерности зависят только от величины сдвига всех точек t_j вдоль оси времени на одинаковую величину (т. е. зависят от начала отсчета времени).

Процессы, стационарные в узком смысле, обязательно стационарны и в широком смысле. Обратное утверждение верно не во всех случаях. Случайные процессы, не обладающие свойствами стационарности, считаются **нестационарными**.

Корреляционным моментом $R_{u_1 u_2}$ случайных величин u_1, u_2 называют математическое ожидание произведения отклонений этих величин:

$$R_{u_1u_2} = \mathrm{M}([u_1 - \mathrm{M}(u_1)][u_2 - \mathrm{M}(u_2)]).$$

Приняв во внимание, что отклонения есть центрированные случайные величины, можно дать корреляционному моменту определение как математическое ожидание произведения двух центрированных случайных величин.

Из определения корреляционного момента следует, что он имеет размерность, равную произведению размерностей величин u_1, u_2. Другими словами, величина корреляционного момента зависит от единиц измерения случайных величин. По этой причине для одних и тех же двух величин величина корреляционного момента имеет различные значения в зависимости от того, в каких единицах были измерены величины. Для того чтобы устранить этот недостаток, вводят числовую характеристику – коэффициент корреляции.

Коэффициентом корреляции $r_{u_1u_2}$ случайных величин u_1, u_2 называют отношение корреляционного момента к произведению среднеквадратичных отклонений этих величин:

$$r_{u_1u_2} = \frac{R_{u_1u_2}}{\sigma_{u_1}\sigma_{u_2}}.$$

Так как размерность $R_{u_1u_2}$ равна произведению размерностей величин u_1 и u_2, σ_{u_1} имеет размерность величины u_1, σ_{u_2} имеет размерность величины u_2, то $r_{u_1u_2}$ – безразмерная величина. Таким образом, величина коэффициента корреляции не зависит от выбора единиц измерения случайных величин. В этом состоит преимущество коэффициента корреляции перед корреляционным моментом.

Пример 2 – Задан случайный процесс $X(t)$ функцией со случайными параметрами u_1, u_2:

$$X(t) = 3 + u_1\, t + u_2 \frac{1}{t+1},\ t \ge 0.$$

Известны числовые характеристики случайных параметров: область допустимых значений случайных параметров $u_1 \in [-2; 2]$, $u_2 \in [0; 3]$; математическое ожидание случайных параметров $\mathrm{M}(u_1) = 1$ и $\mathrm{M}(u_2) = 1$; дисперсия случайных параметров $D(u_1) = 2{,}25$ и $D(u_2) = 1{,}0$; коэффициент корреляции случайных параметров $r_{u_1u_2} = 1/3$. Необходимо определить статистические характеристики для заданного процесса.

Решение

Область возможных траекторий при $(u_1, u_2) \in \{(-2, 0), (-2, 3), (2, 0), (2, 3)\}$:

$$X_{\min}(t) = 3 - 2\,t\,; \quad X_1(t) = 3 - 2\,t + \frac{3}{t+1}\,;$$

$$X_2(t) = 3 + 2\,t\,; \quad X_{\max}(t) = 3 + 2\,t + \frac{3}{t+1}\,;$$

$$3 - 2\,t \le X(t) \le 3 + 2\,t + \frac{3}{t+1}\,.$$

Математическое ожидание случайного процесса

$$\mathrm{M}_X(t) = 3 + \mathrm{M}(u_1)t + \frac{\mathrm{M}(u_2)}{t+1} = 3 + t + \frac{1}{t+1}\,.$$

Результаты расчета представлены на графике (рисунок 2).

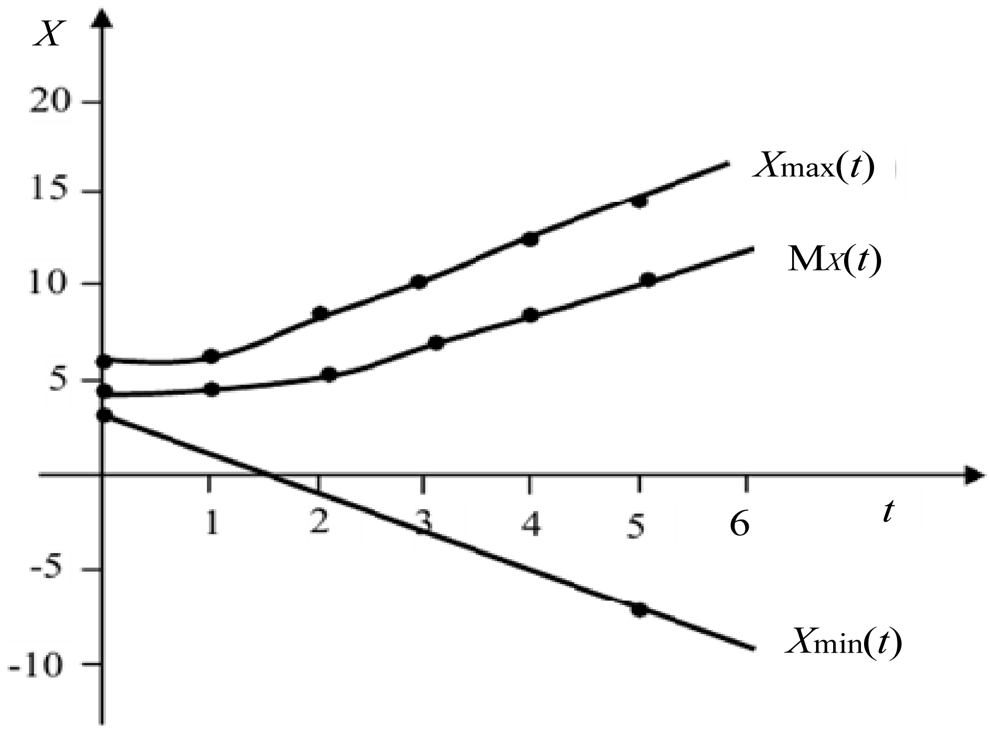

Рисунок 2 – Область возможных траекторий случайного процесса

Дисперсия случайного процесса

$$\mathrm{D}_X(t) = \mathrm{M}\left[\overset{\circ}{X}{}^2(t)\right] = \mathrm{M}\left[\left(3 + u_1\,t + u_2\,\frac{1}{t+1} - \mathrm{M}\left[3 + u_1\,t + u_2\,\frac{1}{t+1}\right]\right)^2\right].$$

Обозначим регулярные функции: $c(t)=3$; $g(t)=t$; $h(t)=\dfrac{1}{t+1}$.

$$\mathrm{D}_X(t)=\mathrm{M}\left[\left(3+u_1\,t+u_2\frac{1}{t+1}-\mathrm{M}\left[3+u_1\,t+u_2\frac{1}{t+1}\right]\right)^2\right]=$$

$$=\mathrm{M}\left[\left((u_1-\mathrm{M}(u_1))g(t)+(u_2-\mathrm{M}(u_2))h(t)\right)^2\right]=$$

$$=M\left[(\mathrm{u}_1-\mathrm{M}(\mathrm{u}_1))^2\mathrm{g}^2(\mathrm{t})+2(\mathrm{u}_1-\mathrm{M}(\mathrm{u}_1))((\mathrm{u}_2-\mathrm{M}(\mathrm{u}_2))\mathrm{g}(\mathrm{t})\mathrm{h}(\mathrm{t})+(\mathrm{u}_2-\mathrm{M}(\mathrm{u}_2))^2\mathrm{h}^2(\mathrm{t})\right]=$$

$$=\mathrm{M}[\mathrm{D}(u_1)g^2(t)+2R_{u_1u_2}g(t)h(t)+\mathrm{D}(u_2)h^2(t)].$$

Для определения корреляционного момента $R_{u_1u_2}$ случайных величин u_1, u_2 находим:

$$\sigma_{u_1}=\sqrt{\mathrm{D}(u_1)}=\sqrt{2{,}25}=1{,}5={}^3\!/_2,\quad \sigma_{u_2}=\sqrt{\mathrm{D}(u_2)}=1,$$

