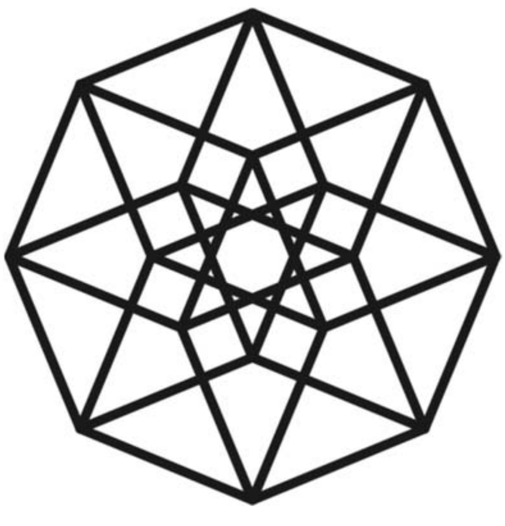
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов направления подготовки 41.03.01 «Зарубежное регионоведение» очной формы обучения



Могилев 2022

УДК 517
ББК 221
О75

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «31» марта 2022 г., протокол № 7

Составитель канд. пед. наук, доц. Е. Л. Старовойтова

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. И. И. Маковецкий

Методические рекомендации содержат необходимые для проведения практических занятий вопросы и задачи.

Учебно-методическое издание

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	И. В. Голубцова
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Практическое занятие № 1. Определители второго и третьего порядка. Понятие матрицы. Операции над матрицами. Обратная матрица

Задачи для самостоятельной работы

1 Найти сумму матриц $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

2 Найти линейную комбинацию матриц $2A-4B$, если $A=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$.

3 Проверить, существуют ли произведения AB, и найти произведение матриц AB:

а) $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 5 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -5 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & -5 & -4 \\ -4 & 5 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$;

е) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -5 & -2 & -5 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$;

ж) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$;

з) $A=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

4 Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 8 & -8 \\ -7 & -3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix}$.

5 Дан определитель $\begin{vmatrix} 0 & -7 & -4 \\ 1 & 6 & 2 \\ -5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. Найти A_{22} и A_{13}.

6 Вычислить определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -3 & -2 & -5 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам второго столбца.

7 Вычислить определитель четвертого порядка $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$, разложив его по элементам третьей строки.

8 Решить уравнение $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ x-1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$.

9 Решить неравенство $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2-3x & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \geq 0$.

10 Методом присоединенной матрицы найти матрицу, обратную данной:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ -4 & -14 & -6 \end{pmatrix}$.

11 Методом элементарных преобразований найти матрицу, обратную данной, предварительно проверив, выполняется ли условие существования обратной матрицы:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 10 & 8 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2 Практическое занятие № 2. Системы линейных уравнений

Задачи для самостоятельной работы

1 Решить следующие СЛАУ матричным методом:

а) $\begin{cases} 3x-8y=4, \\ 2x+5y=13; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x-4y=-3, \\ 2x+y=4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+2y-z=2, \\ 2x-3y+2z=2, \\ 3x+y+z=8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=0, \\ 2x_1-x_2-3x_4=1, \\ 3x_1-x_3+x_4=-2, \\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4=-3. \end{cases}$

2 Решить следующие СЛАУ по формулам Крамера:

а) $\begin{cases} x+y=0, \\ 2x-y=15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8x-6y+5z=15, \\ 13x-10y+z=32, \\ 2x-2y+z=5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 7x+9y+z=8, \\ 13x+15y+9z=6, \\ 2x+3y+z=2. \end{cases}$

3 Исследовать систему на совместность и решить методом Гаусса:

а) $\begin{cases} -2x+6y=2, \\ 4x-15y=-7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -8x+4y=12, \\ 2y-5z=7, \\ 3x-2y+z=-6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+2y+2z=-2, \\ x+z=-3, \\ 4x+2y+5z=-5; \end{cases}$ д) $\begin{cases} -6x-10y-3z=-7, \\ 2x-5y+3z=-8, \\ x+10y+z=9, \\ 2x+5y-2z=7. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+2y-2z=1, \\ 2x+4z=-2, \\ 7x+2y+10z=-5; \end{cases}$

3 Практическое занятие № 3. Понятие вектора на плоскости и в трехмерном пространстве. Основные операции над векторами. Основные виды уравнений прямой

Задачи для самостоятельной работы

1 Дан вектор $\vec{a}=(-8,0,6)$. Найти его длину и направляющие косинусы.

2 Даны векторы $\vec{a}=(-3;2)$, $\vec{b}=(4;-3)$ и $\vec{c}=(5;-1)$. Найти координаты вектора $\vec{d}=-5\vec{a}-6\vec{b}+2\vec{c}$.

3 Даны точки $P(-2;5;-1)$ и $Q(-3;0;1)$. Найти координаты векторов $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{QP}$.

4 Проверить, являются ли коллинеарными векторы $\vec{a}=(2;-3;5)$ и $\vec{b}=(-4;6;-3)$.

5 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$. Зная, что $|\vec{a}|=5$ и $|\vec{b}|=4$, вычислить скалярное произведение $(\vec{a},\vec{b})$ и произведение $(\vec{a}-3\vec{b})\cdot(5\vec{a}-6\vec{b})$.

6 Даны векторы $\vec{a}=(-3;1;3)$ и $\vec{b}=(-2;-5;3)$. Найти угол между ними.

7 Проверить, являются ли ортогональными векторы $\vec{a}=(-3;4;2)$ и $\vec{b}=(2;-3;-1)$.

8 Даны точки $P(-1;4)$ и $S(5;-9)$. Вычислить расстояние между точками P и S и расстояние от точки P до начала координат.

9 Даны точки $P(2;-8)$ и $Q(-4;1)$. Найти направление отрезка PQ.

10 В точках $A(-3;4)$, $B(1;2)$ и $C(0;-7)$ помещены соответственно массы 100, 10 и 50 г. Определить координаты центра масс этой системы.

11 Даны точки $A(2;-2)$, $B(3;-5)$ и $C(8;2)$. Найти площадь ΔABC и координаты центра тяжести этого треугольника, полагая его однородным.

12 Дано уравнение прямой $y=\dfrac{-2}{3}x-4$. Составить: а) общее уравнение этой прямой; б) уравнение этой прямой в отрезках.

13 Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;8)$ и составляющей с осью Ox угол $\varphi=60°$.

14 Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(2;-3)$ и $B(-4;-7)$.

15 Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(-4;6)$ и $B(2;6)$.

16 Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат прямой, заданной уравнением $-3x+8y+24=0$.

17 Уравнение прямой в отрезках имеет вид $\dfrac{x}{\frac{2}{3}}+\dfrac{y}{-12}=1$. Записать общее уравнение этой прямой.

18 Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $y=-x+5$ и $y=\dfrac{x}{3}+2$.

19 Найти угол между прямыми, заданными уравнениями $-x+5y-129=0$ и $-7x+3y-17=0$.

20 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;-1)$

и перпендикулярной прямой $y=\frac{4x}{9}-\frac{1}{3}$.

21 Найти расстояние от точки $M_0\left(-1;1\right)$ до прямой, заданной уравнением $3x-4y+5=0$.

22 Найти точку пересечения прямых $y=2x-3$ и $y=-3x+2$.

4 Практическое занятие № 4. Простейшие задачи аналитической геометрии в пространстве. Основные виды уравнений плоскости и прямой в пространстве. Общее уравнение кривых второго порядка в декартовой системе координат

Задачи для самостоятельной работы

1 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0\left(3;2;-1\right)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n}=\left(-1;3;7\right)$.

2 Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1\left(3;-5;8\right)$, $M_2\left(-5;7;-1\right)$ и $M_3\left(5;-4;1\right)$.

3 Найти величины отрезков, отсекаемых плоскостью $8x-6y-9z-18=0$ на координатных осях.

4 Найти величину острого угла между плоскостями $x-y-\sqrt{2}z-7=0$ и $x+y+\sqrt{2}z+5=0$.

5 Определить, являются ли плоскости $5x-3y-4z+3=0$ и $-7x-y+5z-3=0$ перпендикулярными.

6 Найти расстояние между плоскостью $-2x-3y+8z-7=0$ и точкой $M\left(-1;-8;-5\right)$.

7 Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1\left(-2;4;-7\right)$ и $M_2\left(0;5;-7\right)$.

8 Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1\left(1;2;3\right)$, $M_2\left(4;-1;-2\right)$ и $M_3\left(4;0;3\right)$.

9 Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1\left(2;1;3\right)$, $M_2\left(5;4;7\right)$ и $M_3\left(3;6;2\right)$.

10 Составить уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z+2}{1}$ и $\frac{x+1}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z}{1}$.

11 Найти величины отрезков, отсекаемых на координатных осях плоскостью $2x+3y+5z-10=0$.

12 Исследовать взаимное расположение плоскостей $2x-y-2z+4=0$ и $2x-y-2z-8=0$.

13 Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_0(-1;0;5)$ и $M_1(2;-3;4)$.

14 Найти точку пересечения прямых $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{2}$ и $\frac{x-7}{3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-6}{1}$.

15 Исследовать взаимное расположение прямых $\frac{x-1}{5}=\frac{y+4}{-3}=\frac{z-7}{4}$ и $\frac{x-9}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{2}$.

16 Исследовать взаимное расположение прямых $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{2}$ и $\frac{x-7}{3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-6}{1}$.

17 Найти угол между прямыми $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{-2}$ и $\frac{x+1}{1}=\frac{y+11}{2}=\frac{z+6}{1}$ и выяснить, являются ли они пересекающимися или скрещивающимися.

18 Найти угол между плоскостями $2x+y-2z+3=0$ и $x+y-5=0$.

19 Найти расстояние от точки $M_1(8;5;4)$ до прямой $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{1}$.

20 Найти расстояние от точки $M_0(7;-8;3)$ до плоскости $x+2y-2z-12=0$.

21 Найти расстояние от точки $M_1(6;4;-1)$ до плоскости $2x-y-2z+15=0$.

5 Практическое занятие № 5. Предел последовательности. Предел функции в точке. Основные теоремы о пределах функций. Замечательные пределы. Односторонние пределы

Задачи для самостоятельной работы

1 Написать первые четыре члена последовательности $\{x_n\}$, если $x_1=1$, а $x_n=x_{n-1}+2$.

2 Дана последовательность с общим членом $x_n=\frac{2}{5}+\frac{1}{3n}$. Изобразить 10 первых ее членов на числовой прямой и найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3n}\right)$.

3 Найти предел последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^3-5n^2+2n+3}{5n^3+2n}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^4-3n+5}{7n^3-2n^2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^3-5n^2+2n+3}{5n^4+2n}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^3+4n-3}{5n^2-2-2n^3}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}\right)$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{n^2+1}\right)$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$;

з) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3}{(2n-1)^3}$.

