

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Физические методы контроля»

МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

*Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов направления подготовки
12.03.01 «Приборостроение»
очной формы обучения*



Могилев 2022

УДК 621.391.6
ББК 32.84
М54

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Физические методы контроля» «20» апреля 2022 г.,
протокол № 7

Составитель ст. преподаватель Е. Н. Прокопенко

Рецензент канд. техн. наук, доц. С. В. Болотов

В методических рекомендациях кратко изложены теоретические сведения, необходимые для выполнения практических заданий. Методические рекомендации разработаны в соответствии с учебной программой по дисциплине «Методы анализа и обработки сигналов» для студентов направления подготовки 12.03.01 «Приборостроение» очной формы обучения.

Учебно-методическое издание

МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Ответственный за выпуск	С. С. Сергеев
Корректор	А. А. Подошевка
Компьютерная верстка	Е. В. Ковалевская

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 31 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2022

Содержание

Введение.....	4
1 Классификация сигналов. Параметры электрических сигналов. Радиоволны	5
2 Представление сигналов во временной области.....	7
3 Спектральный анализ сигналов. Ряды Фурье. Преобразование Фурье....	13
4 Однотональная и многотональная амплитудная модуляция сигналов	16
5 Угловая модуляция сигналов.....	20
6 Дискретизация сигналов. Теорема Котельникова	23
7 Дискретное преобразование Фурье. Быстрое преобразование Фурье	27
8 Модуляция дискретных сигналов.....	34
9 Расчет характеристик цифровых систем обработки информации.....	38
Список литературы	45

Введение

Общение людей друг с другом, их взаимоотношения с внешним миром, их производственная, научная и общественная деятельность тесно связаны с информационными процессами – процессами восприятия, передачи, обработки, поиска, хранения и отображения информации. Без обмена информацией невозможно управление различными объектами, организация производственной, научной и общественной жизни человека.

Целью изучения дисциплины «Методы анализа и обработки сигналов» является формирование у студентов четких представлений о целях, задачах и методах обработки измерительной информации в неразрушающем контроле. В результате обработки измерительная информация об объекте контроля представляется в форме, удобной для восприятия, хранения и дальнейшего преобразования. Для этого необходимо осуществить выделение информативного сигнала и подавление шумов и помех, преобразование и передачу сигнала по каналу связи от датчика к приемному устройству, оцифровывать сигнал и обработать цифровую информацию в микропроцессоре, вывести численную информацию или цифровое изображение на экран устройства отображения информации.

Целью практических занятий по дисциплине «Методы анализа и обработки сигналов» является формирование у студентов навыков анализа сигналов измерительной информации в приборах неразрушающего контроля.

1 Классификация сигналов. Параметры электрических сигналов. Радиоволны

1.1 Краткие теоретические сведения

В соответствии с принятой традицией сигналом называют процесс изменения во времени физического состояния какого-либо объекта, служащий для отображения, регистрации и передачи сообщений. На практике сообщения неразрывно связаны с заключенной в них информацией [1].

Для того чтобы сделать сигналы объектами теоретического изучения и расчетов, следует указать способ их математического описания или, другими словами, создать математическую модель сигнала. Математической моделью сигнала может быть, например, функциональная зависимость, аргументом которой является время. Математические модели электрических сигналов, рассматриваемых в электротехнике и электронике, обычно обозначаются символами латинского алфавита $u(t)$, $i(t)$ и т. д. Зная математические модели сигналов, можно сравнивать эти сигналы между собой, устанавливать их тождество и различие, проводить классификацию.

Классифицируя сигналы по виду моделирующей их функции времени, можно выделить аналоговые и дискретные сигналы.

Если сигнал имеет математическую модель вида непрерывной или кусочно-непрерывной функции, то он называется аналоговым.

Если значения сигнала определены не во все моменты времени, а лишь в счетном множестве точек, то такой сигнал называется дискретным.

Дискретные сигналы в свою очередь подразделяются на импульсные и цифровые. Если сигнал в виде изменения тока или напряжения существует лишь в пределах конечного интервала времени, то такой сигнал называется импульсным. Особой разновидностью дискретных сигналов являются цифровые сигналы. Для них характерно то, что отсчетные значения сопоставлены числам.

Существует три группы параметров сигналов [1, 2]:

- 1) основные параметры;
- 2) производные параметры;
- 3) дополнительные параметры.

Основные параметры характеризуют идеализированный сигнал.

Например, последовательность прямоугольных импульсов, идеализированное графическое отображение которой приведено на рисунке 1.1, характеризуется тремя основными параметрами: U_m – амплитуда импульсов; $t_{и}$ – длительность импульсов; T – период следования импульсов.

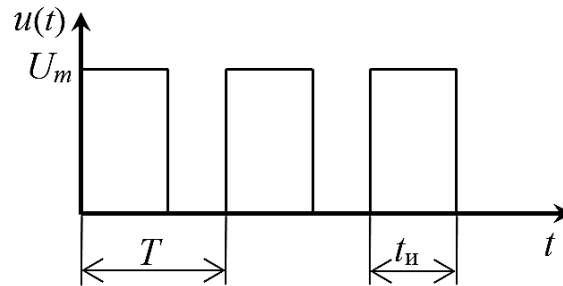


Рисунок 1.1 – Последовательность прямоугольных импульсов

Производные параметры получают пересчетом из основных параметров. Например, для той же последовательности прямоугольных импульсов могут быть определены:

– f – циклическая частота сигнала, $f = \frac{1}{T}$;

– ω – круговая частота сигнала, $\omega = 2\pi f$;

– q – скважность, $q = \frac{T}{t_{и}}$, в частном случае при $q = 2$ последовательность импульсов называется меандром (см. рисунок 1.1);

– $k_{зап}$ – коэффициент заполнения, $k_{зап} = q^{-1} = \frac{t_{и}}{T}$;

– $U_{ср}$ – среднее значение сигнала, $U_{ср} = \frac{U_m}{q}$.

1.2 Индивидуальное задание

Ознакомиться с классификацией сигналов, их основными параметрами. Решить следующие задачи.

1.2.1 Импульсный сигнал $u(t)$, имеющий размерность напряжения вольт, описывается формулой $u(t) = 25(e^{-10^5 t} - e^{-2 \cdot 10^5 t})\sigma(t)$. Построить график данного импульса. Определить максимальное значение сигнала u_{max} , а также момент времени достижения максимума t_{max} . Вычислить длительность импульса $\tau_{и}$, определив ее как длину отрезка времени от нуля до той точки, в которой мгновенное значение сигнала уменьшается в 10 раз по сравнению с максимальным значением.