тогда

$$R_{u_1u_2}=r_{u_1u_2}\sigma_{u_1}\sigma_{u_2}=(1/3)(3/2)(1)=1/2.$$

Окончательно после подстановки $\mathrm{D}(u_1)=2{,}25$, $\mathrm{D}(u_2)=1{,}0$, $R_{u_1u_2}=1/2$, $g(t)=t$; $h(t)=\dfrac{1}{t+1}$:

$$\mathrm{D}_X(t)=\frac{9}{4}t^2+\frac{t^2+t+1}{(t+1)^2}.$$

1.2 Корреляционные характеристики случайных процессов

Статистические характеристики – математическое ожидание, среднеквадратичное отклонение, корреляционным момент, коэффициентом корреляции не отражают в полной мере характера случайного процесса. Например, процессы на рисунке 3 различны по своей структуре, хотя и имеют одинаковые значения математического ожидания и дисперсии; при нормальном распределении значение $\mathrm{M}_X(t)$ попадает в диапазон $\pm 3\cdot\sigma_X(t)$ с вероятностью 0,997. Процесс на рисунке 3, *а* протекает относительно плавно, и статистическая связь между его сечениями достаточно сильная. Процесс на рисунке 3, *б* характеризуется сильной изменчивостью, связь между его сечениями слабая. Однако ни по математическому ожиданию, ни по дисперсии определить это невозможно.

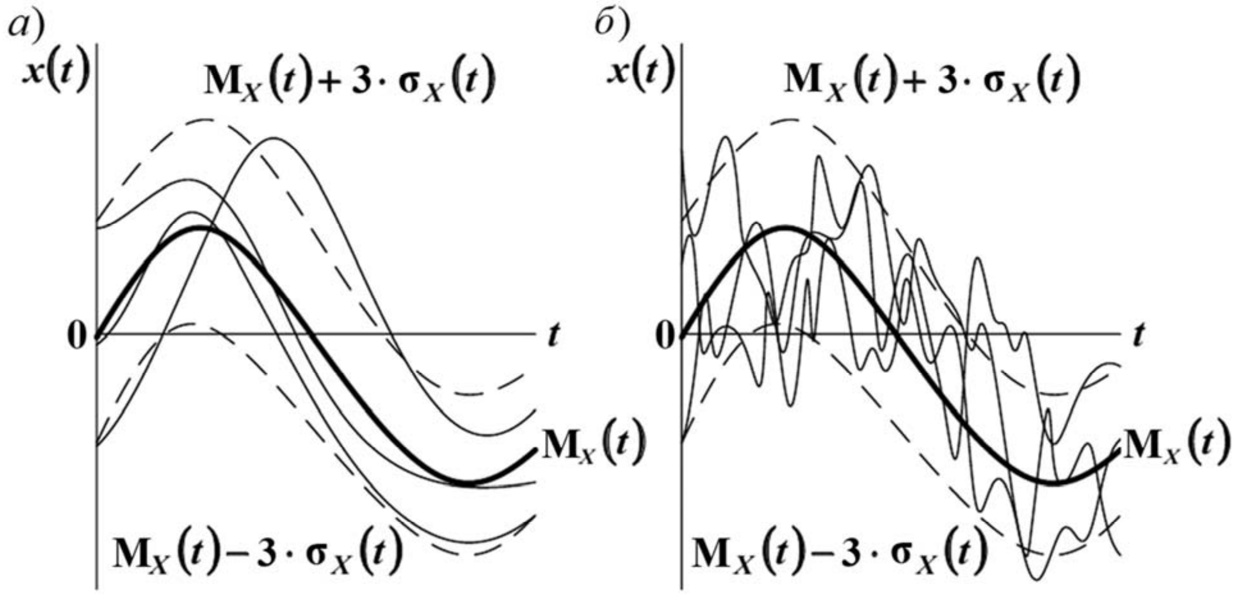

Рисунок 3 – Случайные процессы различной структуры

Чтобы учесть статистическую связь между различными сечениями случайного процесса, используют корреляционные функции.

Корреляционной функцией (корреляционным моментом) случайного процесса называют неслучайную функцию двух аргументов t_1 и t_2, которая для каждой пары произвольно выбранных моментов времени определяется как

$$R_X(t_1,t_2)=\mathrm{M}\left[\overset{o}{X}(t_1)\,\overset{o}{X}(t_2)\right]=\mathrm{M}\left[X(t_1)X(t_2)\right]-\mathrm{M}\left[X(t_1)\right]\cdot\mathrm{M}\left[X(t_2)\right].$$

Ковариационной функцией случайного процесса $X(t)$ называется функция двух переменных, такая, что

$$K_X(t_1,t_2)=\mathrm{M}\left[X(t_1)X(t_2)\right].$$

Отметим, что корреляционная и ковариационная функции связаны соотношением

$$K_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)+\mathrm{M}\left[X(t_1)\right]\cdot\mathrm{M}\left[X(t_2)\right].$$

Дисперсия процесса $X(t)$ связана с корреляционной функцией по формуле

$$\mathrm{D}_X(t)=R_X(t,t).$$

Чтобы описать систему из двух случайных функций, кроме указанных характеристик, используют также **взаимную корреляционную функцию** (корреляционный момент, ковариацию).

Пример 3 – Задан случайный процесс $X(t)$ функцией со случайными параметрами u_1, u_2:

$$X(t) = 3 + u_1\, t + u_2 \frac{1}{t+1},\ t \ge 0.$$

Известны числовые характеристики случайных параметров: математическое ожидание случайных параметров $\mathrm{M}(u_1) = 1$ и $\mathrm{M}(u_2) = 1$; дисперсия случайных параметров $\mathrm{D}(u_1) = 2{,}25$ и $\mathrm{D}(u_2) = 1{,}0$; корреляционный момент $R_{u_1u_2} = 1/2$. Необходимо определить корреляционные характеристики для заданного процесса $X(t)$.

Решение

Центрируем случайный процесс:

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - \mathrm{M}_X(t) = \left(u_1 - \mathrm{M}(u_1)\right)t + (u_2 - \mathrm{M}(u_2))\frac{1}{t+1}.$$

Найдем корреляционную функцию случайного процесса:

$$R_X(t_1,t_2) = \mathrm{M}\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\,\overset{\circ}{X}(t_2)\right] =$$

$$= \mathrm{M}\left[\left(\left(u_1 - \mathrm{M}(u_1)\right)t_1 + \frac{u_2 - \mathrm{M}(u_2)}{t_1+1}\right)\cdot\left(\left(u_1 - \mathrm{M}(u_1)\right)t_2 + \frac{u_2 - \mathrm{M}(u_2)}{t_2+1}\right)\right] =$$

$$= \mathrm{D}(u_1)t_1t_2 + R_{u_1u_2}\left(\frac{t_1}{t_2+1} + \frac{t_2}{t_1+1}\right) + \mathrm{D}(u_2)\frac{1}{t_1+1}\cdot\frac{1}{t_2+1} =$$

$$= \frac{9}{4}t_1t_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{t_1}{t_2+1} + \frac{t_2}{t_1+1}\right) + \frac{1}{t_1+1}\cdot\frac{1}{t_2+1}.$$

$$R_X(t_1,t_2) = \frac{9}{4}t_1t_2 + \frac{t_1^2 + t_1 + t_2^2 + t_2 + 2}{2(t_1+1)(t_2+1)}.$$

Найдем дисперсию и среднеквадратичное отклонение случайного процесса по известной корреляционной функции:

$$\mathrm{D}_X(t) = R_X(t,t) = \frac{9}{4}t^2 + \frac{t^2 + t + 1}{(t+1)^2},$$

$$\sigma_X(t) = \sqrt{\mathrm{D}_X(t)} = \sqrt{\frac{9}{4}t^2 + \frac{t^2+t+1}{(t+1)^2}}\,.$$