4 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to-1}\left(5x^3-3x^2-8\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{8x^2+6x^3-2}{7x-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-x-6}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{4x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$;

ж) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$;

з) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$;

и) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

к) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$;

л) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+2x^2-4x+1}{x^2+2x-3}$;

м) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

н) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$;

о) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

6 Практическое занятие № 6. Производная функции. Правила дифференцирования. Частные производные функции нескольких переменных

Задачи для самостоятельной работы

1 Найти производные первого порядка следующих функций:

а) $y=x^7-2x^5+5-\dfrac{8}{x^3}+\dfrac{5}{6}x\sqrt[5]{x}$;

б) $y=2\sqrt{x}-4\cos x+2\sin x+\log_3 x-\ln 5$;

в) $y=5^x-7\,\mathrm{tg}\,x+3\,\mathrm{ctg}\,x+\mathrm{arctg}\,x-\ln 3$;

г) $y=e^x-\sqrt[7]{x^4}+\log_2 3-2\arccos x+3\arcsin x$;

д) $y=3x^3+5\sqrt[3]{x^5}+\dfrac{4}{x^3}+3\arcsin x-\log_3 2$;

е) $y=x^5\cdot\sin x$;

ж) $y=\dfrac{1}{x^3}\cdot\log_2 x$;

з) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$;

и) $y=\dfrac{2x^4+3x^2-x}{x^5-2}$;

к) $y=\dfrac{1}{x^2}\cdot\ln x$;

л) $y=\sin x\cdot\log_4 x$;

м) $y=\dfrac{x^2+3x-1}{x^3-x}$;

н) $y=\dfrac{2x+3}{3x^5-2x}$.

2 Найти производные первого порядка следующих сложных функций:

а) $y=\cos^3 x$;
б) $y=\sqrt{x^3+2x}$;
в) $y=\sin^4 x$;
г) $y=\cos^3 4x$;
д) $y=\arcsin^5 x$;
е) $y=\sqrt[3]{x^5-3x}$.

3 Найти производные второго порядка функций:

а) $y=x^3-4x^2+5x-1$;
б) $y=(2x+1)^5$;
в) $y=x^3-4x^2+5x-1$;
г) $y=2x^{-7}-2^x+3\sin x-e^x$;
д) $y=\sin^2 x$.

4 Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y=x^3+2x-2$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

5 Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y=4x^3-3x+4$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

6 Найти частные производные первого порядка функций:

а) $z=x^3+8y^3-6xy+1$;

б) $z=3-2x^2-xy-y^2$;

в) $z=x^2+xy+y^2-2x-6y$;

г) $z=\dfrac{y}{x}+xy$;

д) $z=\dfrac{x-y}{x+y}$;

е) $z=\cos\left(x^2+xy+y^2-2x-6y\right)$;

ж) $z=y\sqrt{x}-y^2-x+64$;

з) $z=2x^3-xy^2+5x^2+y^2$;

и) $z=1+6x-x^2-xy-y^2$;

к) $z=\dfrac{x+3y}{y-3x}$;

л) $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

7 Найти частные производные второго порядка следующих функций:

а) $z=x^3+y^3-3xy$;

б) $z=2xy-3x^2-2y^2+10$;

в) $z=e^{2x}\cdot\left(x+y^2+2y\right)$;

г) $z=x^2+y^2-6xy-20$;

д) $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$;

е) $z=e^{-x^2-y^2}\cdot\left(x^2+2y^2\right)$.

7 Практическое занятие № 7. Первообразная функции и неопределённый интеграл. Свойства неопределённого интеграла. Таблица неопределенных интегралов. Непосредственное интегрирование

Задачи для самостоятельной работы

Найти интегралы:

1) $\int\left(7-x-\frac{6}{x}\right)dx$;

2) $\int(x+1)^2\,dx$;

3) $\int\frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx$;

4) $\int\left(2-x-x^2\right)dx$;

5) $\int\frac{dx}{4+x^2}$;

6) $\int\left(\sqrt{x}+1\right)^2dx$;

7) $\int e^x dx$;

8) $\int\frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$;

9) $\int\frac{dx}{9-x^2}$;

10) $\int\frac{4dx}{\sqrt{x^2-5}}$;

11) $\int\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt{x}}dx$;

12) $\int\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}dx$;

13) $\int 4^x dx$;

14) $\int 2^x 5^x\,dx$;

15) $\int 2^x\,dx$;

16) $\int\frac{dx}{\cos^2 x}$;

17) $\int\sin x\,dx$;

18) $\int\frac{dx}{9-4x^2}$;

19) $\int\sqrt[3]{x}dx$;

20) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$;

21) $\int\left(\frac{5}{x^2+16}+\frac{7}{x^2-49}\right)dx$;

22) $\int\left(2\sin x-3^{x+2}+5\right)dx$;

23) $\int\frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

24) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3}{\sqrt{x^2+4}}\right)dx$;

25) $\int\frac{\cos^2 x-4}{\cos^2 x}dx$;

26) $\int\frac{\left(2\sqrt[3]{x}+1\right)^2}{\sqrt[3]{x^4}}dx$;

27) $\int\frac{3x^3+4x^2-5}{x}dx$;

28) $\int\left(3x^5-\frac{2}{x^7}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx$;

29) $\int\left(4\sqrt[3]{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$;

30) $\int\left(3x^3+1\right)^2x^2dx$.

8 Практическое занятие № 8. Определение определенного интеграла. Приложения ОИ

Задачи для самостоятельной работы

1 Вычислить интегралы:

а) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$; д) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{5+x^2}}$; и) $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$;

б) $\int_0^3 \frac{dx}{9+x^2}$; е) $\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx$; к) $\int_0^1 \left(\sqrt{x}+1\right)^2 dx$;

в) $\int_4^6 \frac{4dx}{4-x^2}$; ж) $\int_4^6 \frac{12dx}{9-x^2}$; л) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$;

г) $\int_0^1 2^x dx$; з) $\int_0^3 \left(4x-x^2\right)dx$; м) $\int_0^1 4^x dx$.

2 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $2y = x^2$, $2x+2y-3=0$ (в ответ записать V/π).

3 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y=0$, $x=2$ (в ответ записать V/π).

4 Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox графика функции $y=\sin x$ на отрезке $[0;\pi]$ (в ответ записать V/π^2).

5 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=(x-1)^2$, $y=x+1$.

6 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\sin x$ и прямыми $x=\frac{-7\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{4}$, $y=0$.

7 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-6$ и $y=-x^2+5x-6$.

8 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x^2-x-2$ и $y=-x^2+x-1$.

9 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2-x^2$ и $y=x^2$.

10 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{4}{x}$, $y=0$, $x=1$ и $x=4$.

11 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+2$, $y=0$, $x=-2$ и $x=1$.

9 Практическое занятие № 9. Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ДУ). ДУ первого порядка. Интегрирование ДУ с разделяющимися переменными. Линейные ДУ первого порядка

Задачи для самостоятельной работы

1 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y' = \sin x$.

3 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y' = y$.

4 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $xy' - y = 0$.

5 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $xy' + y = 0$.

6 Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = 2y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$.

7 Найти решение задачи Коши: $\dfrac{dy}{dx} = 2$, где $y(-1) = 1$.

8 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $yy' + x = 1$.

9 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y' = x + \sin x$.

10 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $9ydy = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$.

11 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $1 + (1 + y')e^y = 0$.

12 Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения $y' \sin x - y \cos x = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

13 Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения $y' = \dfrac{y+1}{x-1}$.

14 Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения $(x^2 + 1)y' + 2xy = 3$ при $y(0) = 0$.

15 Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' - 2y = x^4$.

16 Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos x$.

17 Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}$.

18 Найти общее решение дифференциального уравнения $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}$.

19 Найти общее решение дифференциального уравнения $y' - \frac{3y}{x} = 5x$.

20 Найти частное решение дифференциального уравнения $xy' - y = x\ln x$ при $y(1) = 0$.

21 Найти частное решение дифференциального уравнения $y' + 2xy = 3x$ при $y(0) = 0$.

22 Найти частное решение дифференциального уравнения $y'\sin x - y\cos x = 1$ при $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

10 Практическое занятие № 10. Однородные и неоднородные ЛДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

Задачи для самостоятельной работы

1 Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие начальным условиям:

а) $3y'' + 7y' + 4y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = \frac{2}{3}$;

б) $y'' - 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 6,\ y'(0) = 10$;

в) $y'' - 4y' + 3y = 0,\ y(0) = 6,\ y'(0) = 10$;

г) $y'' + 4y' = 0,\ y(0) = 7,\ y'(0) = 8$;

д) $y'' - 6y' + 9y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$;

е) $4y'' + 4y' + y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$;

ж) $y'' + 2y' + 5y = 0,\ y(0) = 6,\ y'(0) = 10$.

2 Найти общие решения дифференциальных уравнений, подбирая частное решение методом неопределенных коэффициентов:

а) $y'' - 7y' = 5xe^x$;

б) $y'' - 3y' + 2y = 10e^{-x}$;

в) $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$;

г) $y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - 30$;

д) $y'' - 2y' + 2y = 2x$;

е) $y'' + 4y' - 5y = 1$;

ж) $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$;

з) $y'' + 6y' + 9y = (x - 2)e^{-3x}$;

и) $y'' + 3y' - 4y = (x + 1)e^x$;

к) $y'' - 2y' + y = (x + 1)e^x$.

11 Практическое занятие № 11. Классическое определение вероятности случайного события. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность. Независимость событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Формулы Бернулли, Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Задачи для самостоятельной работы

Комбинаторика.

1 Определить число способов размещения на скамейке пяти человек.

2 Определить, сколько шестизначных номеров можно составить из девяти цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 при условии, что ни одна цифра в номере не повторяется.

3 В магазине одежды имеется 5 разных рубашек, 3 разных пары брюк и 4 разных галстука. Определить, сколькими способами можно купить комплект из рубашки, брюк и галстука.

4 Сколькими способами можно выбрать три лица на три одинаковые должности из десяти кандидатов?

5 Сколько различных перестановок букв можно сделать в слове «замок»?

Классическое определение вероятности.

6 В урне находятся 8 белых и 6 черных шаров. Из урны извлекают последовательно без возвращения 3 шара. Найти вероятность того, что все 3 шара белые.

7 Игральная кость подбрасывается дважды. Найти вероятность того, что оба раза выпадет одинаковое число очков.

8 В урне 10 лотерейных билетов, 4 из них выигрышные. Из урны наугад извлекают 3 билета. Найти вероятность того, что из трех взятых билетов все билеты выигрышные.

9 В урне 10 лотерейных билетов, 4 из них выигрышные. Из урны наугад извлекают 3 билета. Найти вероятность того, что из трех взятых билетов два билета выигрышные.

10 В урне 10 лотерейных билетов, 4 из них выигрышные. Из урны наугад извлекают 3 билета. Найти вероятность того, что из трех взятых билетов хотя бы один билет выигрышный.