1.2.2 Математическая модель импульсного сигнала задана выражением $u(t) = A_0 t e^{-\alpha t}$. Вычислить и построить график данного сигнала в зависимости от безразмерного аргумента αt . Определить длительность импульса $\tau_{и}$, приняв в качестве критерия окончания импульса спад мгновенных значений до уровня 0,1 от максимального значения.

1.2.3 Найти формулы, описывающие математические модели следующих импульсных сигналов (рисунок 1.2): однополярного импульса $s_1(t)$,

представляющего собой отрезок синусоиды с амплитудой A и частотой ω_0 , длительность импульса равна половине периода (a); двухполярного импульса $s_2(t)$, отвечающего целому периоду синусоиды с такими же параметрами (b).

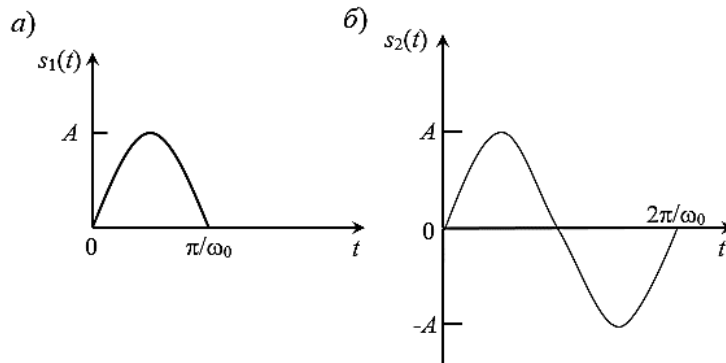


Рисунок 1.2 – Формы импульсов

1.2.4 Вычислить энергию E_u и норму $\|u\|$ экспоненциального видеоимпульса напряжения $u(t) = 30e^{-10^5 t} \sigma(t)$.

1.2.5 Вычислить энергию E_s и норму $\|s\|$ сигнала $s(t)$, представляющего собой прямоугольный видеоимпульс напряжения с амплитудой U_0 и длительностью τ_n .

1.2.6 Вывести формулу для нахождения энергии радиоимпульса длительностью τ_n с огибающей прямоугольной формы, описываемого выражением

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ U_m \sin(\omega t + \varphi), & 0 < t < \tau_n; \\ 0, & t > \tau_n. \end{cases}$$

Контрольные вопросы

- 1 Что представляет сигнал?
- 2 Что такое математическая модель сигнала?
- 3 Как классифицируются сигналы?
- 4 Назовите основные параметры сигналов.
- 5 Какие параметры относятся к дополнительным?

2 Представление сигналов во временной области

2.1 Основные теоретические положения

При построении различных систем обработки информации возникают задачи анализа и синтеза сигналов. Сущность анализа состоит в том, что

изучаемый объект разбивается на составные части, после чего проводится их исследование. Применительно к сигналам при анализе исследуемый сигнал описывается совокупностью других более простых сигналов с хорошо изученными свойствами. Такое представление позволяет, с одной стороны, сложную задачу преобразования исследуемого сигнала устройствами обработки свести к задачам преобразования известных сигналов, а с другой стороны, достаточно эффективно решать задачи синтеза сигналов с заданными свойствами.

В общем случае сигнал $s(t)$ описывается функцией времени, позволяющей рассматривать сигнал как процесс, развивающейся во времени. Поэтому представление сигнала $s(t)$ сложной формы совокупностью простых сигналов, также описываемых функциями времени, получило название *динамического* или *временного* представления [1].

В теории радиотехнических сигналов для динамического представления используются следующие элементарные функции: функция знака $sign(t)$ (сигнум-функция), единичная функция $\sigma(t)$ (функция включения, функция Хевисайда), дельта-функция $\delta(t)$ (функция Дирака) и прямоугольный импульс с единичной высотой $rect\left(\frac{t}{\tau_n}\right)$ [1, 2].

Функция знака $sign(t)$ имеет постоянную величину, равную единице, знак которой изменяется скачком при переходе переменной времени t через ноль (рисунок 2.1).

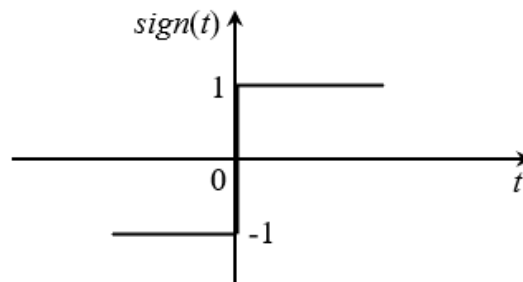


Рисунок 2.1 – Функция знака $sign(t)$

Математически функция знака описывается выражением

$$sign(t) = \begin{cases} -1 & \text{при } t < 0; \\ 0 & \text{при } t = 0; \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Умножение $s(t)$ на $sign(t)$ означает изменение знака сигнала в момент времени $t = 0$.

Единичная функция $\sigma(t)$ характеризует собой единичный скачок при переходе t через ноль (рисунок 2.2).

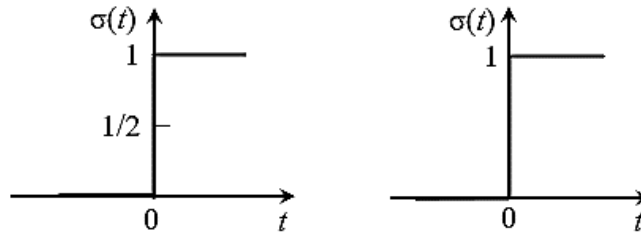


Рисунок 2.2 – Графическое представление функции включения

Математическое выражение единичной функции имеет следующий вид:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ \frac{1}{2} & \text{при } t = 0; \\ 1 & \text{при } t > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ 1 & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Функция $\sigma(t)$ позволяет моделировать скачок размером в единицу в произвольный момент времени t_0 (рисунок 2.3):

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0; \\ 1 & \text{при } t > t_0. \end{cases} \quad (2.3)$$

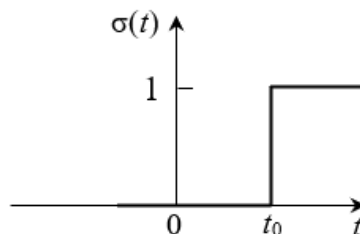


Рисунок 2.3 – Графическое представление функции включения в произвольный момент времени

Функцию $\sigma(t)$ удобно использовать для моделирования прямоугольных импульсов.

Дельта-функция $\delta(t)$ была введена физиком-теоретиком П. Дираком. Рассмотрим импульс $s(t)$ единичной площади и длительностью τ_n (рисунок 2.4).