1.3 Задания для самостоятельной работы

Задана функция $X(t) = c(t) + u_1 g(t) + u_2 h(t)$ со случайными параметрами u_1, u_2, распределёнными соответственно на интервалах [a; b] и [c; d]. Основные характеристики случайных параметров представлены в таблице 1, где $\mathrm{M}(u_1)$ и $\mathrm{M}(u_2)$ – математическое ожидание случайных параметров u_1, u_2; $\mathrm{D}(u_1)$ и $\mathrm{D}(u_2)$ – дисперсия случайных параметров u_1, u_2; $R_{u_1u_2}$ – корреляционный момент параметров u_1, u_2. Функции, характеризующие случайный процесс, представлены в таблице 2. Функция $X(t)$ описывает некоторый случайный процесс. Необходимо определить основные характеристики для заданного процесса: область возможных траекторий, математическое ожидание случайного процесса, корреляционную функцию случайного процесса, дисперсию, среднеквадратичное отклонение случайного процесса. $\mathrm{M}(u_1)$

Таблица 1 – Основные характеристики случайных параметров

Вариант	$u_1 = [a;b]$	$u_2 = [c;d]$	$\mathrm{M}(u_1)$	$\mathrm{D}(u_1)$	$\mathrm{M}(u_2)$	$\mathrm{D}(u_2)$	$R_{u_1u_2}$
1	[–2;1]	[0;1]	–1,0	1,5	0,75	0,1	–0,2
2	[–1;1]	[–1;2]	–0,5	0,5	1,0	1,0	–0,5
3	[–1;1]	[–1;2]	–0,5	0,5	1,0	0,75	–0,4
4	[–3;0]	[0;1]	–1,0	1,0	0,5	0,2	0,4
5	[–1,0;0]	[–1;1]	–0,5	0,1	0,5	0,75	–0,2
6	[0;5]	[–2;0]	2,0	4,0	–1,0	1,0	–1,0
7	[0;1]	[–4;0]	0,5	0,2	–2,0	3,0	0,5
8	[–2;3]	[–1;3]	1,0	4,0	1,0	2,0	1,5
9	[–1;3]	[–2;2]	1,0	3,0	1,0	2,0	1,0
10	[–1;1]	[–3;1]	0,5	0,5	–1,0	2,5	–1,0
11	[–2;4]	[–1;1]	1,0	5,0	0,5	0,75	1,25
12	[–2;0]	[0;2]	–1,0	1,0	1,0	1,0	–0,75
13	[0;1]	[0;2]	0,5	0,2	1,0	1,0	–0,2
14	[–1;1]	[–2;3]	–0,5	0,5	1,0	5,0	–1,0
15	[–1;1]	[–2;1]	0,5	0,5	–1,0	1,0	–0,5
16	[–1;1]	[–1;1]	0,5	0,5	–0,5	0,5	–0,2
17	[–1;0]	[0;1]	–0,5	0,2	0,5	0,2	0,1
18	[0;1]	[0;1]	0,5	0,2	0,5	0,2	0,15
19	[–1;1]	[0;1]	0,5	0,5	0,5	0,2	0,2
20	[–1;1]	[0;2]	–0,5	0,5	1,0	0,5	–0,4
21	[–2;3]	[0;1]	1,0	3	0,5	0,2	0,5

Окончание таблицы 1

Вариант	$u_1=[a;b]$	$u_2=[c;d]$	$M(u_1)$	$D(u_1)$	$M(u_2)$	$D(u_2)$	$R_{u_1u_2}$
22	[–1;1]	[–1;0]	0,5	0,5	–0,5	0,2	0,2
23	[–1;1]	[–2;1]	0,5	0,5	–1,0	0,5	-0,25
24	[–1;1]	[–1;2]	–0,5	0,5	1,0	1,0	–0,5
25	[0;1]	[–1;0]	0,5	0,2	–0,5	0,1	0,1
26	[–1;1]	[–3;3]	0,5	0,5	–1,0	6,0	1,0
27	[0;1]	[0;2]	–0,5	0,2	1,0	1,0	–0,2
28	[–2;2]	[–2;2]	–1,0	2,0	1,0	3,0	1,5
29	[0;1]	[0;2]	0,5	0,2	1,0	1,0	–0,2
30	[–1;1]	[–2;1]	–0,5	0,5	–1,0	0,5	0,25

Таблица 2 – Функции, описывающие случайный процесс

Вариант	$c(t)$	$g(t)$	$h(t)$
1	2	t^2-2	t
2	3	$t-1$	t^2
3	4	3	$-\sqrt{t+2}$
4	5	$3-t^2$	2
5	3	4	$2t^2$
6	2	2^{t-1}	1
7	1	2	2^{t-1}
8	2	4	$6/(t+1)$
9	3	$4/(t+1)$	1
10	5	2	$\sqrt{t+1}$
11	2	$\sqrt{t+2}$	1
12	1	3	2^{-t}
13	3	2^{1-t}	5
14	1	1	2^{2-t}
15	5	3	$\sqrt{t}$
16	6	t^2	$t-1$
17	1	t^2	$2t$
18	3	4	$3/(t+1)$
19	2	t^2-1	$3-2t$
20	1	2	2^{3-t}
21	4	$\sqrt{t}$	-1
22	3	$2-t$	t^2+1
23	2	t	$-t^2$
24	0	3	-2^{-t}

25	1	$-t^2$	$2t-1$

Окончание таблицы 2

Вариант	$c(t)$	$g(t)$	$h(t)$
26	0	$-2/(t+1)$	3
27	1	-2^t	2
28	0	2	$-5/(t+1)$
29	1	3	$4-t^2$
30	0	$-t$	t^2+1

Контрольные вопросы

1 Доказать, что неслучайный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$\mathrm{M}[X(t)f(t)] = f(t)\mathrm{M}_X(t)).$$

2 Доказать, что математическое ожидание суммы двух случайных функций равно сумме математических ожиданий слагаемых.

3 Доказать, что при равных между собой значениях аргумента корреляционная функция случайной функции $X(t)$ равна ее дисперсии:

$$R_X(t,t) = \mathrm{D}_X(t).$$

4 Доказать, что от прибавления к случайной функции $X(t)$ регулярной функции $g(t)$ корреляционная функция не изменится:

$$Y(t) = (X(t) + g(t)) \Rightarrow R_Y(t_1,t_2) = R_X(t_1,t_2).$$

5 Доказать, что если случайная функция $Y(t) = X(t)g(t)$, где $g(t)$ – неслучайная функция, то

$$R_Y(t_1,t_2) = g(t_1)g(t_2)R_X(t_1,t_2).$$

6 Доказать, что если $X(t)$ – случайная функция, $g(t)$ – регулярная функция, то

$$Y(t) = (X(t) + g(t)) \Rightarrow \mathrm{D}_Y(t) = \mathrm{D}_X(t).$$

7 Доказать, что если $X(t)$ – случайная функция, $g(t)$ – регулярная функция, то

$$Y(t) = X(t)g(t) \Rightarrow \mathrm{D}_Y(t) = g^2(t)\mathrm{D}_X(t).$$

8 Доказать, что корреляционная функция произведения двух центрированных некоррелированных случайных функций равна произведению корреляционных функций сомножителей.

9 Доказать, что взаимная корреляционная функция случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ равна взаимной корреляционной функции центрированных функций $\overset{\circ}{X}(t)$ и $\overset{\circ}{Y}(t)$.

2 Процессы размножения и гибели

2.1 Основные характеристики процессов размножения и гибели

Некоторая система (физическая, биологическая, экономическая) может находиться в одном из состояний E_0, E_1, E_2 ... (индекс – количество элементов в системе). В случайные моменты времени система (рисунок 4) может совершать переход в соседнее состояние. Интенсивности переходов (среднее количество переходов в единицу времени):

λ_k – интенсивность переходов из состояния E_k в состояние E_{k+1} (интенсивность размножения),

ν_k – интенсивность переходов из состояния E_k в состояние E_{k-1} (интенсивность гибели).