Теоремы сложения и умножения вероятностей.

11 Прибор состоит из двух элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность выхода из строя первого элемента равна 0,05, второго – 0,1. Найти вероятность того, что оба элемента будут работать.

12 Турбюро организовывает экскурсии по Могилеву. Каждый из троих осмотревших достопримечательности Могилева экскурсантов независимо от остальных либо благодарит экскурсовода с вероятностью 0,8, либо молча уходит с вероятностью 0,2. Определить вероятность того, что ровно два экскурсанта из трех поблагодарили экскурсовода, а не ушли молча.

13 В определенный день вероятность снежной погоды равна 0,7, а дождливой – 0,35. Определить вероятность осадков в этот день, если вероятность дождя со снегом равна 0,15.

14 Вероятность попадания в мишень для первого спортсмена равна 0,85, а для второго – 0,8. Спортсмены независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Найти вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один спортсмен.

15 В блок входят три радиодетали. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны 0,3; 0,2; 0,4. Определить вероятность того, что в течение гарантийного срока ни одна радиодеталь не выйдет из строя.

Условная вероятность. Независимость событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

16 Приборы монтируются следующим образом: 30 % – с применением микромодулей, остальные – с применением интегральных схем. Надежность приборов с применением микромодулей равна 0,9, интегральных схем – 0,8. Найти вероятность надежной работы наугад взятого прибора.

17 В телевизионном ателье имеются 2 кинескопа первого типа и 8 – второго. Вероятность выдержать гарантийный срок для кинескопов первого типа равна 0,8, а для второго типа – 0,7. Найти вероятность того, что взятый наугад кинескоп, выдержавший гарантийный срок, первого типа.

18 На двух станках обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для станка 1 составляет 0,03, для станка 2 – 0,02. Обработанные детали складываются в одном месте, причем деталей, обработанных на станке 1, вдвое больше, чем на станке 2. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь будет стандартной.

19 Три автомата изготовляют однотипные детали, которые поступают на общий конвейер. Производительности первого, второго и третьего автоматов соотносятся как 2:3:5. Вероятность того, что деталь высшего качества для первого автомата равна 0,8, для второго – 0,6, для третьего – 0,7. Найти вероятность того, что наугад взятая с конвейера деталь окажется высшего качества.

20 Детали попадают на обработку на один из трех станков с вероятностями, соответственно равными 0,2; 0,3; 0,5. Вероятность брака на первом станке равна 0,02, на втором – 0,03, на третьем – 0,01. Найти вероятность обработки наугад взятой детали на втором станке, если она оказалась стандартной.

Формулы Бернулли, Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.

21 Вероятность выигрыша по одной облигации трехпроцентного займа равна 0,25. Найти вероятность того, что из восьми купленных облигаций две окажутся выигрышными.

22 Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет 2 раза.

23 Пять охотников стреляют в волка. Вероятность попадания каждого из них равна 0,6. Вероятность того, что попадут трое, равна … .

24 Вероятность того, что покупателю потребуется обувь 41-го размера,

равна 1/4. Найти вероятность того, что из четырех покупателей обувь этого размера понадобится двоим.

25 Найти вероятность того, что при четырех бросаниях игральной кости шесть очков выпадет 3 раза.

12 Практическое занятие № 12. Дискретные и непрерывные СВ. Законы распределения СВ. Функция распределения СВ и ее свойства. Плотность распределения непрерывной случайной величины, ее свойства, вероятностный смысл. Математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение. Мода и медиана. Начальные и центральные моменты. Асимметрия и эксцесс. Коэффициент корреляции

Задачи для самостоятельной работы

1 Дискретная случайная величина X задана законом распределения (таблица 1). Найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Таблица 1

x_i	–1	0	2	4	5
p_i	0,2	0,15	0,05	0,4	0,2

2 Дискретная случайная величина X задана законом распределения (таблица 2). Найти математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Таблица 2

x_i	–3	–2	1	2	3
p_i	0,05	0,5	0,05	0,25	0,15

3 Дан ряд распределения дискретной случайной величины X (таблица 3). Найти центральный момент второго порядка случайной величины X.

Таблица 3

x_i	2	3	5	6
p_i	0,2	0,4	0,1	0,3

4 Дан ряд распределения дискретной случайной величины X (таблица 4). Найти среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Таблица 4

x_i	2	3	5	6
p_i	0,2	0,4	0,1	0,3

5 Дан ряд распределения дискретной случайной величины X (таблица 5). Найти значение функции распределения при $x = 4$.

Таблица 5

x_i	2	3	5	6
p_i	0,2	0,4	0,1	0,3

6 Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей (таблица 6). Найти вероятность $P(24 \le X < 30)$.

Таблица 6

x_i	22	24	26	28	30
p_i	0,10	0,15	0,30	0,25	0,20

7 Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей (таблица 7). Найти вероятность $P(2 < X < 5)$.

Таблица 7

x_i	1	2	3	5
p_i	0,45	0,30	0,15	0,10

8 Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей (таблица 8). Найти значение a.

Таблица 8

x_i	1	2	3	4
p_i	0,1	0,25	a	0,3

9 Проводится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна 0,7. Тогда математическое ожидание $M(X)$ дискретной случайной величины X – числа появления события в $n = 100$ проведенных испытаниях равна… .

10 Проводится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна 0,7. Тогда дисперсия $D(X)$ дискретной случайной величины X – числа появления события в $n = 100$ проведенных испытаниях равна … .

11 В среднем 80 % студентов группы сдают зачет с первого раза. Найти вероятность того, что из шести человек, сдававших зачет, с первого раза сдадут ровно 4 студента.

12 Банк выдал 5 кредитов. Вероятность того, что кредит не будет погашен в срок, равна 0,1. Найти вероятность того, что в срок не будут погашены три кредита.

13 Проводится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна 0,8. Найти математическое ожидание $M(X)$ дискретной случайной величины X – числа появления события в $n=200$ проведенных испытаниях.

14 Найти математическое ожидание непрерывной случайной величины, заданной плотностью распределения вероятностей $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-10)^2}{8}}$.

15 Найти математическое ожидание непрерывной случайной величины, заданной плотностью распределения вероятностей $f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x+12)^2}{18}}$.

16 Найти значение $M(2X-2)$, если случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x+1)^2}{8}}$.

19 Найти значение $D(1-X)$, если случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x+1)^2}{8}}$.

20 Найти значение $M(3X-1)$, если случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-2)^2}{18}}$.

21 Найти значение $D(1-3X)$, если случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-2)^2}{18}}$.

22 Найти математическое ожидание показательно распределенной случайной величины, заданной плотностью распределения вероятностей
$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ 2{,}5e^{-2{,}5x} & \text{при } x\ge 0.\end{cases}$$

23 Найти дисперсию показательно распределенной случайной величины, заданной плотностью распределения вероятностей $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ 2{,}5e^{-2{,}5x} & \text{при } x\ge 0.\end{cases}$

24 Найти математическое ожидание показательно распределенной случайной величины, заданной плотностью распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ 5e^{-5x} & \text{при } x\ge 0.\end{cases}$$

25 Найти дисперсию показательно распределенной случайной величины, заданной плотностью распределения вероятностей $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ 5e^{-5x} & \text{при } x\ge 0.\end{cases}$

26 Найти дисперсию равномерно распределенной случайной величины, заданной плотностью распределения вероятностей $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8}, & x\in(-2;6),\\ 0, & x\notin(-2;6).\end{cases}$

27 Найти математическое ожидание равномерно распределенной случайной величины, заданной плотностью распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{7}, & x\in(1;8),\\ 0, & x\notin(1;8).\end{cases}$$

28 Найти дисперсию равномерно распределенной случайной величины, заданной плотностью распределения вероятностей $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}, & x\in(2;11),\\ 0, & x\notin(2;11).\end{cases}$

13 Практическое занятие № 13. Генеральная и выборочная совокупности. Вариационный ряд и его характеристики. Эмпирическая функция распределения

Часть 1. Первичная обработка выборочных данных: *генеральная совокупность и выборка* (*дискретный ряд*)

Задача. Дан статистический материал: случайная величина X – результат n измерений некоторой величины. Требуется:

1) построить вариационный и статистический ряды;

2) построить полигон абсолютных и относительных частот;

3) найти эмпирическую функцию распределения $F_n^*(x)$ и построить ее график;

4) найти выборочные значения числовых характеристик случайной величины X: выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение, размах вариации, моду, медиану.

Пример выполнения

Случайная величина X – размеры мужской обуви, проданной магазином за день.

44	39	43	42	41	38	43	42	44	42
43	41	40	40	42	39	40	42	41	45
43	42	43	38	39	43	41	40	43	41
44	45	43	42	45	43	38	43	42	43
39	42	43	44	42	41	43	43	44	45

1 Проранжировав (упорядочив по неубыванию) статистические данные (т. е. исходный ряд), получим вариационный ряд

$$\left(x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(8)} \right) = \left(38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45 \right).$$

Варианты (значения, которые может принимать СВ X) в данном случае следующие: $x_1 = 38$; $x_2 = 39$; $x_3 = 40$; $x_4 = 41$; $x_5 = 42$; $x_6 = 43$; $x_7 = 44$; $x_8 = 45$.

Подсчитав частоту n_i (т. е. сколько раз в вариационном ряду встречается данная варианта) и относительные частоты $W_i = \dfrac{n_i}{n}$ вариант, получим статистическое распределение выборки (дискретный статистический ряд) (таблица 9).

Таблица 9

x_i	38	39	40	41	42	43	44	45
n_i	3	4	4	6	10	14	5	4
W_i	0,06	0,08	0,08	0,12	0,2	0,28	0,1	0,08

Контроль: $3 + 4 + 4 + 6 + 10 + 14 + 5 + 4 = 50$;

$$0,06 + 0,08 + 0,08 + 0,12 + 0,2 + 0,28 + 0,1 + 0,08 = 1.$$

2 Для построения полигона абсолютных частот (рисунок 1) на координатной плоскости изобразим ломаную, соединяющую точки с координатами $\left(x_1; n_1 \right)$, $\left(x_2; n_2 \right)$, …, $\left(x_8; n_8 \right)$.

Для построения полигона относительных частот (рисунок 2) на координатной плоскости изобразим ломаную, соединяющую точки с координатами $\left(x_1; W_1 \right)$, $\left(x_2; W_2 \right)$, …, $\left(x_8; W_8 \right)$.

