

УДК 629.3: 631.3: 621.817

В. П. Тарасик, д-р техн. наук, профессор, Белорусско-Российский университет, г. Могилев, Беларусь

E-mail: avtomobili@bru.by

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЖЕСТКОСТИ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ ТРАНСМИССИЙ МОБИЛЬНЫХ МАШИН

Предложена методика определения упругих свойств зубчатых передач. Получены формулы для оценки изгибной и контактной деформаций зубьев и вычисления их коэффициентов жесткости. Приведены графики, отображающие зависимости коэффициентов жесткости от модуля зубчатого зацепления и нагрузки. Использование методики позволяет повысить полноту описания физических свойств трансмиссий при математическом моделировании процессов функционирования машин.

Ключевые слова: автомобиль, трактор, трансмиссия, зубчатая передача, зубчатое зацепление, шестерня, колесо, модуль, делительная окружность, основная окружность, эвольвента, толщина зуба, изгибная деформация, контактная деформация, коэффициент изгибной жесткости, коэффициент контактной жесткости, удельная нормальная жесткость зубьев.

The proposed method of determining the gears elastic properties. The obtained formulas for estimating flexural and contact deformation of the teeth and the calculation of stiffness coefficients. Is a graph showing the dependence of the stiffness coefficients of the module toothing and load. Using the method allows to increase the completeness of the physical properties description of transmission in the mathematical modeling of machines functioning processes.

Keywords: automobile, tractor, transmission, gear, gearing, gears, wheels, module, pitch circle, the base circle, involute, tooth thickness, flexural deformation, contact deformation, coefficient of flexural stiffness, contact stiffness coefficient, the normal specific stiffness of tooth.

Введение

На большинстве мобильных транспортных и технологических машин (автомобилей, тракторов, строительно-дорожных и подъемно-транспортных машин) используются механические трансмиссии, несмотря на их известные недостатки. Обусловлено это их относительной простотой и невысокой стоимостью.

При моделировании процессов функционирования машин с механическими трансмиссиями в абсолютном большинстве опубликованных работ не учитываются упругие свойства зубчатых колес. Так, например, в работах [1–3] зубчатые передачи (вальные и планетарные) рассматриваются как совокупность абсолютно жестких твердых тел с учетом лишь их инерционных параметров. Это обусловлено значительными трудностями математического описания упругих деформаций зубьев. Однако неучет деформации зубчатых зацеплений снижает уверенность в адекватности описания физических свойств моделируемых объектов. Особенно это характерно для случаев построения локальных математических

моделей, когда рассматривается лишь часть системы привода, например, межколесный дифференциал автомобиля или трактора, колесная планетарная передача, электромотор—колесо мобильной машины, мотор—редуктор с планетарной передачей и др. В этих случаях упругие свойства зубчатых зацеплений могут быть вполне сопоставимыми со свойствами приводных валов. Поэтому очень важно иметь возможность более полного учета физических свойств таких приводов. При исследовании высокочастотных вибраций редукторов также необходимо учитывать упругие свойства зубчатого зацепления.

В [4] показано, что суммарное перемещение контактирующих деталей объекта относительно друг друга вследствие их деформации под воздействием нагрузки можно разделить на три составляющих, обусловленных видами деформаций: изгибное перемещение, контактное перемещение и внутриконтантное перемещение. Последнее отражает перемещение материала на поверхности контактного слоя. Предлагаемые формулы для определения выделенных видов перемещений приведены в [4, 5]. По мнению

автора этих публикаций, внутриконтактное перемещение незначительно и им можно пренебречь, а изгибные и контактные деформации независимы друг от друга (принцип суперпозиции). Определение этих деформаций для зубчатых колес редуктора при заданном воздействии позволяет определить их коэффициенты жесткости.

Возможность оценки контактных перемещений предусмотрена в стандартах на зубчатые передачи ISO 6336 и ГОСТ 21354—87 [6, 7]. При этом определяется удельная нормальная жесткость зуба шестерни при контакте его вершины с зубом колеса. Одновременно вычисляется удельная нормальная жесткость зуба колеса. Единицей измерения удельной нормальной жесткости зуба принимается $\text{H}/(\text{мм} \cdot \text{мкм})$. Следовательно, ее значение отнесено к ширине зуба, равной 1 мкм. Эта же единица использована в [4, 5].

В [5] приведены результаты расчетов, выполненных по методике автора этой работы и по методикам упомянутых стандартов. Оказалось, что они различаются до 25 %, а отличие результатов вычислений по ISO 6336 и ГОСТ 21354—87 достигает 32 %. На основе выполненных исследований делается вывод, что изгибная и контактная жесткости зубьев не зависят от модуля зацепления. Аналогично в методиках упомянутых стандартов также не учитывается модуль. Но модуль зубчатого зацепления определяет геометрические размеры зубьев — их высоту и толщину, а также кривизну образующей поверхности зуба. Поэтому получаемые по данным методикам результаты вызывают серьезные сомнения.

Цель исследования

Разработка методики определения изгибных и контактных деформаций зубьев зубчатой передачи на основе законов физики с целью получения информации о значении коэффициента жесткости зубчатого зацепления и использования ее при построении математической модели процесса функционирования объекта исследования или проектирования.

Методика исследования

Для определения изгибной деформации зубьев воспользуемся методами сопротивления материалов [8]. Представим зуб в виде балки переменного сечения с защемленным концом, принадлежащим основанию ножки зуба. Второй конец балки, соответствующий вершине головки зуба, свободный. При этом необходимо построить подходящую гео-

метрическую модель балки переменного сечения и обосновать условия ее нагружения, позволяющие с достаточной точностью отобразить упругие свойства зубчатой передачи.