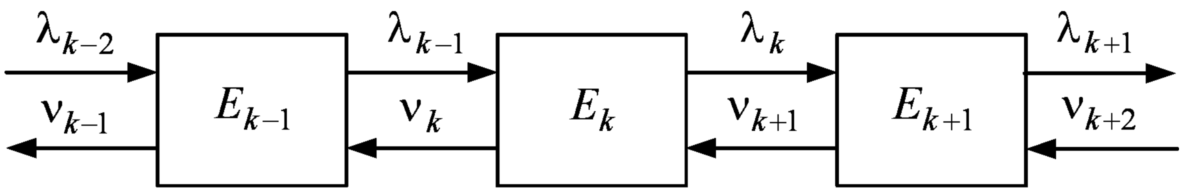

Рисунок 4 – Граф состояний системы с процессами размножения и гибели

Вероятности состояний $p_k(t)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} p_0'(t) = \nu_1 p_1(t) - \lambda_0 p_0(t); \\ p_1'(t) = \lambda_0 p_0(t) + \nu_2 p_2(t) - (\lambda_1 + \nu_1) p_1(t); \\ \qquad \dots \\ p_k'(t) = \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) + \nu_{k+1} p_{k+1}(t) - (\lambda_k + \nu_k) p_k(t); \\ \qquad \dots \end{cases} \tag{1}$$

В общем случае решение задачи Коши для $p_k(t)$ представляет серьезную математическую проблему. Для приближенного решения этой задачи можно применять различные методы, например с использованием рядов Маклорена.

Пример 1 – Система находится в состоянии E_k. Заданы интенсивности λ_m и ν_m . Оценить вероятности состояний системы через малый промежуток времени Δt. Малым промежутком времени полагать такой, при котором выполняется неравенство

$$\Delta t < \frac{1}{\max \lambda_k + \max \nu_k}.$$

Записываем разрешающую систему (1) в окрестности k:

$$\begin{cases} p'_{k-2}(t) = \nu_{k-1} p_{k-1}(t) + \lambda_{k-3} p_{k-3}(t) - (\lambda_{k-2} + \nu_{k-2}) p_{k-2}(t); \\ p'_{k-1}(t) = \nu_k p_k(t) + \lambda_{k-2} p_{k-2}(t) - (\lambda_{k-1} + \nu_{k-1}) p_{k-1}(t); \\ p'_k(t) = \nu_{k+1} p_{k+1}(t) + \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) - (\lambda_k + \nu_k) p_k(t); \\ p'_{k+1}(t) = \nu_{k+2} p_{k+2}(t) + \lambda_k p_k(t) - (\lambda_{k+1} + \nu_{k+1}) p_{k+1}(t); \\ p'_{k+2}(t) = \nu_{k+3} p_{k+3}(t) + \lambda_{k+1} p_{k+1}(t) - (\lambda_{k+2} + \nu_{k+2}) p_{k+2}(t). \end{cases}$$

Учитывая малость Δt, полагаем $p_m \equiv 0, \forall |m-k| > 2$, $\lambda_{k+2} = 0$, $\nu_{k-2} = 0$ (система не может за малый промежуток времени совершить более двух переходов). Бесконечная система дифференциальных уравнений примет усеченный конечный вид:

$$\begin{cases} p'_{k-2}(t) = \nu_{k-1} p_{k-1}(t) - \lambda_{k-2} p_{k-2}(t); \\ p'_{k-1}(t) = \nu_k p_k(t) + \lambda_{k-2} p_{k-2}(t) - (\lambda_{k-1} + \nu_{k-1}) p_{k-1}(t); \\ p'_k(t) = \nu_{k+1} p_{k+1}(t) + \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) - (\lambda_k + \nu_k) p_k(t); \\ p'_{k+1}(t) = \nu_{k+2} p_{k+2}(t) + \lambda_k p_k(t) - (\lambda_{k+1} + \nu_{k+1}) p_{k+1}(t); \\ p'_{k+2}(t) = \lambda_{k+1} p_{k+1}(t) - \nu_{k+2} p_{k+2}(t). \end{cases} \qquad (2)$$

Точное решение даже усеченной разрешающей системы (2) в общем случае связано с поиском корней характеристического уравнения 5-го порядка. Поэтому только в отдельных случаях можно получить точную картину поведения вероятностей.

2.2 Приближенное решение задач гибели-размножения

Рассмотрим случайный процесс гибели-размножения (см. рисунок 2). Запишем разрешающую систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний:

$$\begin{cases} p_0' = \nu_1 p_1 - \lambda_0 p_0; \\ p_1' = \lambda_0 p_0 + \nu_2 p_2 - (\lambda_1 + \nu_1) p_1; \\ p_2' = \lambda_1 p_1 + \nu_3 p_3 - (\lambda_2 + \nu_2) p_2; \\ \ldots \\ p_k' = \lambda_{k-1} p_{k-1} + \nu_{k+1} p_{k+1} - (\lambda_k + \nu_k) p_k; \\ \ldots \end{cases} \qquad \begin{matrix} p_k(0) = p_k, \\ k = 0, 1, 2, \ldots, \infty. \end{matrix} \tag{3}$$

Только в некоторых частных случаях эта система может быть решена точными методами. Один из приближенных методов решения таких задач основан на ряде Маклорена в векторной форме.

Введем обозначения:

$$\widetilde{P}(t) = \begin{pmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ \ldots \\ p_k(t) \\ \ldots \end{pmatrix}; \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \nu_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \lambda_0 & -\lambda_0 - \nu_1 & \nu_2 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \lambda_1 & -\lambda_2 - \nu_2 & \nu_3 & 0 & \ldots \\ & . & . & . & & \end{pmatrix}; \quad \widetilde{P}(0) = \begin{pmatrix} p_0^0 \\ p_1^0 \\ \ldots \\ p_k^0 \\ \ldots \end{pmatrix}.$$

Волной сверху помечены бесконечномерные объекты. Теперь задача (3) примет вид:

$$\widetilde{P}'(t) = \widetilde{A}\widetilde{P}(t), \qquad \widetilde{P}(0) = \widetilde{P}_0. \tag{4}$$

Запишем в векторной форме ряд Маклорена для функции $\widetilde{P}(t)$:

$$\widetilde{P}(t) = \widetilde{P}(0) + \widetilde{P}'(0)t + \widetilde{P}''(0)\frac{t^2}{2!} + \ldots\ . \tag{5}$$

С учетом векторного уравнения (4) получим

$$\widetilde{P}'(t) = \widetilde{A}\widetilde{P}(t),\ \widetilde{P}''(t) = \widetilde{A}\widetilde{P}'(t) = \widetilde{A}^2\widetilde{P}(t), \ldots$$

$$\widetilde{P}(t) = \widetilde{P}(0) + \widetilde{A}\widetilde{P}(0)t + \widetilde{A}^2\widetilde{P}(0)\frac{t^2}{2!} + \ldots\ . \tag{6}$$

Пусть в некоторый момент времени, который принят за 0, в системе гибели-размножения имеется k особей. В этом случае вектор $\widetilde{P}(0)$ содержит некоторую компоненту $p_k = 1$, а все остальные равны нулю. Полагая прогнозируемый интервал времени t достаточно малым, обрываем ряд (6) и получаем приближенное выражение вектора вероятностей. Кроме того принимаем, что за малый промежуток времени в системе не может значительно измениться число особей k. Поэтому в системе (3) составляем уравнения и функции в окрестности индекса k. Например, можно записать формулы:

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_{k-2} & \nu_{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{k-2} & -(\lambda_{k-1}+\nu_{k-1}) & \nu_k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{k-1} & -(\lambda_k+\nu_k) & \nu_{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & -(\lambda_{k+1}+\nu_{k+1}) & \nu_{k+2} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{k+1} & -\nu_{k+2} \end{pmatrix},$$

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{k-2}(t) \\ p_{k-1}(t) \\ p_k(t) \\ p_{k+1}(t) \\ p_{k+2}(t) \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} p_{k-2}^0 \\ p_{k-1}^0 \\ p_k^0 \\ p_{k+1}^0 \\ p_{k+2}^0 \end{pmatrix}, \quad P(t) \approx \left(E + tA + \frac{t^2}{2!} A^2 \right) P_0 \ . \qquad (7)$$

Результаты расчетов по формуле (7) справедливы для тех t, при которых последнее слагаемое в скобках значительно меньше предыдущего, в противном случае следует увеличивать количество слагаемых в этих скобках. Кроме того, если функции $p_{k-2}(t)$ и $p_{k+2}(t)$ не слишком малы по отношению к другим функциям, то следует увеличивать размерность векторов $P(t)$, P_0 и порядок матрицы A.