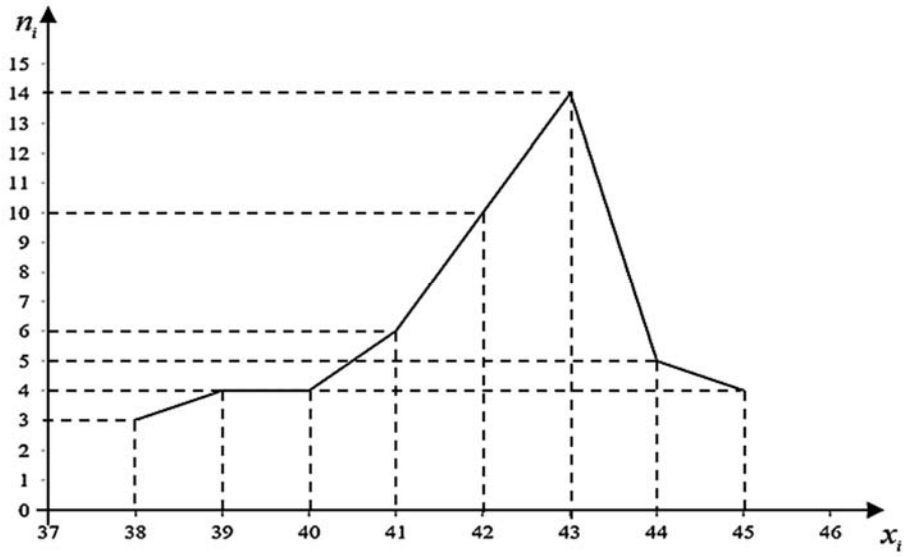


Рисунок 1

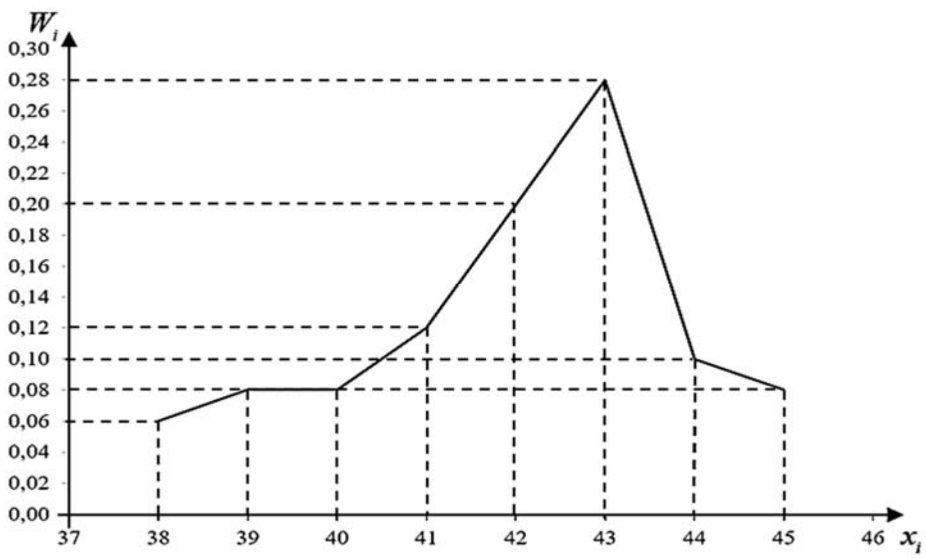


Рисунок 2

3 Найдем эмпирическую функцию распределения, воспользовавшись формулой $F_n^*(x) = W\{X < x\} = \dfrac{n_x}{n}$, где n – объем выборки; n_x – число наблюдений, меньших x.

$$F_8^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 38, \\ 0{,}06 & \text{при} \quad 38 < x \le 39, \\ 0{,}06 + 0{,}08 = 0{,}14 & \text{при} \quad 39 < x \le 40, \\ 0{,}06 + 0{,}08 + 0{,}08 = 0{,}22 & \text{при} \quad 40 < x \le 41, \\ 0{,}06 + 0{,}08 + 0{,}08 + 0{,}12 = 0{,}34 & \text{при} \quad 41 < x \le 42, \\ 0{,}06 + 0{,}08 + 0{,}08 + 0{,}12 + 0{,}2 = 0{,}54 & \text{при} \quad 42 < x \le 43, \\ 0{,}06 + 0{,}08 + 0{,}08 + 0{,}12 + 0{,}2 + 0{,}28 = 0{,}82 & \text{при} \quad 43 < x \le 44, \\ 0{,}06 + 0{,}08 + 0{,}08 + 0{,}12 + 0{,}2 + 0{,}28 + 0{,}1 = 0{,}92 & \text{при} \quad 44 < x \le 45, \\ 0{,}06 + 0{,}08 + 0{,}08 + 0{,}12 + 0{,}2 + 0{,}28 + 0{,}1 + 0{,}08 = 1 & \text{при} \quad x > 45. \end{cases}$$

График эмпирической функции распределения имеет вид (рисунок 3).

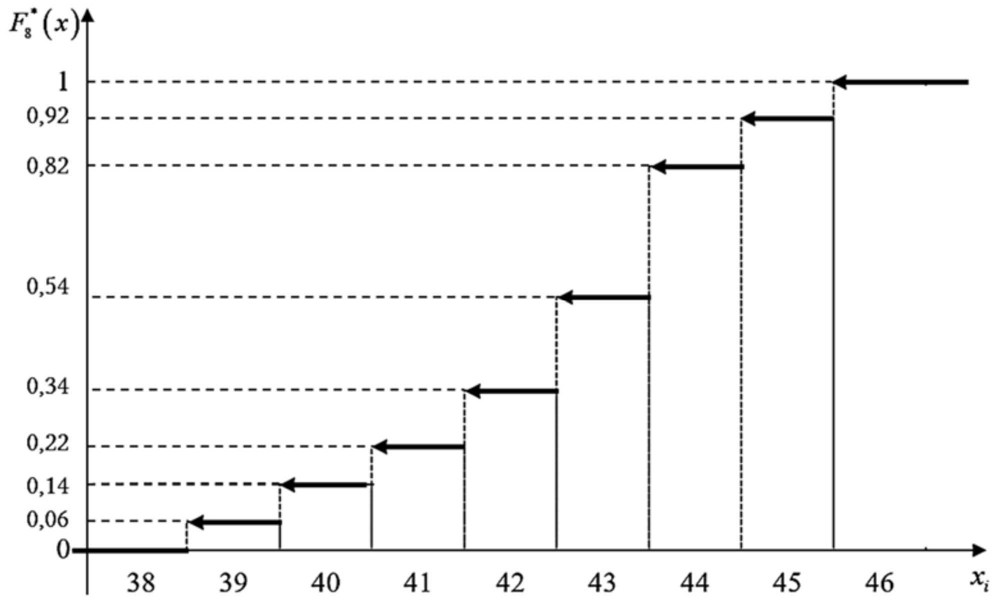


Рисунок 3

4 Найдём характеристики выборки.
Найдем выборочное среднее:

$$\overline{x}_B = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{8} x_i \cdot n_i = \frac{1}{50}(38\cdot 3 + 39\cdot 4 + 40\cdot 4 + 41\cdot 6 + 42\cdot 10 +$$

$$+ 43\cdot 14 + 44\cdot 5 + 45\cdot 4) = \frac{1}{50}\cdot 2098 = 41{,}96.$$

Найдем выборочную дисперсию:

$$D_B = \frac{1}{50}\sum_{i=1}^{8}(x_i - \overline{x}_B)^2 \cdot n_i = \frac{1}{50}\Big((38-41{,}96)^2\cdot 3 + (39-41{,}96)^2\cdot 4 +$$

$$+ (40-41{,}96)^2\cdot 4 + (41-41{,}96)^2\cdot 6 + (42-41{,}96)^2\cdot 10 +$$

$$+ (43-41{,}96)^2\cdot 14 + (44-41{,}96)^2\cdot 5 + (45-41{,}96)^2\cdot 4\Big) = \frac{1}{50}\cdot 175{,}92 = 3{,}52.$$

Найдем выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{3{,}52} \approx 1{,}88.$$

Найдем исправленную выборочную дисперсию:

$$S^2 = \frac{50}{50-1} \cdot 3{,}52 \approx 3{,}59\,.$$

Найдем исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$S = \sqrt{3{,}59} \approx 1{,}89\,.$$

Найдем размах вариации:

$$R = x_{(8)} - x_{(1)} = 45 - 38 = 7\,.$$

Найдем моду (варианту, имеющую наибольшую частоту):

$$M_0^* = 43\,.$$

Так как вариационный ряд $\left(x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(8)}\right) = (38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45)$ имеет четное число членов $(8 = 2k \Rightarrow k = 4)$, то найдем медиану:

$$M_e^* = \frac{x_{(k)} + x_{(k+1)}}{2} = \frac{x_{(4)} + x_{(5)}}{2} = \frac{41+42}{2} = 41{,}5\,.$$

***Варианты заданий* (*часть 1*)**

Задача. Дан статистический материал: случайная величина X – результат n измерений некоторой величины. Требуется:

1) построить вариационный и статистический ряды;
2) построить полигон абсолютных и относительных частот;
3) найти эмпирическую функцию распределения $F_n^*(x)$ и построить ее график;
4) найти выборочные значения числовых характеристик случайной величины X: выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение, размах вариации, моду, медиану.

Указание: i – порядковый номер элемента в выборке (таблица 10), начиная с которого следует отсчитать n чисел, двигаясь по строкам слева направо, для формирования статистического материала для своего варианта.

Таблица 10

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
i	11	10	15	19	22	30	24	26	28	18	27	23	9	14
n	100	120	100	110	110	110	120	110	120	115	120	115	110	115

Продолжение таблицы 10

Номер варианта	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
i	7	2	1	29	4	21	6	13	25	8	20	3	12	5
n	110	110	120	110	115	110	115	100	110	120	115	110	110	100

38	43	49	32	42	42	47	33	39	38	29	51	40	28	29
47	43	42	40	28	27	43	26	38	56	26	53	54	53	37
48	42	44	46	49	53	27	30	51	35	35	37	30	41	29
40	48	49	45	55	26	46	49	35	30	52	35	37	36	44
30	32	44	26	49	27	56	51	50	40	51	55	35	42	28
25	54	45	44	45	31	47	38	29	29	38	41	42	44	55
32	39	42	42	32	46	55	42	40	56	25	40	31	57	34
28	57	54	29	32	35	42	52	35	48	52	40	52	30	52
32	44	31	40	47	42	32	45	54	54	53	47	39	53	30
37	26	49	36	43	40	48	50	54	36	29	50	45	38	44
37	51	27	47	45	38	50	39	55	28	40	34	47	26	30

Часть 2. Первичная обработка выборочных данных: генеральная совокупность и выборка (интервальный ряд)

Задача. По данному статистическому материалу требуется:

1) составить статистический ряд распределения случайной величины X;

2) составить интервальный статистический ряд распределения случайной величины X;

3) построить полигон и гистограмму относительных частот;

4) найти эмпирическую функцию распределения и построить ее график;

5) найти характеристики выборки: выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.

Пример выполнения

Случайная величина X – рост (с точностью до сантиметра) 30 наудачу отобранных студентов.