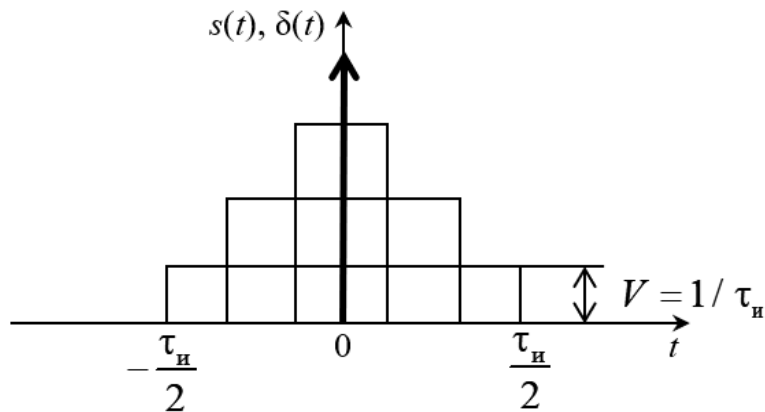


Рисунок 2.4 – Дельта-функция $\delta(t)$

$$s(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau_n} & \text{при } -\frac{\tau_n}{2} \leq t \leq \frac{\tau_n}{2}; \\ 0 & \text{при остальных } t. \end{cases}$$

Будем уменьшать длительность импульса при сохранении его площади, равной единице. При этом высота импульса $U = \frac{1}{\tau_n}$ будет возрастать. При $\tau_n \rightarrow 0$ высота импульса будет стремиться к бесконечности. Это и есть δ -функция (на рисунке выделена утолщенным отрезком со стрелкой)

$$\delta(t) = \lim_{\tau_n \rightarrow 0} s(t) = \lim_{\tau_n \rightarrow 0} \frac{1}{\tau_n}.$$

Математически δ -функция записывается следующим образом:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0; \\ 0 & \text{при остальных } t. \end{cases} \quad (2.4)$$

Прямоугольный импульс с единичной амплитудой (рисунок 2.5) описывается следующим выражением:

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau_{\text{и}}}\right) = \begin{cases} 1 & \text{при } -\frac{\tau_{\text{и}}}{2} \leq t \leq \frac{\tau_{\text{и}}}{2}; \\ 0 & \text{при остальных } t. \end{cases} \quad (2.5)$$

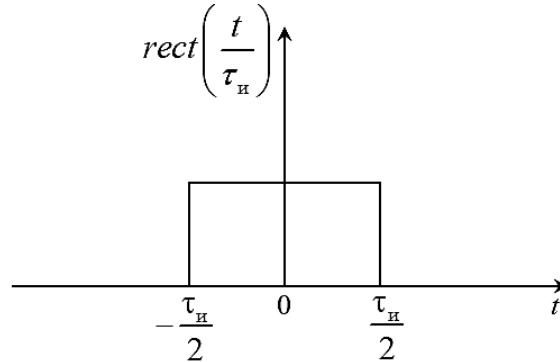


Рисунок 2.5 – Прямоугольный импульс с единичной амплитудой

С помощью прямоугольного импульса с единичной высотой можно достаточно просто описать периодическую последовательность прямоугольных импульсов, цифровые сигналы в виде двоичных кодовых комбинаций и другие.

Произвольный сигнал с помощью $\sigma(t)$ представляется следующим образом:

$$s(t_k) \approx S_0 \cdot \sigma(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (S_k - S_{k-1}) \cdot \sigma(t - k\Delta t). \quad (2.6)$$

С помощью $\delta(t)$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (2.7)$$

2.2 Индивидуальное задание

Ознакомьтесь с основными положениями по динамическому представлению сигналов. Решить следующие задачи.

2.2.1 Импульсный сигнал $s(t)$ прямоугольной формы имеет длительность 5 мкс и амплитуду 10 В. Начало отсчета совпадает с фронтом импульса. Записать аналитическое выражение этого сигнала.

2.2.2 Сигнал $s(t)$ имеет математическую модель вида

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0; \\ s_0 (t/t_0) & \text{при } 0 \leq t \leq t_0; \\ s_0 & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Представить данную зависимость в виде суммы кусочно-линейных функций.

2.2.3 Составить математическую модель треугольного симметричного импульса, имеющего длительность τ_n и S_0 .

2.2.4 Сигнал $S(t)$ равен нулю при $t < 0$ и изменяется по закону $S(t) = At^4$ при $t > 0$, A – постоянный коэффициент. Найти динамическое представление сигнала $S(t)$ с помощью функций включения.

2.2.5 Сигнал $S(t)$ равен нулю при $t < 0$ и изменяется по закону $S(t) = At^3 + Bt^2 + Ct$ при $t > 0$, A, B, C – постоянные коэффициенты. Найти динамическое представление сигнала $S(t)$ с помощью функций включения.

2.2.6 На рисунке 2.6 изображены осциллограммы импульсных сигналов $S_1(t)$, $S_2(t)$ и $S_3(t)$. Найти математические модели данных сигналов, выраженные посредством сумм, которые составлены из произведений линейных функций и функций Хевисайда.

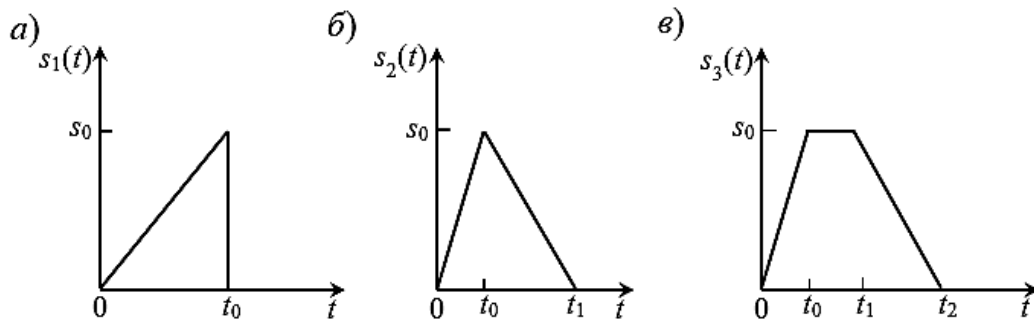


Рисунок 2.6 – Осциллограммы импульсных сигналов

2.2.7 Имеется сигнал, который описывается формулой $s(t) = \exp(-at)\sigma(t)$. Найти динамическое представление данного сигнала.

2.2.8 Построить математическую модель последовательности видеоимпульсов с амплитудой сигнала A , длительностью τ и периодом следования T .