2.3 Алгоритм приближенного решения задачи методом рядов

Рассмотрим алгоритм решения задачи гибели-размножения методом рядов.

1 Вводим вектор $\overline{P}(t) = < p_{k-2}(t), ..., p_{k+2}(t) >$, записываем для него частичную сумму ряда Маклорена:

$$\overline{P}(\Delta t) \approx \overline{P}(0) + \overline{P}'(0)\Delta t + \overline{P}''(0)\frac{(\Delta t)^2}{2!}. \qquad (8)$$

2 Используя уравнения (2), находим $\overline{P}'(0), \overline{P}''(0)$ и по формуле (8) получаем приближенное распределение вероятностей через время Δt.

Пример 2 – Система находится в состоянии E_3, т. е. $p_3(0) = 1$. Заданы интенсивности переходов: $\nu_k = 2$, $\lambda_k = k$, $\Delta t = 0{,}1$. Требуется найти вероятности состояний системы через время Δt.

Вычислим первые производные вероятностей состояний:

$$\begin{cases} p_1'(t) = 2p_2(t) - p_1(t); \\ p_2'(t) = 2p_3(t) + p_1(t) - 4p_2(t); \\ p_3'(t) = 2p_4(t) + 2p_2(t) - 5p_3(t); \\ p_4'(t) = 2p_5(t) + 3p_3(t) - 6p_4(t); \\ p_5'(t) = 4p_4(t) - 2p_5(t). \end{cases}$$

Вычислим вторые производные вероятностей состояний:

$$\begin{cases} p''_1(t) = 2p'_2(t) - p'_1(t); \\ p''_2(t) = 2p'_3(t) + p'_1(t) - 4p'_2(t); \\ p''_3(t) = 2p'_4(t) + 2p'_2(t) - 5p'_3(t); \\ p''_4(t) = 2p'_5(t) + 3p'_3(t) - 6p'_4(t); \\ p''_5(t) = 4p'_4(t) - 2p'_5(t). \end{cases}$$

Учитывая, что $p_3(0) = 1$, запишем вектор вероятностей при $t = 0$:

$$\overline{P}(0) = < 0; 0; 1; 0; 0 > .$$

Подставляя его компоненты в формулы для производных, получим

$$\overline{P'}(0) = < 0; 2; -5; 3; 0 > \text{ и } \overline{P''}(0) = < 4; -18; 35; -33; 12 > .$$

Теперь имеется вся информация для получения результата по формуле (8):

$$\overline{P}(0,1) = < 0; 0; 1; 0; 0 > +0,1 < 0; 2; -5; 3; 0 > +0,005 < 4; -18; 35; -33; 12 > =$$

$$= < 0,02; 0,11; 0,675; 0,135; 0,06 > .$$

Ответ: вероятности состояний системы через время $\Delta t = 0,1$ следующие: $p_1 = 0,02$, $p_2 = 0,11$, $p_3 = 0,675$, $p_4 = 0,135$, $p_5 = 0,06$.

2.4 Задания для самостоятельной работы

Система находится в состоянии E_k. Заданы интенсивности переходов λ_m, ν_m. Оценить вероятности состояний системы через малый промежуток времени Δt. Малым промежутком времени полагать такой, при котором выполняется неравенство

$$\Delta t < \frac{1}{\max \lambda_k + \max \nu_k}.$$

Дан граф состояний системы (рисунок 5).

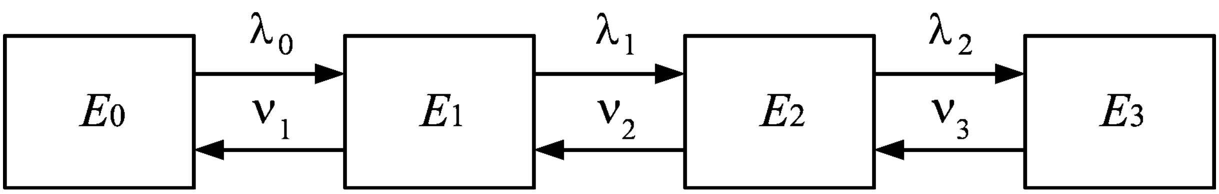

Рисунок 5 – Граф состояний системы с интенсивностями переходов

Интенсивности переходов между состояниями системы на каждом шаге указаны в таблице 3.

Требуется:

– составить систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний системы;

– вычислить предельные значения вероятностей состояний системы.

Таблица 3 – Интенсивности переходов между состояниями системы

Вариант	ν_1	λ_0	ν_2	λ_1	ν_3	λ_2	E_k
1	2	3	3	1	1	2	E_0
2	5	2	4	1	2	2	E_1
3	3	1	2	2	4	1	E_2
4	2	0	3	7	1	2	E_3
5	3	1	2	2	2	4	E_0
6	2	3	2	4	3	5	E_1
7	1	4	3	3	1	2	E_2
8	2	5	1	4	2	5	E_3
9	4	2	2	3	1	4	E_0
10	2	1	4	3	2	5	E_1
11	1	0,5	0,25	0,5	0,25	0,75	E_2
12	0,25	0,75	1	0,25	0,5	1	E_3
13	0,2	0,2	0,3	0,7	0,1	0,2	E_0
14	0,3	0,1	0,2	0,2	0,2	0,4	E_1
15	0,2	0,3	0,2	0,4	0,3	0,5	E_2
16	0,1	0,4	0,3	0,3	0,1	0,2	E_3
17	3	2	2	1	1	3	E_0
18	4	2	5	2	1	2	E_1
19	3	1	4	1	2	1	E_2
20	2	1	3	4	2	1	E_3
21	3	2	2	1	7	0	E_0

Окончание таблицы 3

Вариант	ν_1	λ_0	ν_2	λ_1	ν_3	λ_2	E_k
22	2	4	3	2	2	1	E_1
23	2	5	2	3	4	3	E_2
24	3	2	1	1	3	4	E_3
25	1	5	2	2	4	5	E_0
26	2	4	4	1	3	2	E_1
27	4	5	2	2	3	1	E_2
28	3	2	1	1	2	2	E_3
29	1	0,5	0,25	0,75	0,25	0,75	E_0
30	0,5	0,75	0,25	0,25	0,5	1	E_1

3 Цепи Маркова с дискретным временем

3.1 Основные теоретические сведения

Некоторая система может находиться в одном из состояний $E_1, E_2, ..., E_n$. В определённые моменты времени система может перейти с некоторой вероятностью в другое состояние. Отрезки времени между моментами переходов называют обычно «шаги»: на первом шаге система находилась в состоянии E_1, на втором – в состоянии E_2 и т. д. Обычно обозначают:

$p_i(k)$ – вероятность того, что на k-м шаге система находится в состоянии E_i;

$p_{ij}(k)$ – вероятность того, что система, находившаяся на k-м шаге в состоянии E_i, перейдёт на следующем шаге в состояние E_j.

Если ввести вектор состояния $P(k) = < p_1(k), p_2(k), ..., p_n(k) >$ и матрицу перехода

$$A(k) = \begin{pmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) & ... & p_{1n}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) & ... & p_{2n}(k) \\ ... & ... & ... & ... \\ p_{n1}(k) & p_{n2}(k) & ... & p_{nn}(k) \end{pmatrix},$$

то получим рекуррентную формулу $P(k+1) = P(k)A(k)$. Цепь Маркова называют однородной, если матрица перехода не зависит от номера шага k:

$$A(k) = A \mid \forall k.$$

Будем рассматривать однородные марковские процессы. Имеет место теорема Маркова, утверждающая, что если все элементы матрицы A положительны, то существуют пределы:

$$\widetilde{p}_i = \lim_{n\to\infty} p_i(k).$$

Числа $\widetilde{p}_i$ называются предельными или финишными вероятностями состояний системы. Такая марковская цепь является эргодической, т. е. вероятности $\widetilde{p}_i$ являются предельными значениями частот состояний:

$$\widetilde{p}_i = \lim_{n\to\infty} \frac{n_i}{n},$$

где n_i – число наблюдений системы в состоянии E_i за n шагов.