Рассмотрим вначале основные геометрические характеристики зубчатого зацепления. На рис. 1, а, представлена схема цилиндрической прямозубой зубчатой передачи эвольвентного зацепления. Находящиеся в зацеплении и передающие нагрузку зубья шестерни и колеса выделены жирными линиями. Показано положение зубчатых колес, в котором линия контакта их зубьев находится в полюсе зацепления P . Отображены также основные параметры зубчатого зацепления: межосевое расстояние $a_w = O_1O_2$, линия зацепления AB , угол зацепления α_w (согласно ГОСТ 16530—83 $\alpha_w = 20^\circ$), радиусы делительных окружностей соответственно шестерни r_{d1} и колеса r_{d2} , радиусы основных окружностей r_{b1} и r_{b2} , радиусы вершин r_{a1} , r_{a2} и впадин r_{f1} , r_{f2} зубьев.

Контактные поверхности зубьев имеют криволинейную форму, выполненную по эвольвенте, что обуславливает изменение их толщины по высоте зуба. Контакт зубьев осуществляется по линии вдоль ширины b_w зубчатого венца, которая вследствие контактной деформации превращается в пятно контакта некоторой ширины. Пятно контакта при повороте зубчатых колес перемещается вдоль эвольвентной поверхности из точки C_1 (рис. 1, б), находящейся вблизи вершины головки зуба колеса, в точку C_2 (рис. 1, в), смещаемую к ножке зуба, проходя при этом через точку P полюса зацепления (см. рис. 1, а). У шестерни наоборот пятно контакта перемещается от ножки к вершине зуба. Эта смена происходит на каждой новой паре зубьев, вступающих в зацепление и сменяющей друг друга многократно за полный оборот шестерни или колеса. В результате деформация зубьев непрерывно циклически изменяется. Очевидно, что учет явления высокочастотной циклической смены положения пятна контакта на рабочих поверхностях зубьев для практических инженерных расчетов сложен и непродуктивен. Целесообразно принять некоторое постоянное его положение относительно основных или делительных окружностей шестерни и колеса, приближенно отображающих характер напряженного состояния зубьев.

По аналогии с упомянутыми выше методиками окружную силу F , соответствующую действующему на зубчатую передачу вращающему моменту M , приложим к вершине зуба колеса, а для шестерни приложим ее на делительной окружности и определим прогибы зубьев обоих колес под действием изгиба-

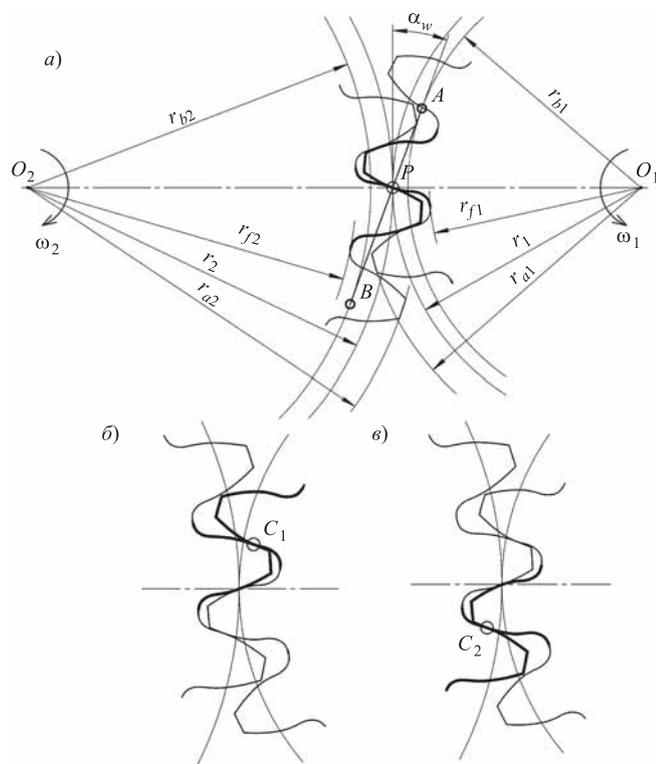


Рис. 1. Схема цилиндрической зубчатой передачи:
a — пятно контакта в полюсе зацепления; *б* — при входе пары зубьев в зацепление; *в* — при выходе из зацепления

ющих моментов этих сил. Принятые допущения позволяют существенно упростить построение модели замещения зуба балкой переменного сечения.

Для определения геометрических параметров балки переменного сечения необходимо определить толщину зуба на различных радиусах. Толщина зуба s_x на любой окружности радиуса r_x вычисляется по формуле [9]

$$s_x = 2r_x \left(\frac{\pi}{2z} + 2x \operatorname{tg} \alpha_w + \operatorname{inv} \alpha_w - \operatorname{inv} \alpha_x \right), \quad (1)$$

где z — количество зубьев; x — коэффициент смещения исходного контура; α_x — угол в радианах, определяемый из выражения

$$\alpha_x = \arccos \left(\frac{r_d \cos \alpha_w}{r_x} \right) = \arccos (r_b / r_x). \quad (2)$$

Эвольвентная функция $\operatorname{inv} \alpha_w = 0,0149$ при $\alpha_w = 20^\circ$, а $\operatorname{inv} \alpha_x$ находится из выражения

$$\operatorname{inv} \alpha_x = \operatorname{tg} \alpha_x - \alpha_x. \quad (3)$$

Подставляя в приведенные формулы значения радиусов зубчатого колеса r_a , r_d и r_b , найдем искомые значения толщин зуба на радиусе вершин s_a , на делительной окружности s_d и на основной окружности s_b .

На рис. 2, *a*, обозначены размеры толщин зуба s_a , s_d и s_b на уровнях соответствующих окружностей зубчатого колеса. Используя эти размеры, можно осуществить аппроксимацию линии контура торцевой поверхности зуба. В первом приближении представим контур боковой поверхности зуба в виде равнобоковой трапеции $ABCD$. Боковые стороны трапеции проведем через точки B и N , C и L , положения которых определяются соответственно толщиной вершины зуба s_a и толщиной зуба на основной окружности s_b . Аппроксимированный контур зуба представлен на рис. 2, *б*, а на рис. 3 показано пространственное изображение зуба как балки переменного сечения.