178	160	154	183	155	153	167	186	163	155	157	175	170	166	159
173	182	167	171	169	179	165	156	179	158	171	175	173	164	172

1 Проранжировав (упорядочив по неубыванию) статистические данные и подсчитав частоту n_i, получим статистический ряд распределения (таблица 11).

Таблица 11

x_i	153	154	155	156	157	158	159	160	163	164	165	166
n_i	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Продолжение таблицы 11

x_i	167	169	170	171	172	173	175	178	179	182	183	186
n_i	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	1

2 Так как СВ X – рост студента – непрерывная случайная величина, то для исследования данной выборки составим интервальный статистический ряд, для чего найдем количество и длину частичных интервалов. Для нахождения числа интервалов воспользуемся формулой $k = 1 + \log_2 n$. В данном случае объем выборки $n = 30$, поэтому $k = 1 + \log_2 30 \approx 1 + 4{,}91 = 5{,}91$. Так как число интервалов – целое число, то разобьем исходные данные на $k = 6$ частичных интервалов. Для нахождения длины частичных интервалов воспользуемся формулой $h = \dfrac{R}{k}$. В данном случае $x_{\max} = 186$, $x_{\min} = 153$. Значит, размах варьирования $R = x_{\max} - x_{\min} = 186 - 153 = 33$. Тогда $h = \dfrac{33}{6} \approx 5{,}5$.

Подсчитаем число студентов n_i, рост которых попадает в каждый из полученных частичных интервалов, и составим интервальный статистический ряд (добавив столбцы с данными, которые понадобятся впоследствии) (таблица 12).

Таблица 12

1	2	3	4	5	6	7
$[x_i; x_{i+1})$ – частичные интервалы	n_i – частота в интервале	$W_i = \dfrac{n_i}{n}$ – относительная частота	n_x – накопленная частота	$\dfrac{n_x}{n}$ – относительная накопленная частота	$\dfrac{W_i}{h}$ – плотность относительной частоты	$x_i^* = \dfrac{x_{i+1} + x_i}{2}$ – середины интервалов
$[153;158{,}5)$	7	7/30	7	7/30	0,042	155,75
$[158{,}5;164)$	3	3/30	10	10/30	0,018	161,25
$[164;169{,}5)$	6	6/30	16	16/30	0,036	166,75
$[169{,}5;175)$	6	6/30	22	22/30	0,036	172,25
$[175;180{,}5)$	5	5/30	27	27/30	0,030	177,75
$[180{,}5;186]$	3	3/30	30	1	0,018	183,25

Контроль: $7+3+6+6+5+3=30=n$; $\frac{7}{30}+\frac{3}{30}+\frac{6}{30}+\frac{6}{30}+\frac{5}{30}+\frac{3}{30}=1$.

3 Для построения полигона относительных частот (рисунок 4) на координатной плоскости по данным столбцов 3 и 7 таблицы 12 изобразим ломаную, соединяющую точки с координатами $\left(x_1^*;W_1\right)$, $\left(x_2^*;W_2\right)$, …, $\left(x_6^*;W_6\right)$.

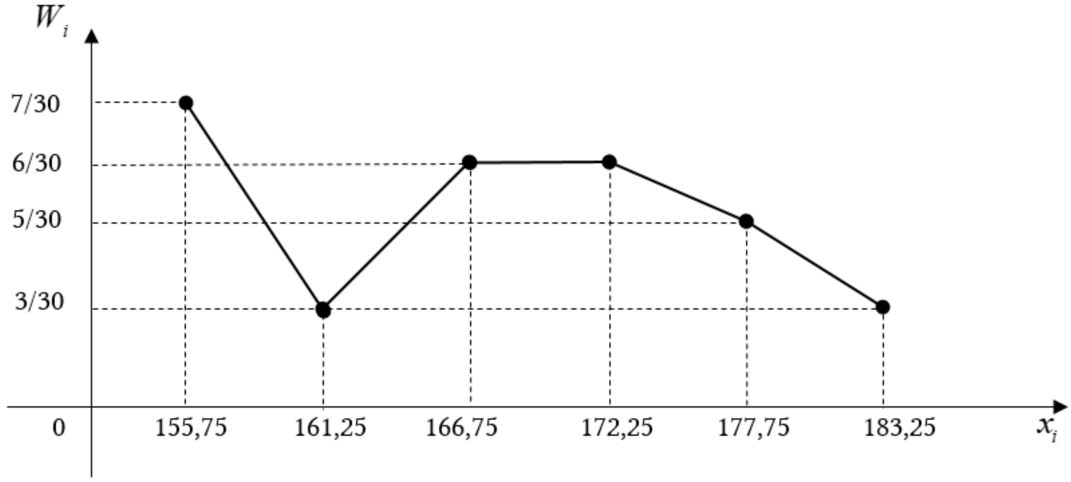


Рисунок 4

Для построения гистограммы относительных частот (рисунок 5) на координатной плоскости по данным столбцов 1 и 6 таблицы 12 построим ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы $\left(x_i;x_{i+1}\right)$, а высоты равны $\frac{W_i}{h}$ – плотности относительной частоты.

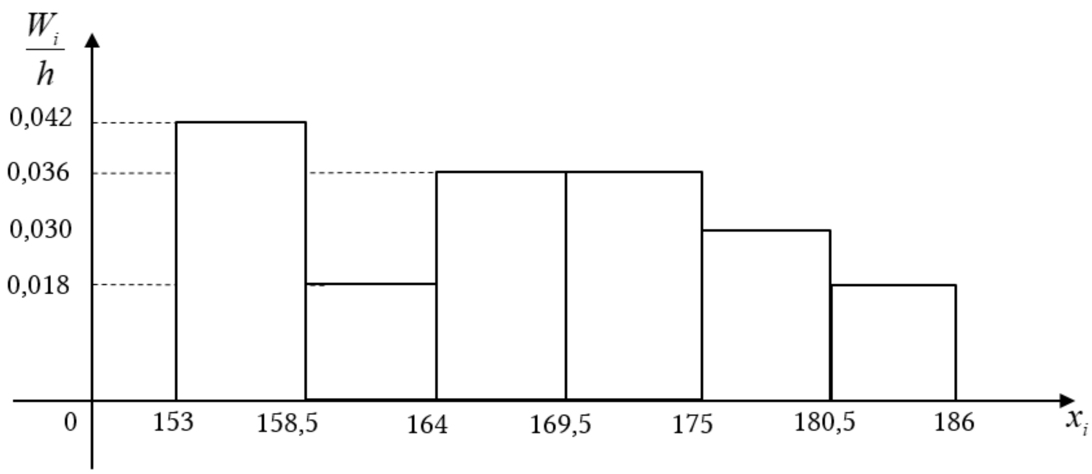


Рисунок 5

4 Эмпирическую функцию распределения найдем по данным столбца 5 таблицы 5 по формуле $F^*\left(x\right)=W\left(X<x\right)=\frac{n_x}{n}$.

Тогда эмпирическая функция распределения будет иметь вид:

$$F^*(x)=\begin{cases}0, & x\le 153,\\ 7/30, & x=158{,}5,\\ 10/30, & x=164,\\ 16/30, & x=169{,}5,\\ 22/30, & x=175,\\ 27/30, & x=180{,}5,\\ 1, & x\ge 186.\end{cases}$$

График эмпирической функции распределения имеет следующий вид (рисунок 6).

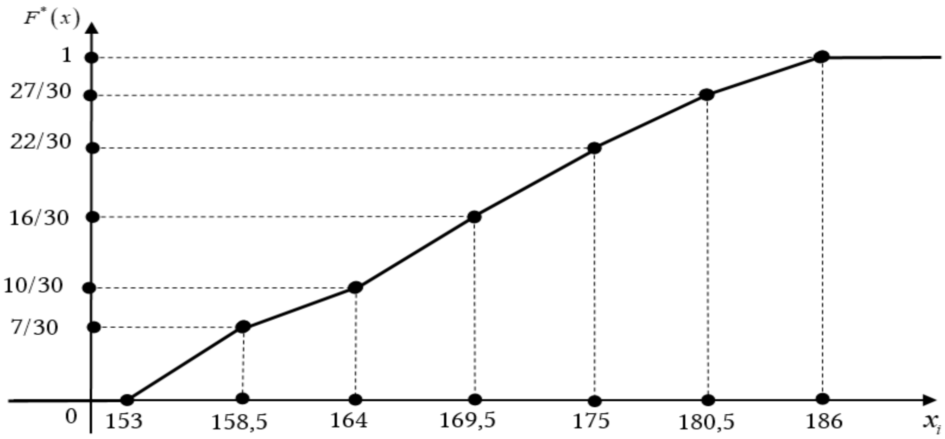


Рисунок 6

5 Найдем характеристики выборки.

Найдем выборочное среднее (в качестве x_i берем середины интервалов, а в качестве n_i – соответствующие им частоты):

$$\overline{x}_B=\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{k}x_i^*\cdot n_i=\frac{1}{30}\big(155{,}75\cdot 7+161{,}25\cdot 3+166{,}75\cdot 6+$$

$$+172{,}25\cdot 6+177{,}75\cdot 5+183{,}25\cdot 3\big)=168{,}22.$$

Найдем выборочную дисперсию (в качестве x_i берем середины интервалов, а в качестве n_i – соответствующие им частоты):

$$D_B=\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{k}(x_i^*)^2\cdot n_i-(\overline{x}_B)^2=\frac{1}{30}\big(155{,}75^2\cdot 7+161{,}25^2\cdot 3+$$

$$+166{,}75^2\cdot 6+172{,}25^2\cdot 6+177{,}75^2\cdot 5+183{,}25^2\cdot 3\big)-168{,}22^2=81{,}43.$$

Найдем выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_B = \sqrt{81{,}43} \approx 9{,}02.$$

Найдем исправленную выборочную дисперсию:

$$S^2 = \frac{30}{30-1} \cdot 81{,}43 \approx 84{,}24\,.$$

Найдем исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$S = \sqrt{84{,}24} \approx 9{,}18\,.$$

***Варианты заданий* (*часть 2*)**

Задача. По данному статистическому материалу требуется:

1) составить статистический ряд распределения случайной величины X;

2) составить интервальный статистический ряд распределения случайной величины X;

3) построить полигон и гистограмму относительных частот;

4) найти эмпирическую функцию распределения и построить ее график;

5) найти характеристики выборки: выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение.

Указание: i – порядковый номер элемента в выборке (таблица 13), начиная с которого следует отсчитать n чисел, двигаясь по строкам слева направо, для формирования статистического материала для своего варианта.