Для поиска предельных вероятностей нужно вычислить собственный вектор матрицы перехода, соответствующий собственному числу 1:

$$\widetilde{P} = \widetilde{P}A,$$

при дополнительном условии $\sum_{i=1}^{n} \widetilde{p}_i = 1$.

3.2 Пример цепи Маркова с дискретным временем

Экономическая система в состоянии E_1 получает 2000 р. прибыли. На следующий день эта экономическая система с вероятностью 0,3 может перейти в состояние E_2 и получить в этом состоянии 500 р. прибыли или остаться в состоянии E_1. Из состояния E_2 с вероятностью 0,4 система может вернуться в E_1 или перейти в состояние E_3 с вероятностью 0,6. Состояние E_3 означает для этой экономической системы 4500 р. убытков. Из E_3 система обязательно переходит в E_1. Все переходы возможны один раз в сутки.

Изобразить граф системы и записать матрицу ее переходов. Найти предельные вероятности для состояний данной системы, вычислить процентное соотношение времен нахождения системы в каждом из состояний. Вычислить среднюю суточную прибыль системы.

Изобразим граф этой экономической системы (рисунок 6).

Запишем матрицу переходов:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0{,}6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

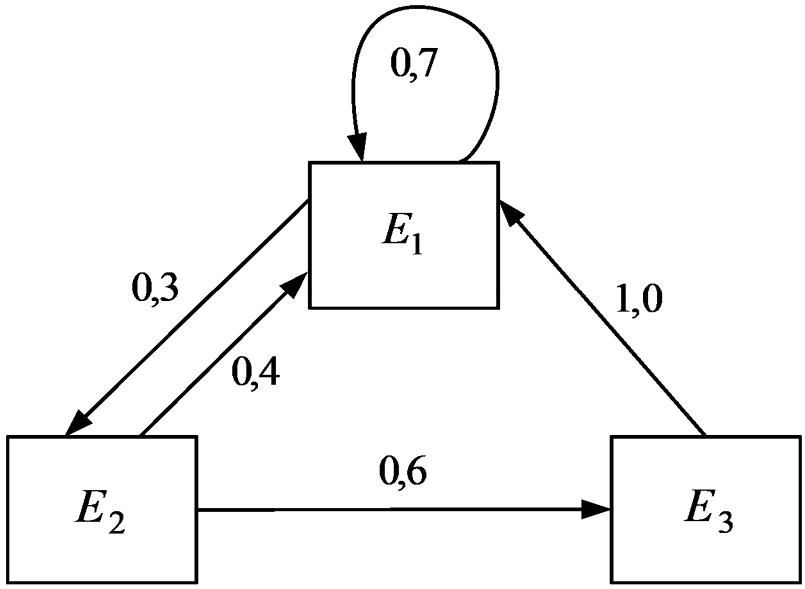

Рисунок 6 – Граф состояний исследуемой экономической системы

Введем вектор предельных вероятностей состояний системы: $\overline{P} = (u, v, w)$. По смыслу предельных вероятностей запишем матричное уравнение $\widetilde{P} = \widetilde{P}A$ и преобразуем его в скалярную форму:

$$\begin{cases} 0{,}7u + 0{,}4v + w = u, \\ 0{,}3u = v, \\ 0{,}6v = w; \end{cases} \quad \begin{cases} -0{,}3u + 0{,}4v + w = 0, \\ 0{,}3u - v = 0, \\ 0{,}6v - w = 0; \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} -0{,}3 & 0{,}4 & 1 \\ 0{,}3 & -1 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & -1 \end{vmatrix}.$$

Сумма всех строк определителя равна нулю, следовательно, $\Delta = 0$. Одно из уравнений является следствием остальных. Заменим первое уравнение на основное свойство вероятностей полной группы событий:

$$\begin{cases} u + v + w = 1, \\ 0{,}3u - v = 0, \\ 0{,}6v - w = 0. \end{cases}$$

Решим систему, представляя u и w, выраженные через v, в первое уравнение системы: $u = \dfrac{25}{37}$, $v = \dfrac{15}{74}$, $w = \dfrac{9}{74}$.

Таким образом, найдены предельные вероятности состояний экономической системы:

$$p(E_1) = \frac{25}{37}, \; p(E_2) = \frac{15}{74}, \; p(E_3) = \frac{9}{74}.$$

Вычислим процентное соотношение пребывания системы в каждом из возможных состояний:

$$E_1: \quad \frac{25}{37} \cdot 100\,\% \approx 67{,}57\,\%,$$

$$E_2: \quad \frac{15}{37} \cdot 100\,\% \approx 20{,}27\,\%,$$

$$E_3: \quad \frac{9}{74} \cdot 100\,\% \approx 12{,}16\,\%.$$

Вычислим математическое ожидание M_X прибыли – это и будет средняя суточная прибыль:

$$\mathrm{M}_X = \frac{25}{37} \cdot 2000 \text{ р} + \frac{15}{74} \cdot 500 \text{ р} - \frac{9}{74} \cdot 4500 \text{ р} = \frac{1000 + 75 - 405}{74} \cdot 100 \text{ р} = 905{,}4 \text{ р}.$$

Вывод: в некоторые дни предприятие получает прибыль, в другие дни терпит убытки, но в среднем работает рентабельно – за длительный период времени заработок составит 905,4 р./сут.

3.3 Задания для самостоятельной работы

Дан граф состояний системы (рисунок 7).

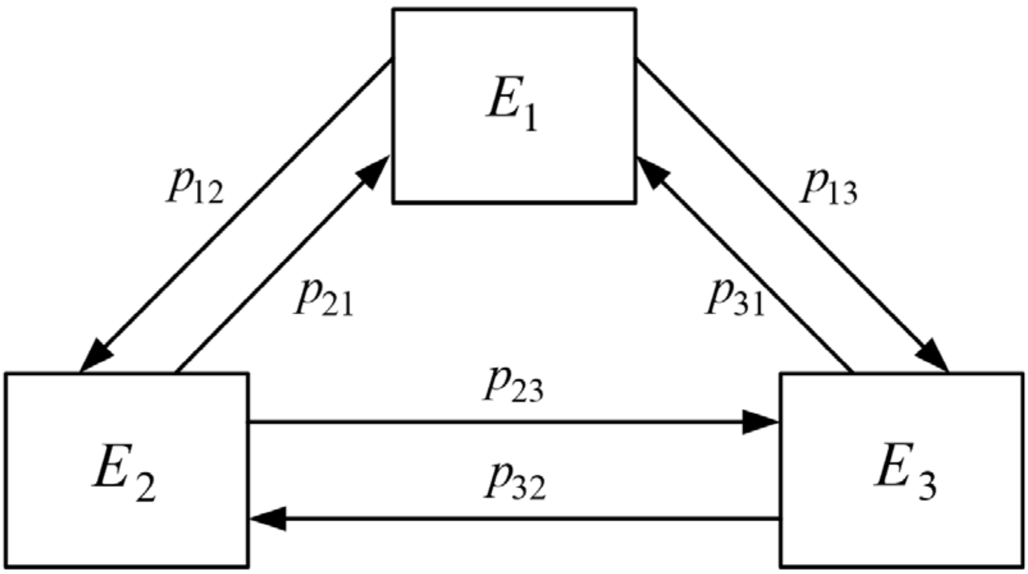

Рисунок 7 – Граф состояний системы с вероятностями переходов

Вероятности переходов между состояниями системы на каждом шаге указаны в таблице 4. Требуется составить матрицу переходов, вычислить предельные вероятности состояний системы.