Аппроксимация геометрии зуба определяет погрешность момента инерции сечения зуба, для которого вычисляется прогиб. Расчеты показывают, что при числе зубьев $z > 15$ погрешность отображения реальной толщины зуба на делительной окружности r_d не превышает 15 % и с увеличением числа зубьев снижается. В других сечениях зуба погрешность существенно меньше, так как реальный его контур приближается к принятому трапецеидальному, а на основной окружности и на окружности вершин зубьев они совпадают.

Для пространственной модели зуба выберем систему координат $Oxyz$. Ось Ox направим вдоль оси симметрии балки от свободного ее конца к зашпеленному, ось Oy — в сторону изгиба нейтрального слоя балки, расположенного в исходном состоянии без нагрузки в плоскости xOZ . Прогиб свободного конца балки под действием силы F происходит в положительном направлении оси Oy , а вогнутость нейтрального слоя балки направлена в сторону оси Oy , поэтому момент силы F относительно произвольного поперечного сечения балки считается положительным [8].

Используем известное уравнение изогнутой оси балки, устанавливающее зависимость между

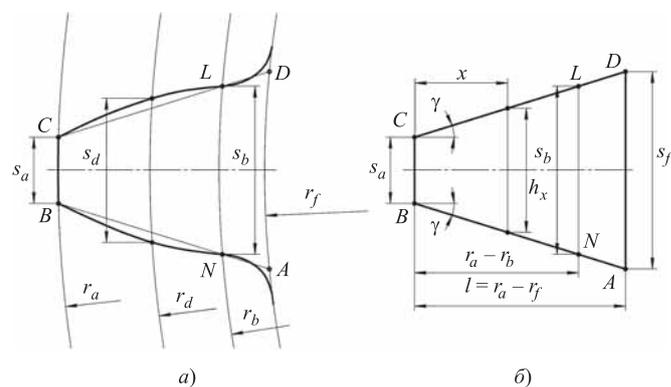


Рис. 2. Схема аппроксимации контура зуба равнобоковой трапецией

радиусом кривизны оси Ox и координатами ее точек x и y [8]:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \pm \frac{d^2y/dx^2}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}},$$

где $\rho(x)$ — радиус кривизны участка изогнутой оси балки между двумя близко расположенными смежными сечениями, находящимися на расстоянии x от начала координат.

При выбранных направлениях осей координат в этой формуле будет знак "плюс". Сечение балки x отображено на рис. 3 штриховкой.

С другой стороны $\rho(x)$ зависит от изгибающего момента $M(x)$ силы F в сечении x балки и ее жесткости, определяемой произведением момента инерции площади сечения $J(x)$ на модуль упругости материала балки E :

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{EJ(x)}.$$

В результате получаем дифференциальное уравнение изогнутой оси балки в виде

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x) \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}}{EJ(x)}.$$

Производная dy/dx представляет собой угол поворота θ поперечного сечения балки, расположенного

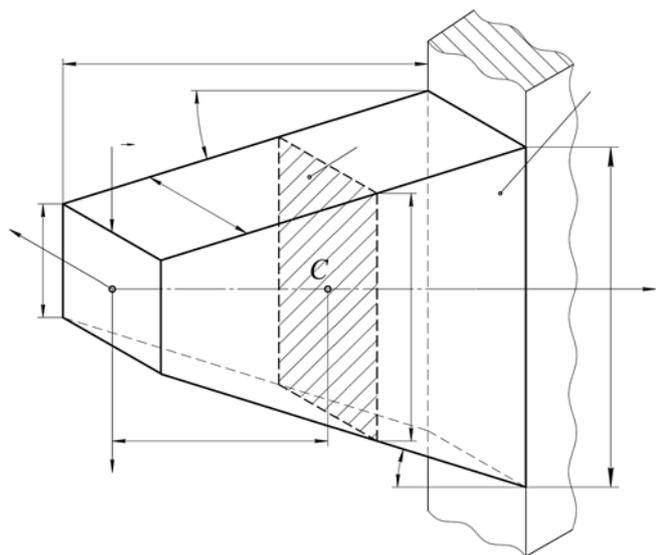


Рис. 3. Пространственная модель зуба зубчатой передачи

на расстоянии x от свободного конца. Так как значение угла θ у рассматриваемой балки, являющейся моделью зуба шестерни, незначительно вследствие ее высокой жесткости, то выражение под корнем в приведенном уравнении практически равно единице. Тогда дифференциальное уравнение изогнутой оси балки существенно упрощается:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ(x)}. \quad (4)$$

Как известно [8], момент инерции поперечного сечения балки $J(x)$, находящегося на расстоянии x от начала координат, пропорционален ширине балки b и кубу высоты балки h_x^3 в сечении x :

$$J(x) = \frac{bh_x^3}{12}. \quad (5)$$

Выразим h_x через геометрические параметры боковой поверхности балки (см. рис. 2, б, и рис. 3):

$$h_x = s_{CB} + 2x \operatorname{tg} \gamma,$$

где s_{CB} — длина меньшего основания равнобокой трапеции, отображающей контуры боковой поверхности балки; γ — угол наклона боковин трапеции, отображающей боковую поверхность балки.

Значение γ вычисляется из выражения

$$\gamma = \operatorname{arctg} \left(\frac{s_b - s_a}{2(r_a - r_b)} \right).$$

Примем ширину балки b равной рабочей ширине венца зубчатого колеса b_w и подставим значение h_x в формулу (5):

$$J(x) = \frac{b_w}{12} (s_{CB} + 2x \operatorname{tg} \gamma)^3. \quad (6)$$

При моделировании зуба колеса значение s_{CB} примем равным толщине вершины головки зуба s_a , а для зуба шестерни — равным толщине зуба на делительной окружности s_d .