2.2.9 Составить математическую модель пилообразного сигнала с амплитудой A и периодом следования T .

Контрольные вопросы

- 1 Что такое динамическое представление сигнала?
- 2 Какие функции могут использоваться для динамического представления сигналов?
- 3 Что представляет собой функция Хевисайда?
- 4 Как представляется произвольный сигнал с помощью Хевисайда?
- 5 Что такое δ -функция?

6 Назовите основные свойства δ -функции.

7 Как представляется произвольный сигнал с помощью δ -функции?

3 Спектральный анализ сигналов. Ряды Фурье. Преобразование Фурье

3.1 Основные теоретические положения

Для описания одного и того же сигнала в зависимости от решаемых задач могут быть использованы различные математические представления [3, 4]:

- временное представление;
- спектральное (частотное) представление.

Временное представление – это описание сигнала с помощью функций времени. Оно определяет свойство и параметры сигнала во временной области (форму, длительность сигнала, энергию, мощность).

Однако при практическом применении сигналов важно знать их свойства не только во временной, но и в частотной области. В этом случае при анализе и расчетах сигналы представляются своими частотными характеристиками, что облегчает решение многих практических задач обработки сигнала. Обычно частотные характеристики называют частотными спектрами, или спектрами, сигнала.

Определение спектра сигнала составляет задачу спектрального анализа. В основе спектрального анализа лежит разложение сигнала на спектральные составляющие. Математические методы спектрального анализа различаются для периодических и непериодических сигналов.

Периодическим называется сигнал, значение которого повторяется через определенные интервалы времени, которые называют периодом сигнала и обычно обозначают буквой T .

Простейшие периодические сигналы основаны на функциях косинуса или синуса.

$$s(t) = a \cos(\omega t), \quad (3.1)$$

где ω – круговая частота;

$$\omega = 2\pi f; \quad f = \frac{1}{T}; \quad f = \left[\frac{1}{c} \right].$$

Фурье в 20-х гг. XIX в. доказал, что любой периодический сигнал можно представить в виде разложения на гармонические (составляющие) колебания:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)); \quad (3.2)$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{T},$$

где T – период;

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt; \quad (3.3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(n\omega_1 t) dt. \quad (3.4)$$

Если сигнал описывается четной функцией времени, то тогда все коэффициенты b_n равны нулю и можно записать, что

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_1 t). \quad (3.5)$$

Если сигнал $s(t)$ описывается нечетной функцией времени, то тогда все коэффициенты a_n равны нулю и можно записать, что

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_1 t). \quad (3.6)$$

В общем случае, когда сигнал произвольный, используют другую, более удобную форму записи ряда Фурье:

$$s(t) = \frac{A_0}{2} + \sum A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n);$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \varphi_n = -\operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n}. \quad (3.7)$$

Формулы для нахождения a_n и b_n аналогичны формулам (3.3) и (3.4).

Это представление называют спектральным, или частотным, представлением сигнала. Спектральное представление сигнала – это постоянная составляющая ($A_0/2$) и бесконечное число гармонических составляющих (гармонических сигналов). Число n определяет порядковый номер гармоники. Каждая гармоника характеризуется амплитудой A_n , частотой $n\omega_1$ и начальной фазой φ_n . Гармоника, соответствующая $n = 1$, – это первая (основная) гармоника. Она имеет частоту, равную частоте сигнала.

Совокупность всех амплитуд гармоник A_n определяет амплитудный спектр сигнала, а совокупность всех начальных фаз называется фазовым спектром сигнала.

Спектральный анализ непериодических сигналов – это описание и исследование свойств непериодических сигналов в частотной области. Спектральный анализ непериодических сигналов проводится на основе интегральных преобразований Фурье.

Прямое преобразование Фурье

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.8)$$

Обратное преобразование Фурье

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.9)$$

3.2 Индивидуальное задание

Ознакомиться с основными положениями спектрального анализа. Решить следующие задачи.

3.2.1 Периодический сигнал $s(t)$ с периодом T на отрезке $-T/2 \leq t \leq T/2$ задан выражением $s(t) = U_0 \cos(\pi t/T)$. Найти выражения для коэффициентов C_n ряда Фурье этого сигнала.

3.2.2 Периодический комплексный сигнал $s(t)$ с периодом T представлен следующими выражениями:

$$s(t) = \begin{cases} 0, & -T/2 < t < \tau/2; \\ A \exp(j\alpha t), & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2; \\ 0, & \tau/2 < t < T/2, \end{cases}$$

где A , α , τ – заданные вещественные числа.

Вычислить коэффициенты C_n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) ряда Фурье в комплексной форме для данного сигнала.

3.2.3 Прямоугольные видеоимпульсы положительной полярности, образующие бесконечную последовательность с периодом T , имеют амплитуду U_0 . Длительность каждого импульса равна $T/3$, точка $t = 0$ совпадает с серединой импульса. Определить спектр этого сигнала, построить амплитудно-частотную и фазочастотные характеристики.

3.2.4 Периодический сигнал $s(t)$ на отрезке $-T/2 \leq t \leq T/2$ задан выражением $s(t) = U_0(1 - 2|t|/T)$. Получить выражения, определяющие коэффициенты ряда Фурье для этого колебания. Построить график частичной суммы ряда Фурье, содержащей постоянную составляющую и две гармоники низших номеров.

3.2.5 Периодический сигнал $s_{\text{пер}}(t)$ образован бесконечной последовательностью одинаковых импульсов $s_0(t)$, повторяющихся через одинаковые интервалы времени T . Найти формулу, связывающую коэффициенты ряда Фурье периодического сигнала со спектральной плотностью $S_0(\omega)$ одиночного импульса $s_0(t)$.

3.2.6 Определить спектральную плотность $S(\omega)$ симметричного треугольного импульса $s(t)$.

3.2.7 Найти аналитическое выражение для амплитудного и фазового спектров периодического сигнала вида $s(t) = E \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$, $nT_0 - \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4} + nT_0$, $T_0 > T$, $n = 0, \pm 1, \dots$ и $s(t) = 0$ при любых других значениях t . T_0 – период сигнала $s(t)$, а T – «период» синусоиды, если бы последняя непрерывно существовала на бесконечном интервале времени.

Контрольные вопросы

- 1 Как определяются коэффициенты ряда Фурье?
- 2 Какими свойствами обладают спектры периодических сигналов?
- 3 Запишите выражение для спектральной плотности периодического сигнала.
- 4 Как определяется фазочастотная характеристика?
- 5 Как определить спектр непериодического сигнала?