Таблица 4 – Вероятности переходов между состояниями системы

Вариант	p_{12}	p_{21}	p_{13}	p_{31}	p_{32}	p_{23}
1	0,3	0,3	0,4	0,25	0,5	0,2
2	0,35	0,3	0,2	0,25	0,5	0,25
3	0,15	0,3	0,2	0,5	0,15	0,25
4	0,25	0,4	0,2	0,5	0,15	0,25
5	0,2	0,45	0,2	0,5	0,15	0,25
6	0,2	0,45	0,2	0,1	0,15	0,25
7	0,2	0,45	0,4	0,1	0,15	0,25
8	0,2	0,45	0,3	0,45	0,15	0,2
9	0,35	0,45	0,3	0,45	0,15	0,4
10	0,35	0,45	0,2	0,55	0,35	0,4
11	0,35	0,45	0,2	0,55	0,3	0,2
12	0,3	0,45	0,2	0,45	0,3	0,2
13	0,3	0,65	0,2	0,45	0,3	0,2
14	0,3	0,65	0,2	0,45	0,2	0,2
15	0,3	0,25	0,2	0,45	0,2	0,2
16	0,3	0,25	0,2	0,6	0,2	0,2
17	0,3	0,25	0,3	0,7	0,2	0,2
18	0,3	0,25	0,3	0,2	0,2	0,5
19	0,1	0,25	0,3	0,2	0,2	0,5
20	0,3	0,5	0,2	0,4	0,3	0,3
21	0,3	0,4	0,3	0,5	0,3	0,3
22	0,3	0,4	0,3	0,5	0,2	0,3
23	0,1	0,25	0,5	0,2	0,2	0,5
24	0,3	0,4	0,3	0,5	0,4	0,3
25	0,5	0,2	0,3	0,5	0,4	0,3
26	0,5	0,2	0,3	0,2	0,6	0,3
27	0,5	0,3	0,3	0,2	0,6	0,3
28	0,2	0,3	0,6	0,2	0,6	0,3
29	0,6	0,3	0,2	0,2	0,5	0,3
30	0,4	0,3	0,2	0,3	0,5	0,3

4 Цепи Маркова с непрерывным временем

4.1 Предельные вероятности состояний системы

Некоторая система может находиться в одном из состояний: $E_1, E_2, \ldots E_n$. В случайные моменты времени система может переходить в другое состояние. Будем полагать, что моменты переходов образуют простейший поток событий. Интенсивности переходов для всех пар состояний заданы: λ_{ij} – интенсивность (число актов в единицу времени) переходов из *i*-го в *j*-е состояние. Вероятности состояний $p_i(t)$ находят путем решения задачи Коши:

$$\begin{cases} p_1'(t) = \lambda_{21} p_2(t) + \lambda_{31} p_3(t) + \ldots \lambda_{n1} p_n(t) - (\lambda_{12} + \lambda_{13} + \ldots \lambda_{1n}) p_1(t); \\ p_2'(t) = \lambda_{12} p_1(t) + \lambda_{32} p_3(t) + \ldots \lambda_{n2} p_n(t) - (\lambda_{21} + \lambda_{23} + \ldots \lambda_{2n}) p_2(t); \\ \ldots \\ p_n'(t) = \lambda_{1n} p_1(t) + \lambda_{2n} p_2(t) + \ldots \lambda_{n-1,n} p_{n-1}(t) - (\lambda_{n1} + \lambda_{n2} + \ldots \lambda_{n,n-1}) p_n(t), \end{cases}$$

$$p_1(0) = p_{1,0},\ p_2(0) = p_{2,0}, \ldots p_n(0) = p_{n,0}.$$

Если требуется найти только предельные вероятности, то можно обойти решение довольно громоздкой проблемы Коши. При $t \to \infty$ вероятности стремятся к предельным значениям, следовательно, для больших *t* вероятности и их производные равны нулю. Обозначив через p_i предельные вероятности, получим алгебраическую систему:

$$\begin{cases} \lambda_{21} p_2 + \lambda_{31} p_3 + \ldots \lambda_{n1} p_n - (\lambda_{12} + \lambda_{13} + \ldots \lambda_{1n}) p_1 = 0; \\ \lambda_{12} p_1 + \lambda_{32} p_3 + \ldots \lambda_{n2} p_n - (\lambda_{21} + \lambda_{23} + \ldots \lambda_{2n}) p_2 = 0; \\ \ldots \\ \lambda_{1n} p_1 + \lambda_{2n} p_2 + \ldots \lambda_{n-1,n} p_{n-1} - (\lambda_{n1} + \lambda_{n2} + \ldots \lambda_{n,n-1}) p_n = 0. \end{cases}$$

Из бесчисленного множества решений однородной системы выбираем то, для которого выполняется условие

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

4.2 Пример цепи Маркова с непрерывным временем

Некоторая экономическая система может находиться в одном из состояний: E_1 , E_2 , E_3, При этом состояния E_1, E_2 приносят соответственно 2000 и 500 тыс. р./сут. прибыли, а в состоянии E_3 эта экономическая система терпит 4500 тыс. р./сут. убытков. Интенсивности переходов между состояниями таковы:

$$E_1 \to E_2 : 0{,}5\frac{1}{\text{сут}};\, E_2 \to E_3 : 0{,}6\frac{1}{\text{сут}};\, E_3 \to E_1 : 0{,}4\frac{1}{\text{сут}};$$

$$E_2 \to E_1 : 0{,}3\frac{1}{\text{сут}};\, E_3 \to E_2 : 1{,}0\frac{1}{\text{сут}};\;\; E_2 \to E_1 - 0{,}3\frac{1}{\text{сут}};\, E_3 \to E_2 : 1{,}0\frac{1}{\text{сут}}.$$

Переход $E_1 \to E_3$ невозможен. Изобразить граф системы и записать разрешающую систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний. Найти предельные вероятности для состояний данной системы, вычислить процентное соотношение времени нахождения системы в каждом из состояний, вычислить среднюю суточную прибыль системы.

Изобразим граф этой экономической системы (рисунок 8).

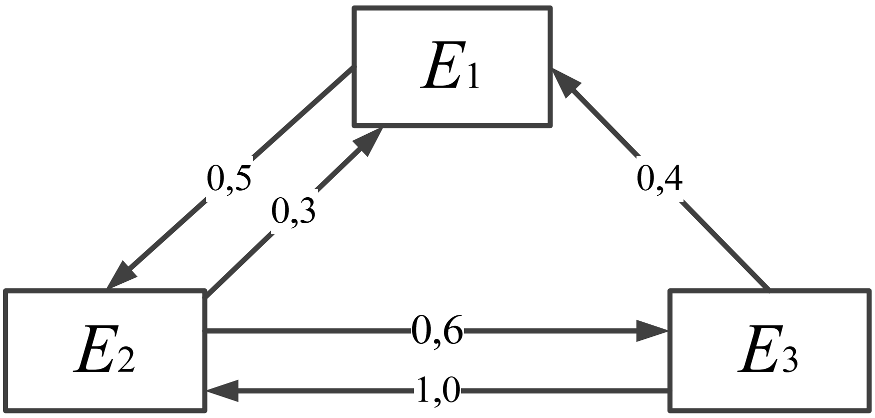

Рисунок 8 – Граф состояний экономической системы с вероятностями переходов

Запишем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} p_1' = 0{,}3p_2 + 0{,}4p_3 - 0{,}5p_1; \\ p_2' = 0{,}5p_1 + p_3 - (0{,}3 + 0{,}6)p_2; \\ p_3' = 0{,}6p_2 - (1 + 0{,}4)p_3. \end{cases}$$

При правильном составлении уравнений сумма всех правых частей системы равна нулю. Для вычисления предельных вероятностей полагаем равными нулю производные:

$$\begin{cases} 0{,}3p_2 + 0{,}4p_3 - 0{,}5p_1 = 0; \\ 0{,}5p_1 + p_3 - 0{,}9p_2 = 0; \\ 0{,}6p_2 - 1{,}4p_3 = 0. \end{cases}$$

Сумма всех уравнений системы равна нулю, следовательно, одно из них можно отбросить. Заменив первое уравнение системы нормирующим условием, получим

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1; \\ 0,5p_1 - 0,9p_2 + p_3 = 0; \\ 0,6p_2 - 1,4p_3 = 0. \end{cases}$$

По формулам Крамера получим решение системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,5 & -0,9 & 1 \\ 0 & 0,6 & -1,4 \end{vmatrix} = 1,66; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -0,9 & 1 \\ 0 & 0,6 & -1,4 \end{vmatrix} = 0,66;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1,4 \end{vmatrix} = 0,7; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,5 & -0,9 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \end{vmatrix} = 0,3;$$

$$p_1 = \frac{0,66}{1,66} \approx 0,398; \;\; p_2 = \frac{0,7}{1,66} \approx 0,422; \;\; p_3 = \frac{0,3}{1,66} \approx 0,181.$$

Предельная вероятность состояния имеет четкий смысл: она показывает среднее относительное время пребывания системы в этом состоянии. Например, если предельная вероятность состояния E_1, т. е. $p_1 = 0,398$, то это означает, что в среднем 40 % времени система находится в состоянии E_1. Запишем время посещения системой каждого из состояний в процентах:

$$p(E_1): 39,76\,\%, \;\; p(E_2): 42,17\,\%, \;\; p(E_2): 18,07\,\%.$$

Определим среднюю суточную прибыль $\Pi_{\text{сред}}$ экономической системы:

$$\Pi_{\text{сред}} = 2000 \cdot 0,398 + 500 \cdot 0,422 - 4500 \cdot 0,181 = 192,5 \text{ (тыс.р. / сут).}$$

4.3 Задания для самостоятельной работы

Дан граф состояний экономической системы (рисунок 9).