Используя выражение (6) и учитывая, что момент силы F относительно поперечного сечения балки x соответствует величине $M(x) = Fx$, дифференциальное уравнение изогнутой оси балки приобретает вид:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{12Fx}{Eb_w (s_{CB} + 2x \operatorname{tg} \gamma)^3}.$$

Введем обозначения:

$$A = \frac{12F}{b_w E}; \quad a = 2 \operatorname{tg} \gamma; \quad b = s_{cb}.$$

Запишем дифференциальное уравнение изогнутой оси балки с учетом этих обозначений:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{Ax}{(ax + b)^3}. \quad (7)$$

Решение уравнения (7) позволяет получить выражения для определения угла поворота θ сечения балки x и прогиба балки y в этом сечении.

Угол поворота θ сечения балки x :

$$\theta = \frac{dy}{dx} = A \int \frac{xdx}{(ax + b)^3}.$$

В результате интегрирования находим решение

$$\theta = A \left[\frac{1}{a^2} \left(\frac{b}{2(ax + b)^2} - \frac{1}{ax + b} \right) + C \right], \quad (8)$$

где C — постоянная интегрирования.

Прогиб балки y в сечении x находится из интегрального выражения:

$$y = A \int \left[\frac{1}{a^2} \left(\frac{b}{2(ax + b)^2} - \frac{1}{ax + b} \right) + C \right] dx.$$

После интегрирования получаем искомую формулу для определения прогиба балки:

$$y = A \left\{ -\frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{a} \ln(ax + b) + \frac{b}{2a(ax + b)} \right] + Cx + D \right\}, \quad (9)$$

где D — постоянная интегрирования.

Найдем постоянные интегрирования C и D . Для этого используем сечение балки, в котором известны значения угла его поворота θ и прогиба y . Очевидно, что для сечения балки, совпадающего с плоскостью ее заделки II , прогиб и угол поворота равны нулю, т. е. $y = 0$ и $\theta = 0$. В этом сечении $x = l$ (см. рис. 3). Так как $A \neq 0$, то равно нулю выражение в квадратных скобках уравнения (5). В результате получаем:

$$C = \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{al + b} - \frac{b}{2(al + b)^2} \right]. \quad (10)$$

Подставив значение C в уравнение (9), находим:

$$D = \frac{1}{a^2} \left[\frac{1}{a} \ln(al + b) + \frac{b}{2a(al + b)} \right] - Cl. \quad (11)$$

Полученная формула (9) позволяет определить прогиб балки у переменного сечения, у которой высота h_x изменяется при перемещении от свободного конца к заделке в соответствии с наклоном боковых сторон равнобокой трапеции, а ширина b постоянная и равна ширине зубчатого венца b_w (см. рис. 3). Геометрическая форма такой балки предлагается в качестве физической модели зуба зубчатой передачи для определения параметров ее жесткости при моделировании процессов функционирования передачи в составе исследуемого технического объекта. Прогиб можно определить для любого поперечного сечения этой балки, отстоящего от свободного конца на расстоянии x .

Для получения значения коэффициента изгибной жесткости зубчатого зацепления необходимо определить изгибные деформации обоих зубчатых колес на одном и том же диаметре. В качестве такого диаметра примем диаметр делительной окружности. Тогда при вычислении прогиба зуба шестерни в формулах (9) — (11) необходимо принять $x = 0$; $b = s_d$; $l = 1,25m$, а для зуба колеса $x = m$; $b = s_a$; $l = 2,25m$.

Полученные формулы позволяют также найти значение максимального прогиба зуба колеса на радиусе вершин r_a , что соответствует $x = 0$. В этом случае после соответствующих преобразований получаем следующую формулу:

$$y = A \left\{ \frac{1}{a^3} \left[\ln \left(\frac{al}{b} + 1 \right) - \frac{al}{2(al + b)} \right] - Cl \right\}. \quad (12)$$

Подставляя в формулы (9) — (12) все входящие в них параметры в единицах системы СИ, получим искомый результат величины прогиба y в метрах. Полученные значения прогиба позволяют определить коэффициент изгибной жесткости $c_{и}$ зубчатой передачи. Его значение определяется углом поворота шестерни относительно колеса $\varphi_{и}$, обусловленным суммарной изгибной деформацией зубьев обоих колес $\Sigma y = y_1 + y_2$ под действием передаваемого вращающего момента. Значение $\varphi_{и}$ вычисляется по формуле:

$$\varphi_{и} = \operatorname{arctg}(\Sigma y / r_{d1}), \quad (13)$$

где r_{d1} — радиус делительной окружности шестерни (ведущего колеса зубчатой передачи).

Коэффициент изгибной жесткости находится из соотношения:

$$c_{и} = M_1 / \varphi_{и}, \quad (14)$$

где M_1 — вращающий момент на ведущем колесе.

Значение силы F , используемое при определении прогибов y_1 и y_2 , определяется на основе момента M_1 :

$$F = M_1/r_{d1}.$$

Углы поворота сечений рассматриваемой балки переменного сечения, как отмечалось ранее, незначительны и обычно не представляют интереса, но при желании могут быть вычислены по формуле (8). При $x = 0$ эта формула преобразуется к виду:

$$\theta = -\frac{Al^2}{2b(al + b)^2}. \quad (15)$$

Кроме изгибной деформации при передаче на грузки зубья получают контактную деформацию y_H , которую также необходимо учитывать при определении коэффициента жесткости зубчатой передачи.

Решение проблемы оценки контактной деформации зубьев базируется на использовании известной формулы Г. Герца для определения контактных напряжений σ_H . На ее основе, принимая эллиптический закон распределения нагрузки в пятне контакта и применив теорию потенциала, проф. Н. М. Беляев получил формулу для вычисления контактной деформации цилиндров [10]:

$$y_H = \frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \left[\frac{1}{2} - \ln\left(\frac{b}{2}\right) \right],$$

где q — погонная нагрузка по длине цилиндров; ν — коэффициент Пуассона ($\nu = 0,25\dots 0,35$); E — модуль упругости материала цилиндров; b — полуширина площадки контакта по Герцу:

$$b = 1,52 \sqrt{\frac{R_1 R_2}{E(R_1 + R_2)}};$$

R_1, R_2 — радиусы цилиндров.