4 Однотональная и многотональная амплитудная модуляция сигналов

4.1 Основные теоретические положения

Модуляция – это процесс изменения одного из параметров высокочастотного колебания под воздействием низкочастотного сигнала, отображающего передаваемое сообщение. Высокая частота – это гармоническое колебание (несущая) [4].

$$U_H(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (4.1)$$

где U_m – амплитуда;
 ω_0 – несущая частота;
 φ_0 – начальная фаза.

При модуляции один из параметров высокочастотного колебания изменяется по закону низкочастотного сигнала $s(t)$.

Сигнал, у которого в качестве изменяемого параметра выступает амплитуда несущего колебания называется амплитудно-модулированным или сигналом с амплитудной модуляцией.

Сигнал с непрерывной амплитудной модуляцией (АМ) описывается следующим выражением:

$$u_{\text{AM}} = U(t) \cos \omega_0 t = U_m [1 + k_{\text{AM}} s(t)] \cos \omega_0 t, \quad (4.2)$$

где $U(t)$ – огибающая АМ-сигнала, $U(t) = U_m [1 + k_{\text{AM}} s(t)]$;

k_{AM} – коэффициент амплитудной модуляции.

Из выражения (4.2) следует, что АМ-сигнал представляет собой произведение огибающей $U(t)$ на гармоническую функцию $\cos \omega_0 t$. Коэффициент амплитудной модуляции k_{AM} характеризует глубину модуляции и в общем случае описывается выражением

$$k_{\text{AM}} = \frac{U_{\text{AM max}} - U_{\text{AM min}}}{U_{\text{AM max}} + U_{\text{AM min}}}. \quad (4.3)$$

Если в качестве модулирующего сигнала $s(t)$ выступает гармоническое колебание

$$s(t) = S_0 \cos \Omega t, \quad (4.4)$$

где S_0 , Ω – амплитуда и частота модулирующего (управляющего) сигнала соответственно, причем $\omega_0 \gg \Omega$, то сигнал описывается выражением

$$u_{\text{AM}}(t) = U_m \left[1 + \frac{S_0}{U_0} \cos \Omega t \right] \cos \omega_0 t = U_m [1 + k_{\text{AM}} \cos \Omega t] \cos \omega_0 t \quad (4.5)$$

и называется сигналом однотоновой амплитудной модуляции.

Спектр сигнала при однотоновой амплитудной модуляции описывается следующим выражением:

$$\begin{aligned} U_{\text{AM}}(t) &= U_m (1 + k_{\text{AM}} \cos(\Omega t + \Phi) \cos(\omega_0 t + \varphi)) = \\ &= U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{U_m k_{\text{AM}}}{2} \cos((\Omega + \omega_0)t + \Phi + \varphi) + \frac{U_m k_{\text{AM}}}{2} \cos((\omega_0 - \Omega)t - \Phi + \varphi). \end{aligned}$$

Первое слагаемое представляет собой немодулированное колебание (несущее колебание). Второе и третье слагаемые соответствуют новым гармоническим составляющим, появившимся в результате модуляции

амплитуды несущего колебания; частоты этих колебаний $\omega_{\text{н}} = \omega_0 - \Omega$ и $\omega_{\text{в}} = \omega_0 + \Omega$ называются нижней и верхней боковыми частотами, а сами составляющие – нижней и верхней боковыми составляющими. Спектр сигнала представлен на рисунке 4.1.

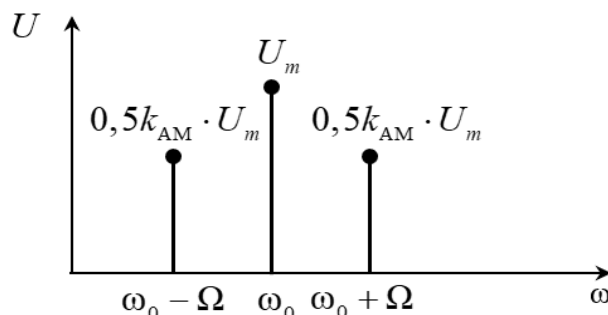


Рисунок 4.1 – Спектр АМ-сигнала

В действительности сигнал может иметь сложный спектр и представляться в виде

$$s(t) = \sum_{n=1}^N U_n \cdot \cos(\omega_n t + \varphi_n), \quad (4.6)$$

где U_n – амплитуды;

ω_n – частоты.

Условие для частот: $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots < \omega_N \ll \omega_0$.

Огибающая сигнала описывается формулами

$$u_{\text{AM}}(t) = U_0 + \sum_{n=1}^N U_n \cdot \cos(\omega_n t + \varphi_n); \quad (4.7)$$

$$u_{\text{AM}}(t) = U_0 \left[1 + \sum_{n=1}^N k_{\text{AM}} \cdot \cos(\omega_n t + \varphi_n) \right] \cos \omega_0 t. \quad (4.8)$$

Спектр такого сигнала

$$u_{\text{AM}}(t) = U_0 \cos \omega_0 t + \frac{U_0}{2} \sum_{n=1}^N k_{\text{AM}0} \cos[(\omega_0 + \Omega_n)t + \varphi_n] + \frac{U_0}{2} \sum_{n=1}^N k_{\text{AM}n} \cos[(\omega_0 - \Omega_n)t - \varphi_n], \quad (4.9)$$

где $k_{\text{AM}n} = \frac{U_n}{U_0}$;

U_n и U_0 – парциальные коэффициенты амплитудной модуляции.

Спектр сигнала при многотональной модуляции представлен на рисунке 4.2.

Спектр сигнала при многотональной амплитудной модуляции отличается тем, что вместо двух боковых составляющих имеет боковые полосы по обе стороны от несущей. Верхняя боковая полоса имеет спектр, который точно повторяет спектр низкочастотного сигнала, а нижняя боковая составляющая зеркально отображена относительно несущей частоты. Каждая из боковых полос содержит одну и ту же информацию, что свидетельствует об избыточности передачи информации двумя боковыми полосами.