Таблица 13

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
i	11	10	15	19	22	30	24	26	28	18	27	23	9	14	7
n	100	120	100	110	110	110	120	110	120	115	120	115	110	115	110

Продолжение таблицы 13

Номер варианта	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
i	2	1	29	4	21	6	13	25	8	20	3	12	5	17	16
n	110	120	110	115	110	115	100	110	120	115	110	110	100	100	110

25	40	25	29	27	66	45	62	41	39	22	59	23	42	66
78	68	36	23	77	55	39	51	57	62	24	45	36	71	40
64	60	26	56	30	21	28	21	53	60	77	74	31	31	78
28	34	45	68	23	68	31	46	68	66	44	73	39	27	26
77	42	70	35	80	32	51	47	71	79	20	73	35	21	55
48	46	28	63	68	46	49	56	74	50	32	22	60	77	28
44	36	33	38	71	60	47	34	54	37	47	74	33	73	51
40	33	50	59	77	43	57	35	52	29	75	33	58	50	56
37	26	20	36	58	59	43	79	42	57	23	59	79	61	45
41	73	23	53	25	52	46	49	74	23	43	48	69	52	64
62	21	79	44	34	72	21	72	71	65	20	51	21	57	55

14 Практическое занятие № 14. Точечное и интервальное оценивание параметров генеральной совокупности. Интервальные оценки для математического ожидания и дисперсии СВ, имеющей нормальное распределение

Задачи для самостоятельной работы

1 Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 50$ (таблица 14). Найти несмещенную оценку генеральной средней.

Таблица 14

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

2 Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n = 10$ (таблица 15).

Таблица 15

x_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

3 По выборке объема $n = 41$ найдена смещенная оценка $D_B = 3$ генеральной дисперсии. Найти несмещенную оценку генеральной совокупности.

4 Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема $n = 10$ (таблица 16).

Таблица 16

x_i	0,01	0,04	0,08
n_i	5	3	2

5 Даны результаты измерения роста (в сантиметрах) случайно отобранных 100 студентов (таблица 17).

Таблица 17

Рост	154–158	158–162	162–166	166–170	170–174	174–178	178–182
Число студентов	10	14	26	28	12	8	2

Найти выборочную среднюю и выборочную дисперсию роста обследованных студентов.

6 Найти исправленную выборочную дисперсию по данному распределению выборки $n = 10$ (таблица 18).

Таблица 18

x_i	102	104	108
n_i	2	3	5

7 Найти исправленную выборочную дисперсию по данному распределению выборки $n = 100$ (таблица 19).

Таблица 19

x_i	1250	1275	1280	1300
n_i	20	25	50	5

8 Найти исправленную выборочную дисперсию по данному распределению выборки $n = 20$ (таблица 20).

Таблица 20

x_i	0,1	0,5	0,7	0,9
n_i	6	12	1	1

9 Найти исправленную выборочную дисперсию по данному распределению выборки $n = 10$ (таблица 21).

Таблица 21

x_i	23,5	26,1	28,2	30,4
n_i	2	3	4	1

10 Одним и тем же прибором со средним квадратическим отклонением случайных ошибок измерений $\sigma = 40$ м произведено пять равноточных измерений расстояния от орудия до цели. Найти доверительный интервал для оценки истин-

ного расстояния m до цели с надёжностью $\gamma = 0,99$, зная среднее арифметическое результатов измерений $\overline{x}_B = 2000$ м. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально.

11 По данным 16 независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдены $\overline{x}_B = 42,8$ и «исправленное» среднеквадратическое отклонение $S = 8$. Оценить истинное значение измеряемой величины с надёжностью $\gamma = 0,999$.

12 По данным выборки объёма $n = 16$ из генеральной совокупности найдено исправленное среднее квадратическое отклонение $S = 1$ нормально распределённой СВ *X*. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надёжностью $\gamma = 0,95$.

15 Практическое занятие № 15. Типы гипотез. Статистический критерий. Критическая область. Проверка гипотез о числовых значениях математического ожидания, дисперсии в случае нормального распределения

Задачи для самостоятельной работы

1 По результатам девяти замеров установлено, что выборочное среднее время (в секундах) изготовления детали $\overline{x}_B = 48$. Предполагая, что время изготовления – нормально распределенная случайная величина с дисперсией $\sigma^2 = 9$, рассмотреть на уровне значимости 0,05 гипотезу $H_0:\ m = 49$ против альтернативной гипотезы $H_1: m \neq 49$.

2 По техническим условиям средняя прочность троса составляет 2000 кг. В результате испытаний 20 кусков троса было установлено, что средняя прочность на разрыв равна 1955 кг при средней ошибке 25 кг. Удовлетворяет ли образец троса техническим условиям?

3 По утверждению руководства фирмы, средний размер дебиторского счета равен 187,5 тыс. р. Ревизор составляет случайную выборку из 10 счетов и обнаруживает, что средняя арифметическая выборки равна 175 тыс. р. при среднем квадратическом отклонении 35 тыс. р. Может ли оказаться в действительности правильным объявленный размер дебиторского счета? Принять уровень значимости равным 0,05 (дебиторская задолженность – задолженность предприятию, организации или учреждению от юридических или физических лиц, являющихся их должниками, дебиторами).

4 Хронометраж затрат времени на сборку узла машины 25 слесарями показал, что среднее время сборки узла $\overline{x}_B = 16$ мин, а исправленное среднее квадратическое отклонение $s = 4,5$. В предположении о нормальном распределении решить вопрос о том, можно ли на уровне значимости $\alpha = 0,05$ считать 15 мин нормативом.

5 Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объема 21 и по ней найдена исправленная выборочная дисперсия 16,2. Требуется при уровне значимости 0,01 проверить нулевую гипотезу $H_0:\ \sigma^2=\sigma_0^2=15$, приняв в качестве конкурирующей гипотезы $H_1:\ \sigma^2>15$.

6 Новый метод измерения длины деталей был опробован на эталоне, причем дисперсия результатов измерений, определенная по 10 замерам, составила $100\,\text{мкм}^2$. Согласуется ли этот результат с утверждением «дисперсия результатов измерений по предложенному методу не превосходит $50\,\text{мкм}^2$»? Принять $\alpha=0{,}05$.

7 Точность наладки станка-автомата, производящего некоторые детали, характеризуется дисперсией длины деталей. Если эта величина будет больше $400\,\text{мкм}^2$, то станок останавливается для наладки. Выборочная дисперсия длины 15 случайно отобранных деталей из продукции станка оказалась равной $680\,\text{мкм}^2$. Нужно ли производить наладку станка, если уровень значимости $\alpha=0{,}01$?

16 Практическое занятие № 16. Статистическая проверка непараметрических гипотез. Проверка гипотезы о модели закона распределения. Критерий согласия Пирсона

Пример выполнения

Задача. Измерены 100 обработанных деталей; отклонения от заданного размера приведены в таблице 22.

Таблица 22

$[x_i;x_{i+1})$	$[-3;2)$	$[-2,-1)$	$[-1;0)$	$[0;1)$	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;4)$	$[4;5)$
n_i	3	10	15	24	25	13	7	3

Проверить при уровне значимости $\alpha=0{,}01$ гипотезу H_0 о том, что отклонения от проектного размера подчиняются нормальному закону распределения.

Решение

Число наблюдений в крайних интервалах меньше 5, поэтому объединим их с соседними. Получим следующий ряд распределения ($n=100$) (таблица 23).

Таблица 23

$[x_i;x_{i+1})$	$[-3,-1)$	$[-1;0)$	$[0;1)$	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;5)$
n_i	13	15	24	25	13	10

Случайную величину – отклонение – обозначим через X. Для вычисления вероятностей p_i необходимо вычислить параметры, определяющие нормальный закон распределения (a и σ). Их оценки вычислим по выборке:

$$\overline{x} = \frac{1}{100}\cdot\left(-2\cdot 13 + \left(-0,5\right)\cdot 15 + 0,5\cdot 24 + 1,5\cdot 25 + 2,5\cdot 13 + 4\cdot 10\right) = 0,885 \approx 0,9 .$$

$$D_в = \frac{1}{100}\cdot\left(\left(-2\right)^2\cdot 13 + \left(-0,5\right)^2\cdot 15 + 0,5^2\cdot 24 + 1,5^2\cdot 25 + 2,5^2\cdot 13 + 4^2\cdot 10\right) -$$

$$-\ 0,885^2 \approx 2,809.$$

$$\sigma = \sqrt{D_в} = \sqrt{2,809} \approx 1,676 \approx 1,7 .$$

Находим $p_i\left(i=\overline{1,6}\right)$. Так как случайная величина X предположительно распределена по нормальному закону, то $X \sim N(a\,,\,\sigma)$. Так как случайная величина X определена на $\left(-\infty;+\infty\right)$, то крайние интервалы в ряде распределения заменяем соответственно на $\left(-\infty;-1\right)$ и $\left(3;+\infty\right)$.

Тогда:

$$p_1 = p\left\{-\infty \le X \le -1\right\} = \Phi_0\left(\frac{-1-0,9}{1,7}\right) - \Phi_0\left(-\infty\right) =$$

$$= \Phi_0\left(-1,12\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0,5 - 0,3686 = 0,1314;$$

$$p_2 = p\left\{-1 \le X \le 0\right\} = \Phi_0\left(\frac{0-0,9}{1,7}\right) - \Phi_0\left(\frac{-1-0,9}{1,7}\right) =$$

$$= \Phi_0\left(-0,53\right) - \Phi_0\left(-1,12\right) = \Phi_0\left(1,12\right) - \Phi_0\left(0,53\right) = 0,3686 - 0,2019 = 0,1667;$$

$$p_3 = p\left\{0 \le X \le 1\right\} = \Phi_0\left(\frac{1-0,9}{1,7}\right) - \Phi_0\left(\frac{0-0,9}{1,7}\right) =$$

$$= \Phi_0\left(0,06\right) - \Phi_0\left(-0,53\right) = \Phi_0\left(-0,53\right) + \Phi_0\left(0,06\right) = 0,2019 + 0,0239 = 0,2258;$$

$$p_4 = p\left\{1 \le X \le 2\right\} = \Phi_0\left(\frac{2-0,9}{1,7}\right) - \Phi_0\left(\frac{1-0,9}{1,7}\right) =$$

$$= \Phi_0\left(0,65\right) - \Phi_0\left(0,06\right) = 0,2422 - 0,0239 = 0,2183;$$

$$p_5 = p\{2 \le X \le 3\} = \Phi_0\left(\frac{3-0,9}{1,7}\right) - \Phi_0\left(\frac{2-0,9}{1,7}\right) =$$

$$= \Phi_0(1,24) - \Phi_0(0,65) = 0,3925 - 0,2422 = 0,1503;$$

$$p_6 = p\{3 \le X \le \infty\} = \Phi_0(\infty) - \Phi_0\left(\frac{3-0,9}{1,7}\right) = \frac{1}{2} - \Phi_0(1,24) = 0,5 - 0,3925 = 0,1075.$$

Полученные результаты приведем в следующей таблице (таблица 24).