Но в формуле Н. М. Беляева под знаком функции натурального логарифма используется размерная величина, что противоречит требованиям корректности составления математического выражения этой функции (упомянутая величина должна быть безразмерной). Это отмечают многие исследователи проблемы контактной деформации, в том числе автор докторской диссертации [11], предложивший новое ее решение. В результате выполненных теоретических и экспериментальных исследований им разработаны новые формулы для оценки контактных деформаций тел различной геометрической формы, в том числе для цилиндрических зубчатых передач и роликовых подшипников.

Предложенная им формула для определения контактных деформаций зубьев цилиндрической зубчатой передачи имеет вид:

$$y_H = \frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \ln \left[2,124 \sqrt{\frac{EC_1 C_2 (R_1 + R_2)}{qR_1 R_2}} \right].$$

Используя принятые в теории зубчатых передач обозначения параметров, представим эту формулу в следующем виде:

$$y_H = \frac{4(1-\nu^2)q}{\pi E} \ln \left[2,124 \sqrt{\frac{Es_{x1}s_{x2}(\rho_{x1} + \rho_{x2})}{q\rho_{x1}\rho_{x2}}} \right], \quad (16)$$

где y_H — величина контактной деформации зубьев цилиндрической зубчатой передачи; q — погонная нагрузка по ширине зубчатого венца: $q = F/b_w$; F — окружное усилие на зубьях; b_w — длина площадки контакта зубьев; s_{x1} и s_{x2} — толщины зубьев шестерни и колеса на окружностях радиусами соответственно r_{x1} и r_{x2} ; ρ_{x1} и ρ_{x2} — радиусы кривизны эвольвентных поверхностей зубьев шестерни и колеса на радиусах r_{x1} и r_{x2} .

Радиус кривизны эвольвенты ρ_x на заданном радиусе окружности r_x вычисляется по формуле [9]

$$\rho_x = r_b \operatorname{tg} \alpha_x, \quad (17)$$

где α_x — угол, характеризующий положение точки контакта зуба на заданном радиусе окружности r_x , значение которого находится из выражения (2).

Для однозначной оценки контактной жесткости зубчатой передачи значение y_H целесообразно определять на радиусах делительных окружностей обоих зубчатых колес, т. е. принять $r_{x1} = r_{d1}$ и $r_{x2} = r_{d2}$.

Вычисленная по формуле (16) величина контактной деформации зубьев позволяет определить коэффициент контактной жесткости c_H зубчатой передачи. Его значение определяется углом поворота шестерни относительно колеса φ_H , обусловленным контактной деформацией зубьев обоих колес y_H под действием передаваемого вращающего момента M_1 на ведущем колесе. Значение φ_H вычисляется по формуле:

$$\varphi_H = \arctg(y_H/r_{d1}), \quad (18)$$

где r_{d1} — радиус делительной окружности шестерни (ведущего колеса зубчатой передачи).

Коэффициент контактной жесткости находится из соотношения:

$$c_H = M_1/\varphi_H. \quad (19)$$

Так как угловые координаты относительных поворотов пары взаимодействующих зубчатых колес $\varphi_{и}$ и φ_{H} складываются, то коэффициент жесткости зубчатого зацепления c определяется по формуле:

$$c = \frac{c_{и}c_{H}}{c_{и} + c_{H}}. \quad (20)$$

Таким образом, коэффициент жесткости зубчатого зацепления c учитывает изгибную и контактную жесткости взаимодействующих зубьев передачи. Единицей измерения параметров c , $c_{и}$ и c_{H} является Н·м/рад.

Результаты исследования

Рассмотрим пример определения коэффициентов жесткости цилиндрической зубчатой передачи на основе предлагаемой методики и сравним получаемые значения с результатами вычислений по другим известным методикам. Используем один из вариантов передач, анализируемых в [5], со следующими параметрами: числа зубьев $z_1 = 20$, $z_2 = 25$, коэффициенты смещений $x_1 = x_2 = 0$. Необходимо принять также значения других параметров передачи, входящих в формулы предлагаемой методики, конкретизирующих ее конструктивное исполнение и передаваемую нагрузку. Значения исходных параметров зубчатой передачи и основных вычисляемых параметров зубьев приведены в табл. 1.

В результате выполненных вычислений с использованием исходных данных из табл. 1 при нагрузке

передачи вращающим моментом $M_1 = 20$ Н·м получены следующие значения параметров: коэффициент изгибной жесткости зубчатого зацепления $c_{и} = 2,471 \cdot 10^5$ Н·м/рад; контактная деформация зубьев $y_H = 2,789 \cdot 10^{-6}$ м; коэффициент контактной жесткости зацепления $c_H = 1,434 \cdot 10^5$ Н·м/рад; коэффициент жесткости зубчатого зацепления с учетом изгибной и контактной деформаций $c = 9,074 \cdot 10^4$ Н·м/рад.

Согласно ГОСТ 21354—87 жесткость зубчатого зацепления оценивается величиной, называемой удельной нормальной жесткостью, а единицей измерения является Н/(мм·мкм). Предусмотрены три возможных алгоритма вычислений этого параметра. Формулы первого алгоритма приведены в табл. 6 данного ГОСТа. Обозначим удельную нормальную жесткость $c_{уд}$ (в ГОСТе она имеет обозначение c'). Для анализируемой передачи по этим формулам находим $c_{уд} = 15,152$ Н/(мм·мкм). Методика второго алгоритма изложена в табл. 33 ГОСТа. При этом оценивается удельная нормальная жесткость зуба шестерни $c_{а,уд}$ при контакте его вершины и отдельно для сопряженного зуба колеса $c_{р,уд}$, а также конечное ее значение $c_{уд}$ при отмеченных условиях нагружения:

$$c_{уд} = \frac{c_{а,уд}c_{р,уд}}{c_{а,уд} + c_{р,уд}}.$$

Получены следующие значения: $c_{а,уд} = 14,771$; $c_{р,уд} = 46,512$; $c_{уд} = 11,211$ Н/(мм·мкм). Определение этих параметров предусмотрено в разделе уточненного расчета прямозубых передач на прочность