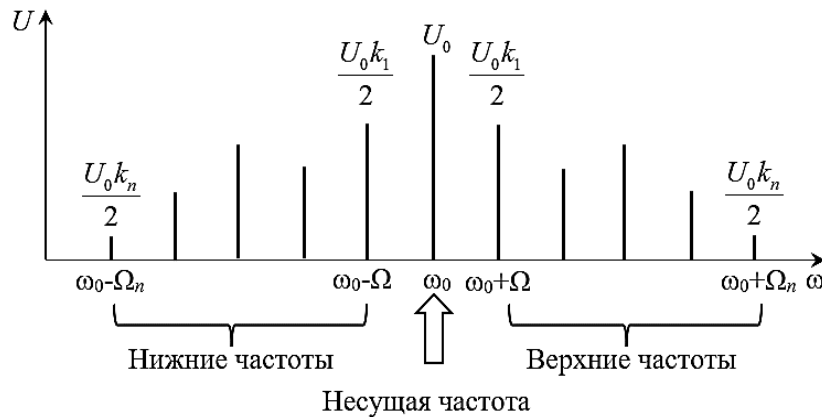


Рисунок 4.2 – Спектр сигнала при многотональной модуляции

4.2 Индивидуальное задание

Ознакомьтесь с теоретическим материалом по амплитудной однотоновой и многотональной модуляции. Решить следующие задачи.

4.2.1 Амплитудно-модулированный сигнал описывается функцией $S_m(t) = 5(1 + 0,5 \cos 3140t) \sin 2\pi 10^5 t$ (в вольтах). Определить глубину модуляции, частоту модулирующего сигнала, несущую частоту, максимальную величину мгновенного значения амплитуды модулированного сигнала.

4.2.2 Амплитудно-модулированный сигнал (в вольтах) описывается следующим выражением: $S(t) = 12(1 + 0,6 \cos \Omega t + 0,2 \cos 2\Omega t) \cos \omega_0 t$. Найти наибольшее и наименьшее значения огибающей $S(t)$ данного сигнала.

4.2.3 По приведенной на рисунке 4.3 временной диаграмме однотонового АМ-сигнала определить частоту несущего сигнала.

4.2.4 Математическая модель однотонового амплитудно-модулируемого сигнала определяется следующим выражением:

$$S(t) = 30 \cos 1200t + 4,5 \cos 1400t + 4,5 \cos 1000t.$$

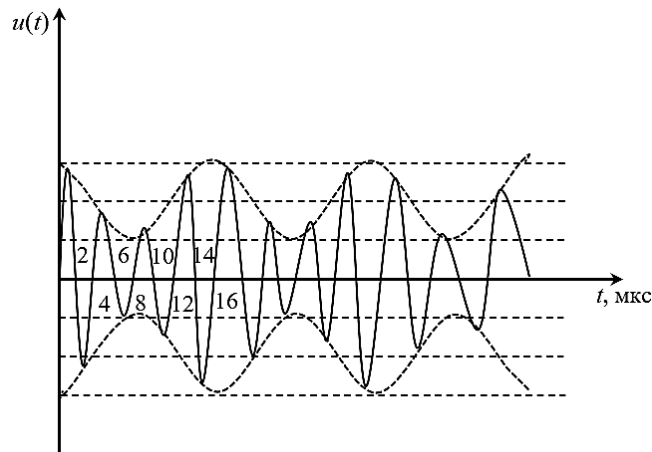


Рисунок 4.3 – Временная диаграмма однотонового АМ-сигнала

Определить коэффициент модуляции сигнала.

4.2.5 Амплитудно-модулированный сигнал описывается математической функцией $S(t) = 9(1 + 0,2 \cos 2160t) \sin 2\pi 10^3 t$. Определить глубину модуляции, частоту модулирующего сигнала, несущую частоту, максимальную величину мгновенного значения амплитуды модулированного сигнала.

4.2.6 Амплитудно-модулированное колебание описывается формулой $s(t) = 130 \left[1 + 0,25 \cos(10^2 t + 30^\circ) + 0,75 \cos(3 \cdot 10^2 t + 45^\circ) \right] \cos(10^5 t + 60^\circ)$.

Построить спектральную диаграмму этого сигнала, вычислив амплитуды и начальные фазы всех спектральных составляющих.

Контрольные вопросы

- 1 Что такое модуляция сигнала?
- 2 Как классифицируется модуляция?
- 3 Какими параметрами принято характеризовать глубину амплитудной модуляции?
- 4 От чего зависит распределение мощности в спектре однотонового АМ-сигнала?
- 5 Чем отличаются спектры сигналов при однотоновой и многотоновой амплитудной модуляции?

5 Угловая модуляция сигналов

5.1 Основные теоретические положения

Помимо амплитуды несущее колебание характеризуется также частотой ω_0 и начальной фазой φ_0 [4]:

$$u_{\text{нес}}(t) = U_m \cos[\omega_0 t + \varphi_0] = U_m \cos \Phi(t), \quad (5.1)$$

где $\Phi(t)$ – полная фаза несущего колебания, которая определяет текущее значение фазового угла.

Изменение либо ω_0 , либо φ_0 в соответствии с управляющим сигналом $s(t)$ соответствует угловой модуляции. Таким образом, понятие угловой модуляции включает в себя как *частотную* (ЧМ), так и *фазовую* (ФМ) модуляцию.

При *частотной модуляции* в соответствии с управляющим сигналом изменяется мгновенная частота несущего колебания в пределах от нижней ω_n до ω_b граничных частот

$$\omega(t) = \omega_0 + (\omega_b - \omega_n)s(t) = \omega_0 + \Delta\omega s(t). \quad (5.2)$$

Наибольшее значение частотного отклонения $\Delta\omega_{\max}$ от ω_0 называется *девиацией* частоты $\Delta\omega_d$: $\Delta\omega_d = \Delta\omega_{\max}$.

Если граничные частоты расположены симметрично относительно ω_0 , то девиация частоты

$$\Delta\omega_d = \omega_b - \omega_n. \quad (5.3)$$

Временная диаграмма сигнала при ЧМ представлена на рисунке 5.1.

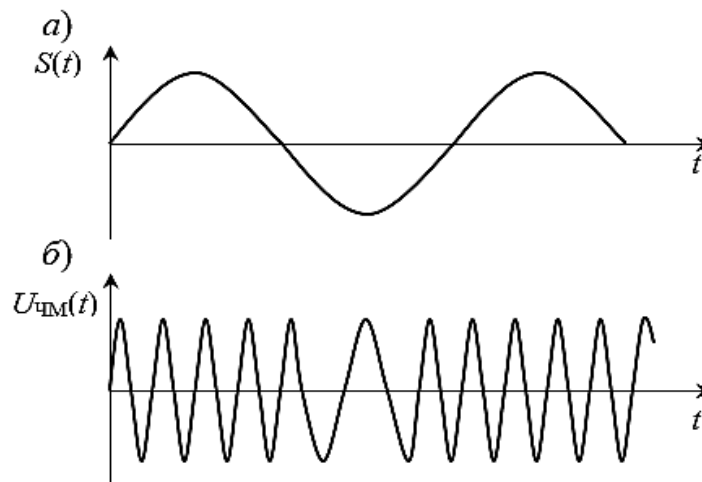


Рисунок 5.1 – Частотная модуляция сигнала

При фазовой модуляции, в соответствии с модулирующим сигналом $s(t)$, изменяется начальная фаза несущего колебания в пределах от нижнего φ_n до верхнего φ_b граничных значений фазы