Таблица 24

$[x_i; x_{i+1})$	$(-\infty;-1)$	$[-1;0)$	$[0;1)$	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;+\infty)$
n_i	13	15	24	25	13	10
$n_i' = np_i$	13,14	16,67	22,58	21,83	15,03	10,75

Вычислим:

$$\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{6} \frac{n_i^2}{np_i} - n = \left(\frac{13^2}{13,14} + \frac{15^2}{16,67} + \frac{24^2}{22,58} + \frac{25^2}{21,83} + \frac{13^2}{15,06} + \frac{10^2}{10,75}\right) - 100 =$$

$$= 101,045 - 100 \approx 1,045.$$

Таким образом, $\chi^2_{набл} \approx 1,045$.

Находим число степеней свободы: т. к. по выборке рассчитаны два параметра, значит, $r = 2$. Количество интервалов равно 6, значит, $m = 6$. Следовательно, $k = 6 - 2 - 1 = 3$.

Зная, что $\alpha = 0,01$ (по условию) и $k = 3$, по таблице χ^2-распределения находим $\chi^2_{\alpha;k} = \chi^2_{0,01;3} = 11,3$.

Таким образом, $\chi^2_{набл} = 1,045 < \chi^2_{0,01;3}$, значит, нет оснований отвергать проверяемую гипотезу.

Варианты заданий

Задача. Измерены n обработанных деталей (таблица 25). По данному статистическому материалу требуется:

1) составить интервальный статистический ряд распределения случайной величины X;

2) проверить при уровне значимости $\alpha = 0,01$ гипотезу H_0 о том, что отклонения от проектного размера подчиняются нормальному закону распределения.

Указание: i – порядковый номер элемента в выборке (см. таблицу 25), начиная с которого следует отсчитать n чисел, двигаясь по строкам слева направо, для формирования статистического материала для своего варианта.

Таблица 25

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
i	11	10	15	19	22	30	24	26	28	18	27	23	9	14	7
n	100	120	100	110	110	110	120	110	120	115	120	115	110	115	110

Продолжение таблицы 25

Номер варианта	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
i	2	1	29	4	21	6	13	25	8	20	3	12	5	17	16
n	110	120	110	115	110	115	100	110	120	115	110	110	100	100	110

78	68	36	23	77	55	39	51	57	62	24	45	36	71	40
64	60	26	56	30	21	28	21	53	60	77	74	31	31	78
28	34	45	68	23	68	31	46	68	66	44	73	39	27	26
25	40	25	29	27	66	45	62	41	39	22	59	23	42	66
40	33	50	59	77	43	57	35	52	29	75	33	58	50	56
62	21	79	44	34	72	21	72	71	65	20	51	21	57	55
77	42	70	35	80	32	51	47	71	79	20	73	35	21	55
48	46	28	63	68	46	49	56	74	50	32	22	60	77	28
44	36	33	38	71	60	47	34	54	37	47	74	33	73	51
37	26	20	36	58	59	43	79	42	57	23	59	79	61	45
41	73	23	53	25	52	46	49	74	23	43	48	69	52	64

17 Практическое занятие № 17. Модели и основные понятия корреляционного и регрессионного анализа. Линейная корреляционная зависимость и линии регрессии. Проверка значимости уравнения и коэффициентов уравнения регрессии

Пример выполнения

В таблице 26 приведены результаты наблюдения случайной величины (X,Y). По корреляционной таблице требуется:

1) найти выборочные уравнения регрессии Y на X и X на Y;
2) построить графики прямых линий регрессии Y на X и X на Y.

Таблица 26

Y	X					
	5	9	13	17	21	25
10	4	3	–	–	–	–
13	–	3	12	–	–	–
16	–	–	25	14	5	–
19	–	–	12	10	3	–
21	–	–	–	2	5	2

Уравнение линейной регрессии Y на X имеет вид $Y_X = r_{XY}\dfrac{x-\overline{x}}{\sigma_x}\cdot\sigma_y + \overline{y}$.

Уравнение линейной регрессии X на Y имеет вид $X_Y = r_{XY}\dfrac{y-\overline{y}}{\sigma_y}\cdot\sigma_x + \overline{x}$.

Найдем выборочные средние:

$$\overline{x} = \frac{5\cdot 4 + 9(3+3) + 13(12+25+12) + 17(14+10+2) + 21(5+3+5) + 25\cdot 2}{100} = 14,76;$$

$$\overline{y} = \frac{10(4+3) + 13(3+12) + 16(25+14+5) + 19(12+10+3) + 21(2+5+2)}{100} = 16,33.$$

Найдем выборочные дисперсии:

$$\sigma_x = \frac{5^2\cdot 4 + 9^2(3+3) + 13^2(12+25+12) + 17^2(14+10+2) + 21^2(5+3+5) + 25^2\cdot 2}{100} -$$

$$-14,76^2 = 15,78;$$

$$\sigma_y = \frac{10^2(4+3) + 13^2(3+12) + 16^2(25+14+5) + 19^2(12+10+3) + 21^2(2+5+2)}{100} -$$

$$-16,33^2 = 8,26.$$

Тогда $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x{}^2} = \sqrt{15,78} \approx 3,973$; $\sigma_y = \sqrt{\sigma_y{}^2} = \sqrt{8,26} \approx 2,874$.

Найдем ковариацию:

$$Cov(x;y) = \frac{5\cdot 104 + 9\cdot 10\cdot 3 + 9\cdot 13\cdot 3 + 13\cdot 10\cdot 12 + 13\cdot 16\cdot 25 + 17\cdot 16\cdot 14 + 21\cdot 16\cdot 5}{100} +$$

$$+\frac{13\cdot 19\cdot 12 + 17\cdot 19\cdot 10 + 21\cdot 19\cdot 3 + 17\cdot 21\cdot 2 + 21\cdot 21\cdot 5 + 25\cdot 21\cdot 2}{100} = 7,94.$$

Найдем коэффициент корреляции: $r_{XY} = \dfrac{Cov(x;y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \dfrac{7,94}{3,97 \cdot 2,87} = 0,695.$

Тогда уравнения регрессии имеют вид:

$$Y_X = 0,695 \cdot \frac{x - 14,76}{3,976} \cdot 2,874 + 16,33 = 0,5(x - 14,76) + 16,33 = 0,5x + 8,95;$$

$$X_Y = 0,695 \cdot \frac{y - 16,33}{2,874} \cdot 3,973 + 14,76 = 0,96(y - 16,33) + 14,76 = 0,96y - 0.93.$$

Задачи для самостоятельной работы

В задачах 1–22 приведены результаты наблюдения случайной величины (X,Y). По корреляционной таблице требуется:

1) найти выборочные уравнения регрессии Y на X и X на Y;

2) построить графики прямых линий регрессии Y на X и X на Y.

1

Y	X					
	5	8	11	14	17	20
10	2	2	–	–	–	–
20	–	3	7	–	–	–
30	–	–	5	30	10	–
40	–	–	7	10	8	–
50	–	–	–	5	6	5

2

Y	X					
	10	15	20	25	30	35
7	3	3	–	–	–	–
10	–	4	6			
13			8	28	9	
16			7	10	8	
19				5	6	3

3

Y	X					
	5	10	15	20	25	30
20	1	5	–	–	–	–
23	–	2	8	–	–	–
26	–	–	10	25	10	–
29	–	–	5	12	8	–
32	–	–	–	5	6	3

4

Y	X					
	5	10	15	20	25	30
20	1	5				
25		3	5			
30			10	23	10	
35			5	15	8	
40				6	6	3

5

Y	X					
	5	8	11	14	17	20
20	3	3				
25		5	4			
30			11	21	13	
35			5	15	9	
40				3	5	3

6

Y	X					
	5	8	11	14	17	20
20	7	8				
25		2	5			
30			13	11	13	
35			5	17	8	
40				4	5	2

7

Y	X					
	5	8	11	14	17	20
10	7	8				
15		3	8			
20			11	11	13	
25			7	12	10	
30				4	5	1

8

Y	X					
	6	9	12	15	18	21
10	7	7				
15		3	5			
20			10	11	13	
25			7	12	15	
30				6	3	1

9

Y	X					
	6	9	12	15	18	21
10	2	3				
15		3	6			
20			15	11	5	
25			11	10	15	
30				9	2	8

10

Y	X					
	6	9	12	15	18	21
5	4	3				
10		3	6			
15			10	11	5	
20			11	11	15	
25				9	4	8

11

Y	X					
	6	9	12	15	18	21
5	2	3				
10		3	7			
15			10	11	5	
20			13	11	16	
25				10	4	5

12

Y	X					
	7	10	13	16	19	22
5	1	2				
10		3	7			
15			8	12	5	
20			13	15	16	
25				10	2	6

13

Y	X					
	7	10	13	16	19	22
5	1	2				
10		5	5			
15			8	12	5	
20			13	10	13	
25				11	8	7

14

Y	X					
	7	10	13	16	19	22
6	10	3				
10		5	9			
14			8	12	5	
18			2	5	13	
22				11	8	9

15

Y	X					
	7	10	13	16	19	22
6	11	5				
10		5	9			
14			7	10	5	
18			4	10	12	
22				5	8	9

16

Y	X					
	10	15	20	25	30	35
6	5	6				
10		5	9			
14			5	10	5	
18			10	10	8	
22				8	10	9

Таблица 27 – Таблица значений функции Гаусса $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	Сотые доли x									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3698
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0395	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0353	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001