Таблица 1

Исходные данные и вычисленные параметры исследуемой зубчатой передачи

| Наименование параметра | Обозначение | Единица | Шестерня | Колесо |
|--|-------------|----------------|------------------------|------------------------|
| 1. Количество зубьев | z | — | 20 | 25 |
| 2. Модуль | m | мм | 2 | 2 |
| 3. Коэффициент смещения | x | — | 0 | 0 |
| 4. Угол зацепления | α_w | град | 20 | 20 |
| 5. Ширина зубчатого венца | b_w | мм | 10 | 10 |
| 6. Толщина зуба: | | | | |
| на окружности вершин | s_a | мм | 1,390 | 1,440 |
| на делительной окружности | s_d | мм | 3,142 | 3,142 |
| на основной окружности | s_b | мм | 3,512 | 3,652 |
| 7. Момент инерции сечения зуба на делительной окружности | J_d | м ⁴ | $0,167 \cdot 10^{-10}$ | $0,164 \cdot 10^{-10}$ |
| 8. Прогиб зуба на делительной окружности | y | м | $0,367 \cdot 10^{-6}$ | $1,252 \cdot 10^{-6}$ |
| 9. Радиус кривизны эвольвенты на поверхности контакта | ρ_x | мм | 6,840 | 8,551 |

при изгибе, поэтому можно предполагать, что они оценивают изгибную жесткость.

Третий метод оценки жесткости изложен в табл. 39 ГОСТа, в которой рассматривается расчет на контактную прочность. Здесь используется та же формула, что и в табл. 6, поэтому результаты по первому и третьему методам полностью совпадают. Следовательно, можно полагать, что согласно ГОСТ 21354—87 удельная контактная жесткость анализируемой передачи $c_{H,уд} = 15,152$ Н/(мм·мкм), а удельная изгибная жесткость $c_{и,уд} = 11,211$ Н/(мм·мкм).

Следует особо подчеркнуть, что формулы, используемые в ГОСТ, эмпирические, использующие информацию только о количестве зубьев шестерни и колеса и коэффициентах смещения исходного контура. Модуль же зубчатых колес и их нагрузку они не учитывают.

Для сравнения с этими результатами определим удельную изгибную и удельную контактную жесткости, используя результаты, полученные по предлагаемой методике. Их значения вычисляются из соотношений:

$$c_{и,уд} = \frac{F}{(y_1 + y_2)b_w} \cdot 10^{-9};$$

$$c_{H,уд} = \frac{F}{y_H b_w} \cdot 10^{-9},$$

а удельная жесткость зубчатого зацепления:

$$c_{уд} = \frac{c_{и,уд} c_{H,уд}}{c_{и,уд} + c_{H,уд}}.$$

Искомые значения параметров приведены в табл. 2. Там же даны значения, полученные авторами работ [5 и 12].

Таблица 2

Значения удельной нормальной жесткости исследуемой зубчатой передачи

| Автор методики, источник информации | Результаты вычисления параметров, Н/(мм·мкм) | | |
|-------------------------------------|--|------------|------------|
| | $c_{уд}$ | $c_{и,уд}$ | $c_{H,уд}$ |
| В. Н. Кудрявцев [12] | — | — | 31,0 |
| А. И. Петрусевич [12] | 18,0 | — | — |
| В. Л. Дорофеев [5] | 14,860 | — | — |
| Предлагаемая методика | 22,685 | 61,769 | 35,852 |
| ГОСТ 21354 | 6,444 | 11,211 | 15,152 |

Представление модели зубьев в виде балки переменного сечения использовал также проф. В. Н. Кудрявцев [12]. Определялись контактные и изгибные деформации и деформации сдвига. Для оценки упругих свойств зубчатой передачи им использован термин "жесткость зубьев", определяемую из соотношения:

$$c = q/\delta,$$

где q — погонная нагрузка на зуб; δ — перемещение шестерни относительно колеса по дуге основной окружности: $\delta = r_{b1}\varphi_1$; φ_1 — угол относительного поворота шестерни вследствие деформации зубьев под действием вращающего момента M_1 .

Погонная нагрузка вычислялась по формуле

$$q = M_1 / (b_w r_{b1}).$$

Полученные в [12] расчетные формулы громоздки и неудобны для практического использования в инженерных расчетах. Кроме того, допущена ошибка в определении момента инерции сечения балки, что, очевидно, приводило к погрешностям вычислений деформации δ . В итоге автор данной разработки пришел к заключению, что величину контактной деформации δ_H можно определять с достаточной точностью из соотношения [12]:

$$\delta_H = \frac{q}{310\,000}.$$

Значение δ_H по этому соотношению получается в сантиметрах. В результате величина удельной контактной жесткости зубчатого зацепления оказывается равной $c_{H,уд} = 31$ Н/(мм·мкм).

Как видно из табл. 2, полученные различными авторами значения удельной нормальной жесткости зубьев значительно расходятся.

В заключение проведем на основе предложенной методики расчетные исследования зависимостей параметров упругих свойств зубчатой передачи от модуля m и передаваемой нагрузки.

На рис. 4 приведены графики изменения коэффициентов изгибной $c_{и}$ и контактной c_H жесткостей в зависимости от модуля зубчатого зацепления m при двух значениях окружного усилия F , приложенного на делительной окружности шестерни, а также график коэффициента жесткости c , учитывающий суммарную изгибную и контактную деформации зубьев.