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \Delta\varphi s(t). \quad (5.4)$$

Наибольшее отклонение фазового сдвига $\Delta\varphi_{\max}$ от φ_0 называется *девиацией фазы* $\Delta\varphi_d$. Если φ_n и φ_b расположены симметрично относительно φ_0 , то $\Delta\varphi_d = \varphi_b - \varphi_n$. В этом случае полная фаза сигнала с фазовой модуляцией

$$\Phi(t) = \omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\varphi_d s(t). \quad (5.5)$$

Тогда, подставляя (5.5) в (5.1), получим обобщенное аналитическое выражение сигнала с фазовой модуляцией

$$u_{\text{ФМ}}(t) = U_m \cos[\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\varphi_d s(t)]. \quad (5.6)$$

5.2 Индивидуальное задание

Ознакомиться с основными характеристиками угловой модуляции. Решить следующие задачи.

5.2.1 Колебание с угловой модуляцией описывается выражением $s(t) = 15 \cos(10^8 t + 3 \sin 10^6 t + 1,4 \sin 10^5 t + \pi / 4)$.

Найти величину мгновенной частоты $\omega(t)$ данного сигнала в момент времени $t = 1$ мкс.

5.2.2 Найти максимальное ω_{\max} и минимальное ω_{\min} значения мгновенной частоты $\omega(t)$ ЧМ-сигнала, представляемого выражением $s(t) = S_0(3 \cdot 10^9 t + 2 \sin 10^7 t + \pi / 6)$.

5.2.3 Однотональный ЧМ-сигнал имеет несущую частоту $f_0 = 50$ МГц и частоту модуляции $F = 7$ кГц. Вычислить, в каких пределах $[f_{\min}, f_{\max}]$ должна изменяться мгновенная частота этого колебания для того, чтобы индекс модуляции m был равен 40.

5.2.4 Получить спектральное представление сигнала с угловой модуляцией $s(t) = 8 \cos(10^6 t + 0,06 \sin 10^4 t)$.

5.2.5 Задано аналитическое выражение для частотно-модулированного сигнала $u(t) = 5 \cos[2\pi 10^5 t + 6 \cos(2\pi 10^2 t) + 60^\circ]$. Определить индекс модуляции, практическую ширину спектра и число гармонических составляющих в пределах этой ширины.

5.2.6 Частота фазомодулированного сигнала изменяется по закону $\omega(t) = 2\pi \cdot 10^6 (1 + 0,1 \cos 2\pi \cdot 10^4 t)$ (радиан в секунду). Найти аналитическое выражение этого колебания, если его амплитуда равна 20 В.

Контрольные вопросы

- 1 Какие параметры сигнала изменяются при угловой модуляции?
- 2 Как связаны между собой частота модуляции, ее индекс и девиация частоты?
- 3 Что такое девиация частоты при угловой модуляции?

4 В чем заключаются сходства и различия между сигналами с частотной и фазовой модуляцией?

5 Как определить спектр сигнала при угловой модуляции?

6 Дискретизация сигналов. Теорема Котельникова

6.1 Основные теоретические положения

Дискретный сигнал – это информационный сигнал, который представляется в виде отдельных отсчетов, взятых по времени, но, в отличие от цифрового сигнала, не обязательно квантованных по уровню. Сигнал называется дискретным, если он может принимать лишь конечное число значений [2, 5].

Математическая модель дискретного сигнала $x(t)$ – это счетное множество точек t_i (i – целое число) на оси времени, в каждом из которых определено отсчетное значение сигнала x_i (рисунок 6.1).

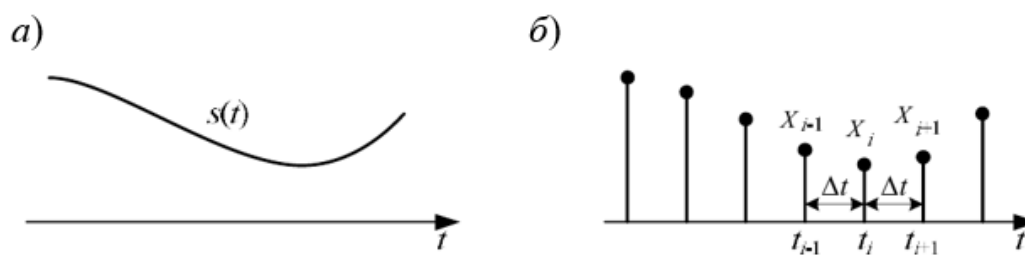


Рисунок 6.1 – Аналоговый сигнал (а) и модель дискретного сигнала (б)

Математически дискретный сигнал определяют:

– функцией дискретного времени nT_d : $x(nT_d) = x(t)|_{t=nT_d}$, $n = 0, 1, 2, \dots$,

соответствующей выборкам аналогового сигнала в дискретные периодически повторяющиеся моменты времени;

– функцией номера выборки n : $x(n) = x(t)|_{T_d=1}$, в общем случае не связанной со временем;

со временем;

– функцией непрерывного времени t :

$$x(t) = x(t)f_{\delta}(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_d) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_d)\delta(t - nT_d), \quad (6.1)$$

получаемой умножением аналогового сигнала $s(t)$ на дискретизирующую

функцию или последовательность $f_{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_d)$ в виде периодической

последовательности δ импульсов с периодом, равным:

$$\delta(t - nT_d) = \begin{cases} \infty, & t = nT_d; \\ 0, & t \neq nT_d. \end{cases}$$

Дискретизирующая последовательность представлена на рисунке 6.2.

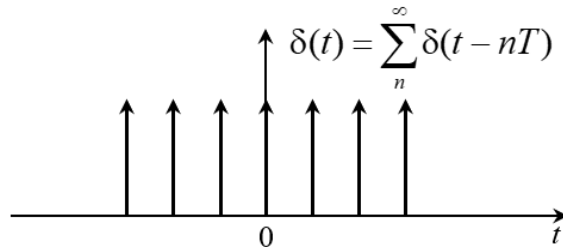


Рисунок 6.2 – Дискретизирующая последовательность

Интервал $T = n\Delta t$ называют периодом дискретизации, а обратную величину $f = \frac{1}{T}$ – частотой дискретизации.