Интенсивности переходов между состояниями системы на каждом шаге указаны в таблице 5. Требуется:

1) составить систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний системы;

2) вычислить предельные значения вероятностей состояний системы.

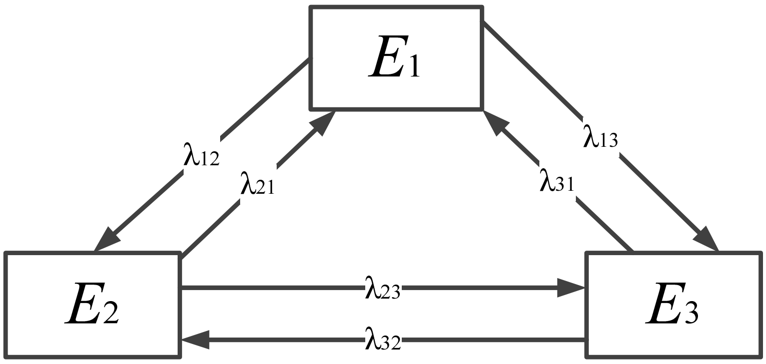

Рисунок 9 – Граф состояний экономической системы с интенсивностями переходов

Таблица 5 – Интенсивности переходов между состояниями системы

Вариант	λ_{12}	λ_{21}	λ_{13}	λ_{31}	λ_{32}	λ_{23}
1	2	3	1	3	2	1
2	5	2	1	4	2	2
3	3	1	2	2	1	4
4	2	0	7	3	2	1
5	3	1	2	2	4	2
6	2	3	4	2	5	3
7	1	4	3	3	2	1
8	2	5	4	1	5	2
9	4	2	3	2	4	1
10	2	1	3	4	5	2
11	1	0,5	0,5	0,25	0,75	0,25
12	0,25	0,75	0,25	1	1	0,5
13	0,2	0,2	0,7	0,3	0,2	0,1
14	0,3	0,1	0,2	0,2	0,4	0,2
15	0,2	0,3	0,4	0,2	0,5	0,3
16	0,1	0,4	0,3	0,3	0,2	0,1
17	3	2	1	2	3	1
18	4	2	2	5	2	1
19	2	1	4	3	1	2
20	3	2	1	2	0	7
21	2	4	2	3	1	2
22	2	5	3	2	3	4
23	3	2	1	1	4	3
24	1	5	2	2	5	4
25	2	4	1	4	2	3
26	4	5	2	2	1	3
27	3	2	1	1	2	2
28	1	0,5	0,75	0,25	0,75	0,25
29	0,5	0,75	0,25	0,25	1	0,5
30	0,75	0,25	1	2	0,75	0,25

5 Содержание аудиторной контрольной работы

5.1 Требования к оформлению контрольной работы

Аудиторная контрольная работа (АКР) выполняется согласно методическим рекомендациям кафедры. АКР включает, как правило, две задачи: одну задачу по процессам размножения и гибели с использованием алгоритма приближенного решения задачи методом рядов и одну из задач по по марковским цепям с дискретным или непрерывным временем.

5.2 Образец содержания аудиторной контрольной работы

Задание 1

Система (рисунок 10) находится в состоянии E_k.

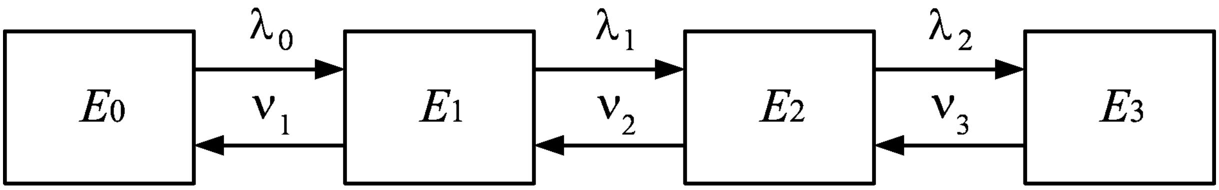

Рисунок 10 – Граф состояний системы к заданию 1

Заданы интенсивности переходов λ_m, ν_m (таблица 6).

Таблица 6

Вариант	ν_1	λ_0	ν_2	λ_1	ν_3	λ_2	E_k
1	2	3	3	1	1	2	E_0

Требуется оценить вероятности состояний системы через малый промежуток времени Δt; состав ить систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний системы; вычислить предельные значения вероятностей состояний системы.

Задание 2

Дан граф состояний системы (рисунок 11).

Заданы интенсивности переходов между состояниями системы на каждом шаге (таблица 7).

Таблица 7

Вариант	λ_{12}	λ_{21}	λ_{13}	λ_{31}	λ_{32}	λ_{23}
1	2	3	1	3	2	1

Требуется составить систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний системы, вычислить предельные значения вероятностей состояний системы.

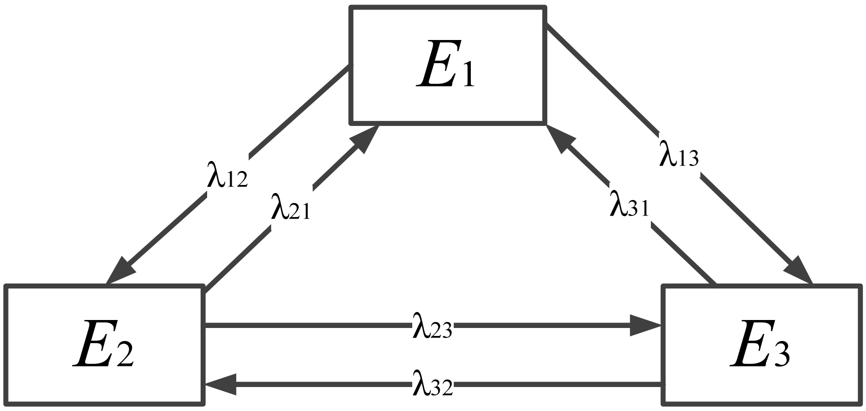

Рисунок 11 – Граф состояний системы к заданию 2

Список литературы

1 Лекции по случайным процессам: учебное пособие / А. В. Гасников [и др.] ; под ред. А. В. Гасникова. – Москва : МФТИ, 2019. – 285 с.

2 **Маталыцкий, М. А.** Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы: учебное пособие / М. А. Маталыцкий, Г. А. Хацкевич. – Минск: Вышэйшая школа, 2012. – 720 с.

3 **Кацман, Ю. Я.** Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы: учебник / Ю. Я. Кацман. – Томск: Томск. политех. ун-т, 2013. – 131 с.

4 **Сердобольская, М. Л.** Теория случайных процессов. Конспект лекций [Электронный ресурс]: электронное учебное пособие / М. Л. Сердобольская. – Москва, 2011. – Режим доступа: http://cmp.phys.msu.ru/ru/study/math/tsp. – Дата доступа: 15.01.2022.

5 **Храмов, А. Г.** Теория случайных процессов. Конспект лекций: учебное пособие / А. Г. Храмов. – Самара, 2011.

6 **Астахов, В. Н.** Теория случайных процессов: учебное пособие / В. Н. Астахов, Г. С. Буланов. – Краматорск: ДГМА, 2006. – 52 с.