Полученные графики отражают нелинейный характер функций исследуемых параметров от вели-

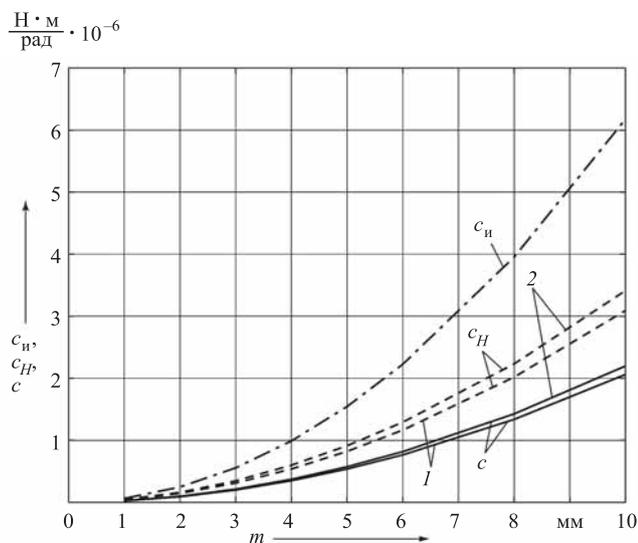


Рис. 4. Графики зависимостей коэффициентов жесткости зубчатого зацепления от модуля:

$c_{и}$ — коэффициент изгибной жесткости; c_{H} — коэффициент контактной жесткости; c — коэффициент результирующей жесткости; 1 — при $F = 1000$ Н; 2 — при $F = 3000$ Н

чины модуля. Значение $c_{и}$ не зависит от величины передаваемой нагрузки, а определяется моментом инерции расчетного сечения зуба J_x .

На рис. 5 представлен график, иллюстрирующий зависимость J_x от m , получаемую согласно выражению (6). Принималось $b_w = 10$ мм, а $s_{св} = s_d$.

Коэффициент контактной жесткости зубьев c_{H} , согласно выражению (16), является нелинейной функцией погонной нагрузки q , толщин зубьев s_{x1} , s_{x2} и радиусов эвольвенты рабочих поверхностей зубьев ρ_{x1} , ρ_{x2} соответственно шестерни и колеса. Значения же ρ_{x1} и ρ_{x2} пропорциональны модулю m . В итоге результирующее значение коэффициента жесткости зубчатого зацепления c , учитывающее изгибную и контактную деформации зубьев, оказывается нелинейной функцией модуля m и окружной силы F , характеризующей нагрузку (см. рис. 4).

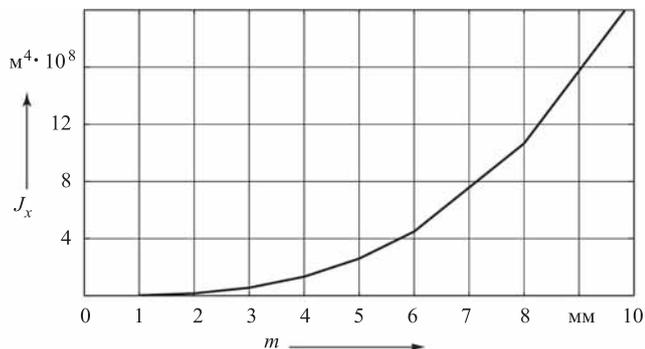


Рис. 5. Зависимость момента инерции сечения зуба на делительной окружности от модуля

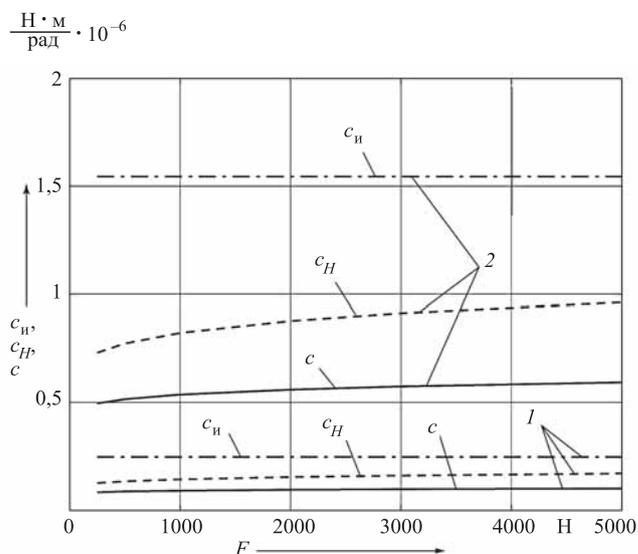


Рис. 6. Графики зависимостей коэффициентов жесткости зубчатого зацепления от нагрузки:

1 — при $m = 2$ мм; 2 — при $m = 5$ мм

Зависимости c_{H} и c от F для двух значений m показаны на рис. 6. Вместе с тем из этого рисунка видно, что величина $c_{и}$ не зависит от нагрузки. Ее значение определяется только величиной модуля, поскольку с ним непосредственно связана толщина зуба (см. рис. 4). Следует, однако, иметь в виду, что в соответствии с выражением (1) толщина зуба также зависит от коэффициента смещения исходного контура x .

В завершение исследований рассмотрим характеристики удельной нормальной жесткости зубчатых зацеплений, получаемые с использованием формул предлагаемой методики. На рис. 7 показаны графики зависимостей $c_{H,уд}$ и $c_{уд}$ от модуля m при двух значениях нагрузки F , а на рис. 8 — от нагрузки при двух значениях модуля. С увеличением модуля значения $c_{H,уд}$ и $c_{уд}$ несколько понижаются, а увеличение нагрузки приводит к их возрастанию. Значение $c_{и,уд}$ не зависит от модуля. Однако из этого обстоятельства не следует однозначный вывод о независимости изгибной и контактной жесткостей зубьев от модуля, как это трактуется в [5]. Такая информация может ввести в заблуждение заинтересованного читателя и привести его к мнению, что c_{H} и c также не зависят от модуля. Аналогичная опасность подстерегает читателя при использовании методики, изложенной в ГОСТ.