Таблица 28 – Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,37	0,1443	0,74	0,2703	1,11	0,3665	1,48	0,4306	1,85	0,4678	2,44	0,4927
0,01	0,0040	0,38	0,1480	0,75	0,2734	1,12	0,3686	1,49	0,4319	1,86	0,4686	2,46	0,4931
0,02	0,0080	0,39	0,1517	0,76	0,2764	1,13	0,3708	1,50	0,4332	1,87	0,4693	2,48	0,4934
0,03	0,0120	0,40	0,1554	0,77	0,2794	1,14	0,3729	1,51	0,4345	1,88	0,4699	2,50	0,4938
0,04	0,0160	0,41	0,1591	0,78	0,2823	1,15	0,3749	1,52	0,4357	1,89	0,4706	2,52	0,4941
0,05	0,0199	0,42	0,1628	0,79	0,2852	1,16	0,3770	1,53	0,4370	1,90	0,4713	2,54	0,4945
0,06	0,0239	0,43	0,1664	0,80	0,2881	1,17	0,3790	1,54	0,4382	1,91	0,4719	2,56	0,4948
0,07	0,0279	0,44	0,1700	0,81	0,2910	1,18	0,3810	1,55	0,4394	1,92	0,4726	2,58	0,4951
0,08	0,0319	0,45	0,1736	0,82	0,2939	1,19	0,3830	1,56	0,4406	1,93	0,4732	2,60	0,4953
0,09	0,0359	0,46	0,1772	0,83	0,2967	1,20	0,3849	1,57	0,4418	1,94	0,4738	2,62	0,4956
0,10	0,0398	0,47	0,1808	0,84	0,2995	1,21	0,3869	1,58	0,4429	1,95	0,4744	2,64	0,4959
0,11	0,0438	0,48	0,1844	0,85	0,3023	1,22	0,3883	1,59	0,4441	1,96	0,4750	2,66	0,4961
0,12	0,0478	0,49	0,1879	0,86	0,3051	1,23	0,3907	1,60	0,4452	1,97	0,4756	2,68	0,4963
0,13	0,0517	0,50	0,1915	0,87	0,3078	1,24	0,3925	1,61	0,4463	1,98	0,4761	2,70	0,4965
0,14	0,0557	0,51	0,1950	0,88	0,3106	1,25	0,3944	1,62	0,4474	1,99	0,4767	2,72	0,4967
0,15	0,0596	0,52	0,1985	0,89	0,3133	1,26	0,3962	1,63	0,4484	2,00	0,4772	2,74	0,4969
0,16	0,0636	0,53	0,2019	0,90	0,3159	1,27	0,3980	1,64	0,4495	2,02	0,4783	2,76	0,4971
0,17	0,0675	0,54	0,2054	0,91	0,3186	1,28	0,3997	1,65	0,4505	2,04	0,4793	2,78	0,4973
0,18	0,0714	0,55	0,2088	0,92	0,3212	1,29	0,4015	1,66	0,4515	2,06	0,4803	2,80	0,4974
0,19	0,0763	0,56	0,2123	0,93	0,3238	1,30	0,4032	1,67	0,4525	2,08	0,4812	2,82	0,4976
0,20	0,0793	0,57	0,2157	0,94	0,3264	1,31	0,4049	1,68	0,4535	2,10	0,4821	2,84	0,4977
0,21	0,0832	0,58	0,2190	0,95	0,3289	1,32	0,4066	1,69	0,4545	2,12	0,4830	2,86	0,4979
0,22	0,0871	0,59	0,2224	0,96	0,3315	1,33	0,4082	1,70	0,4554	2,14	0,4838	2,88	0,4980
0,23	0,0910	0,60	0,2257	0,97	0,3340	1,34	0,4099	1,71	0,4564	2,16	0,4846	2,90	0,4981
0,24	0,0948	0,61	0,2291	0,98	0,3365	1,35	0,4115	1,72	0,4573	2,18	0,4854	2,92	0,4982
0,25	0,0987	0,62	0,2324	0,99	0,3389	1,36	0,4131	1,73	0,4582	2,20	0,4861	2,94	0,4984
0,26	0,1026	0,63	0,2357	1,00	0,3413	1,37	0,4147	1,74	0,4591	2,22	0,4868	2,96	0,4985
0,27	0,1064	0,64	0,2389	1,01	0,3438	1,38	0,4162	1,75	0,4599	2,24	0,4875	2,98	0,4986
0,28	0,1103	0,65	0,2422	1,02	0,3461	1,39	0,4177	1,76	0,4608	2,26	0,4881	3,00	0,49865
0,29	0,1141	0,66	0,2454	1,03	0,3485	1,40	0,4192	1,77	0,4616	2,28	0,4887	3,20	0,49931
0,30	0,1179	0,67	0,2486	1,04	0,3508	1,41	0,4207	1,78	0,4625	2,30	0,4893	3,40	0,49966
0,31	0,1217	0,68	0,2517	1,05	0,3531	1,42	0,4222	1,79	0,4633	2,32	0,4898	3,60	0,499841
0,32	0,1255	0,69	0,2549	1,06	0,3554	1,43	0,4236	1,80	0,4641	2,34	0,4904	3,80	0,499928
0,33	0,1293	0,70	0,2580	1,07	0,3577	1,44	0,4251	1,81	0,4649	2,36	0,4909	4,00	0,499963
0,34	0,1331	0,71	0,2611	1,08	0,3599	1,45	0,4265	1,82	0,4656	2,38	0,4913	4,50	0,499997
0,35	0,1368	0,72	0,2642	1,09	0,3621	1,46	0,4279	1,83	0,4664	2,40	0,4918	5,00	0,499997
0,36	0,1406	0,73	0,2673	1,10	0,3643	1,47	0,4292	1,84	0,4671	2,42	0,4922		

Таблица 29 – Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	оо	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблица 30 – Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Таблица 31 – Критические точки распределения Колмогорова

Уровень значимости α	0,20	0,15	0,10	0,05	0,025	0,02	0,01	0,001
λ_α	1,073	1,1379	1,224	1,358	1,4802	1,520	1,627	1,950

Таблица 32 – Критические точки распределения Стьюдента (односторонняя критическая область)

Число степеней свободы k	Уровень значимости α									
	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,309	636,619
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327	31,599
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,215	12,924
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,768
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,255	0,528	0,849	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
70	0,254	0,527	0,847	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211	3,435
80	0,254	0,526	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,416
100	0,254	0,526	0,845	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174	3,390
200	0,254	0,525	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,340
500	0,253	0,525	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107	3,310
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Таблица 32 – Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α										
	0,01	0,025	0,05	0,1	0,25	0,5	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
1	6,6	5,0	3,8	2,7	1,3	0,5	0,02	0,004	0,00098	0,00016	0,00004
2	9,2	7,4	6,0	4,6	2,8	1,4	0,21	0,103	0,051	0,020	0,010
3	11,3	9,3	7,8	6,3	4,1	2,4	0,58	0,352	0,216	0,115	0,072
4	13,3	11,1	9,5	7,8	5,4	3,4	1,06	0,711	0,484	0,297	0,207
5	15,1	12,8	11,1	9,2	6,6	4,4	1,61	1,145	0,831	0,554	0,412
6	16,8	14,4	12,6	10,6	7,8	5,3	2,20	1,64	1,24	0,87	0,68
7	18,5	16,0	14,1	12,0	9,0	6,3	2,83	2,17	1,69	1,24	0,99
8	20,1	17,5	15,5	13,4	10,2	7,3	3,49	2,73	2,18	1,65	1,34
9	21,7	19,0	16,9	14,7	11,4	8,3	4,17	3,33	2,70	2,09	1,73
10	23,2	20,5	18,3	16,0	12,5	9,3	4,87	3,94	3,25	2,56	2,16
11	24,7	21,9	19,7	17,3	13,7	10,3	5,58	4,57	3,82	3,05	2,60
12	26,2	23,3	21,0	18,5	14,8	11,3	6,30	5,23	4,40	3,57	3,07
13	27,7	24,7	22,4	19,8	16,0	12,3	7,04	5,89	5,01	4,11	3,57
14	29,1	26,1	23,7	21,1	17,1	13,3	7,79	6,57	5,63	4,66	4,07
15	30,6	27,5	25,0	22,3	18,2	14,3	8,55	7,26	6,26	5,23	4,60
16	32,0	28,8	26,3	23,5	19,4	15,3	9,31	7,96	6,91	5,81	5,14
17	33,4	30,2	27,6	24,8	20,5	16,3	10,09	8,67	7,56	6,41	5,70
18	34,8	31,5	28,9	26,0	21,6	17,3	10,86	9,39	8,23	7,01	6,26
19	36,2	32,9	30,1	27,2	22,7	18,3	11,65	10,12	8,91	7,63	6,84
20	37,6	34,2	31,4	28,4	23,8	19,3	12,44	10,85	9,59	8,26	7,43
21	38,9	35,5	32,7	29,6	24,9	20,3	13,24	11,59	10,28	8,90	8,03
22	40,3	36,8	33,9	30,8	26,0	21,3	14,04	12,34	10,98	9,54	8,64
23	41,6	38,1	35,2	32,0	27,1	22,3	14,85	13,09	11,69	10,20	9,26
24	43,0	39,4	36,4	33,2	28,2	23,3	15,66	13,85	12,40	10,86	9,89
25	44,3	40,6	37,7	34,4	29,3	24,3	16,47	14,61	13,12	11,52	10,52
26	45,6	41,9	38,9	35,6	30,4	25,3	17,29	15,38	13,84	12,20	11,16
27	47,0	43,2	40,1	36,7	31,5	26,3	18,11	16,15	14,57	12,88	11,81
28	48,3	44,5	41,3	37,9	32,6	27,3	18,94	16,93	15,31	13,56	12,46
29	49,6	45,7	42,6	39,1	33,7	28,3	19,77	17,71	16,05	14,26	13,12
30	50,9	47,0	43,8	40,3	34,8	29,3	20,60	18,49	16,79	14,95	13,79
40	63,7	59,3	55,8	51,8	45,6	39,3	29,05	26,51	24,43	22,16	20,71
50	76,2	71,4	67,5	63,2	56,3	49,3	37,69	34,76	32,36	29,71	27,99
60	88,4	83,3	79,1	74,4	67,0	59,3	46,46	43,19	40,48	37,48	35,53
70	100,4	95,0	90,5	85,5	77,6	69,3	55,33	51,74	48,76	45,44	43,28
80	112,3	106,6	101,9	96,6	88,1	79,3	64,28	60,39	57,15	53,54	51,17
90	124,1	118,1	113,1	107,6	98,6	89,3	73,29	69,13	65,65	61,75	59,20
100	135,8	129,6	124,3	118,5	109,1	99,3	82,36	77,93	74,22	70,06	67,33

Список литературы

1 **Щипачев, В. С.** Высшая математика : учебник / В. С. Щипачев. – Москва : ИНФРА-М, 2018. – 479 с.

2 **Маталыцкий, М. А.** Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов / М. А. Маталыцкий, Г. А. Хацкевич. – Минск : Вышэйшая школа, 2017. – 591 с.

3 **Виленкин, И. В.** Высшая математика для студентов экономических, технических, естественно-научных специальностей вузов: учебное пособие / И. В. Виленкин, В. М. Гробер. – 3-е изд., испр. – Ростов-на-Дону : Феникс, 2005. – 414 с.

4 **Клюшин, В. Л.** Высшая математика для экономистов : учебник для бакалавров / В. Л. Клюшин. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Юрайт, 2013. – 447 с.

5 **Клюшин, В. Л.** Высшая математика для экономистов: задачи, тесты, упражнения : учебное пособие для бакалавров / В. Л. Клюшин. – 5-е изд., перераб. и доп. – Москва : Юрайт, 2013. – 165 с.

6 **Рябушко, А. П.** Индивидуальные задания по высшей математике : учебное пособие для вузов: в 4 ч. Ч. 4 : Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика / А. П. Рябушко. – 3-е изд. – Минск : Вышэйшая школа, 2010. – 336 с.

7 **Горелова, Г. В.** Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах с применением Excel: учебное пособие / Г. В. Горелова, И. А. Кацко. – 4-е изд. – Ростов-на-Дону : Феникс, 2006. – 475 с.