Предложенная методика определения параметров упругих свойств зубчатых колес, изложенная применительно к прямозубой передаче с наружным и внутренним зацеплением, годится и для косозубой передачи, для которой необходимо лишь учесть уве-

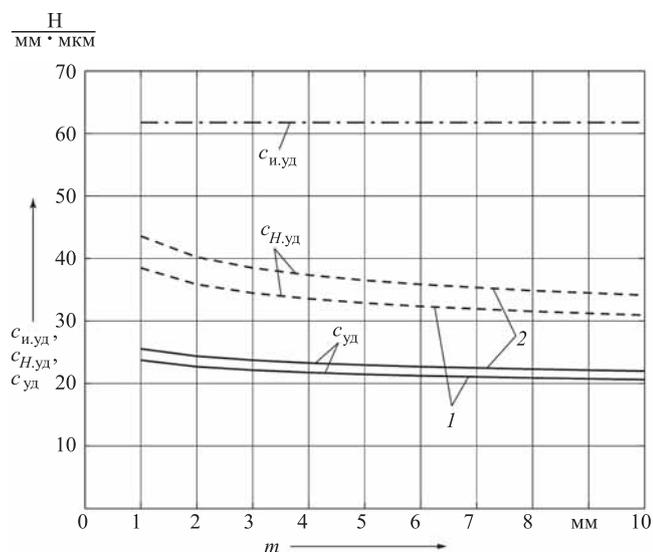


Рис. 7. Графики зависимостей удельной нормальной жесткости зубчатого зацепления от модуля:

1 — при $F = 1000$ Н; 2 — при $F = 3000$ Н

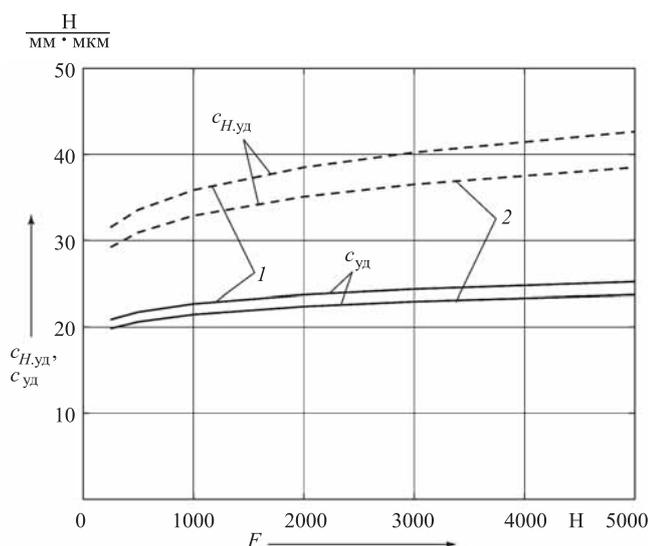


Рис. 8. Графики зависимостей удельной нормальной жесткости зубчатого зацепления от нагрузки:

1 — при $m = 2$ мм; 2 — при $m = 5$ мм

личение длины зуба, для чего значение b_w необходимо делить на $\cos\beta$, где β — угол наклона зубьев. Получаемые при этом значения коэффициентов жесткостей $c_{и}$ и c_H будут несколько занижены, так как косозубые передачи имеют больший коэффициент перекрытия в сравнении с прямозубыми.

Выводы

1. Разработана методика определения изгибных и контактных деформаций зубьев и коэффициента жесткости зубчатой передачи, основанная на исполь-

зовании физических законов механики упруго-деформированного состояния объекта исследования, находящегося под воздействием внешней среды.

2. Для определения изгибной деформации зубьев и коэффициента изгибной жесткости предложена модель замещения зуба балкой переменного сечения. Контур боковой поверхности зуба в модели представлен в виде равнобоочной трапеции, обеспечивающей отображение реальной толщины зуба с максимальной погрешностью, не превышающей 15 %.

3. На основе предложенной модели получены сравнительно простые рабочие формулы, отражающие физическую сущность процессов деформирования зубьев и позволяющие в первом приближении определить параметры упругих свойств зубчатого зацепления, необходимые для моделирования процессов функционирования технических объектов, содержащих в своем составе зубчатые передачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Альгин В. Б. Расчет мобильной техники: кинематика, динамика, ресурс. Минск: Беларус. навука, 2014. 271 с.
2. Блинов Е. И. Основы динамической теории движения колесных машин. М.: Машиностроение, 2006. 149 с.
3. Тарасик В. П. Математическое моделирование технических систем. Минск: Новое знание, 2016. 592 с.
4. Дорофеев В. Л. Анализ и расчет контактных и изгибных перемещений деталей машин. // Вестник машиностроения. 1993, № 10. С. 5—7.
5. Дорофеев В. Л. Принцип аналитического разделения упругих перемещений на контактные и изгибные и его применение для расчета зубчатых передач // Труды конференции "Техника приводов". — Болгария, София, 2003 / <http://gears.ru/transmis/zaprogramata/1.307.pdf>.
6. ISO 6336-1:2006. Расчет допустимой нагрузки для прямозубых и косозубых цилиндрических передач. Часть 1. Основные принципы, введение и основные воздействующие факторы.
7. ГОСТ 21354—87. Передачи зубчатые цилиндрические эвольвентные внешнего зацепления. Расчет на прочность. М.: Издательство стандартов, 1993. 132 с.
8. Беляев Н. М. Сопrotивление материалов. М.: Наука, 1976. 608 с.
9. Машков А. А. Теория механизмов и машин. Минск: Вышэйшая школа, 1971. 470 с.
10. Беляев Н. М. Труды по теории упругости и пластичности. М.: Гостехтеориздат, 1957. 632 с.
11. Нахатакян Ф. Г. Напряженно-деформированное состояние упругих элементов зубчатых механизмов и сооружений при их линейном и кромочном контакте. Докторская диссертация. М.: Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, 2014. 213 с.
12. Кудрявцев В. Н. Зубчатые передачи. М.:—Л.: Машгиз, 1957. 263 с.