Значения последовательности в моменты времени nT называют отсчетами.

Дискретизация по времени может быть равномерной и неравномерной. При равномерной дискретизации аналогового сигнала интервал между отсчетами неизменен ($\Delta_T = \text{const}$). Равномерная дискретизация характеризуется простым алгоритмом, при ней нет необходимости регистрировать время взятия отсчета.

При неравномерной дискретизации сигнала по времени интервал между отсчетами изменяется или по случайному закону или с учетом характеристик сигнала (адаптивная дискретизация).

Шаг дискретизации Δ следует выбирать из двух условий:

- 1) измеряется количество отсчетов существующего сигнала;
- 2) по полученным цифрам отсчетов исходный сигнал должен быть восстановлен с данной точностью.

Существует ряд способов дискретизации сигналов по времени. Один из них базируется на теореме Котельникова: *произвольный сигнал $s(t)$, спектр которого ограничен некоторой частотой F_B , может быть полностью восстановлен по последовательности своих отсчетных значений, следующих с интервалом времени*

$$\Delta t = \frac{1}{2F_B}. \quad (6.2)$$

Интервал дискретизации Δt и верхнюю частоту $F_B = F_d$ (6.2) в теории сигналов часто называют *интервалом (барьером)* и *частотой Найквиста* соответственно [5].

Аналитически теорема Котельникова записывается следующим образом:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(k\Delta_T) \frac{\sin[2\pi F_B(t - k\Delta_T)]}{2\pi F_B(t - k\Delta_T)}. \quad (6.3)$$

Простейшие сигналы вида

$$s_k(t) = \frac{\sin[\omega_B(t - k\Delta_T)]}{\omega_B(t - k\Delta_T)}, \quad (6.4)$$

ортогональные на временном интервале $[-\infty, \infty]$, называют функциями отсчетов, базисными функциями, или функциями Котельникова.

График k -й функции Котельникова представлен на рисунке 6.3. Каждая базисная функция Котельникова $s_k(t)$ сдвинута относительно соседней функции или $s_{k+1}(t)$ на интервал дискретизации Δ_T . Элементарный анализ соотношения (6.4) и ее графика показывает, что сигнал $s_k(t)$ отражается известной функцией $\sin x/x$, характеризующей огибающую спектральной плотности прямоугольного видеоимпульса.

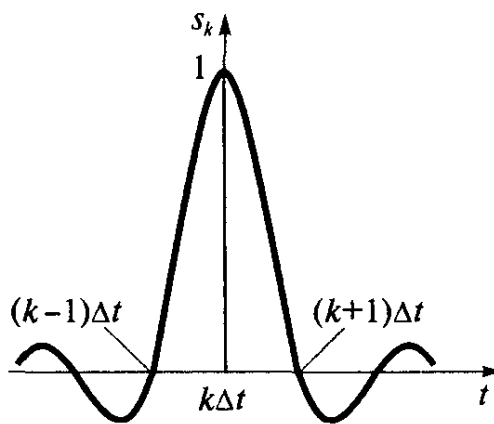


Рисунок 6.3 – График функции отсчетов

6.2 Индивидуальное задание

Ознакомиться с основными принципами дискретизации сигналов. Решить следующие задачи.

6.2.1 Экспоненциальный видеоимпульс $s(t) = S_0 \exp(-at)$ дискретизируется во времени с шагом Δ . Выбрать f_{nm} и величину A таким образом, чтобы на граничной частоте $\omega_{гр} = \pi/\Delta$ модуль спектральной плотности $S_u(\omega_{гр})$ уменьшался до уровня $0,01S_u(0)$.

6.2.2 Сигнал $s(t) = \sin(2\pi \cdot 100t)$ дискретизирован с шагом $T_d = 1/400$. Определить результирующую последовательность.

6.2.3 Сигнал $s(t) = \cos(4000\pi t)$ дискретизирован с шагом T_d с результатом $x[n] = \cos(n\pi/3)$. Определить T_d .

6.2.4 Сигнал $s(t) = \sin(20\pi t) + \cos(40\pi t)$ дискретизирован с шагом T_d с результатом $x[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right)$. Определить T_d .

6.2.5 Аналоговый сигнал $x(t)$ имеет спектр, ограниченный верхней граничной частотой $f_b = 7,5$ МГц. В некотором устройстве обработки (например, в осциллографе с памятью) проводится запись отрезка такого сигнала длительностью $T = 60$ мкс. Устройство осуществляет дискретизацию колебания таким образом, что длительность интервала между выборками в 4 раза короче того значения, которое устанавливает теорема Котельникова. Каждое выборочное значение отображается 8-битовым двоичным числом. Определить величину N – объем памяти (бит), требуемую для записи данного отрезка сигнала.

6.2.6 Используя теорему Котельникова, продискретизировать сигнал $s(t) = S_0 \cos \Omega t$.

6.2.7 Дискретизированный в соответствии с теоремой Котельникова непрерывный сигнал имеет три отсчёта на временной оси (рисунок 6.4). Вычислить мгновенное значение непрерывного сигнала в момент времени $t = 1$ мкс.

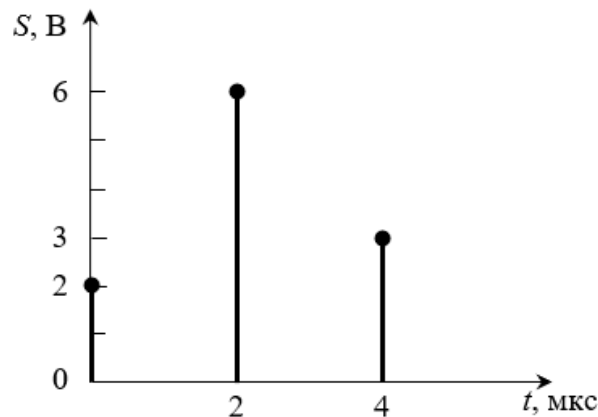


Рисунок 6.4 – Дискретный процесс x

6.2.8 По заданной выборке $[S(0) = 1, S(t) = -2, S(2T) = 1]$ восстановить аналоговый сигнал, используя ряд Котельникова.

Контрольные вопросы

- 1 Что такое дискретизация сигнала?
- 2 Назовите основные виды дискретизации.
- 3 Как выполняется равномерная дискретизация?

- 4 Что такое неравномерная дискретизация?
- 5 Как определить период дискретизации?
- 6 Из каких условий выбирается частота дискретизации?
- 7 Сформулируйте теорему Котельникова.
- 8 Какие ограничения накладывает на сигнал теорема Котельникова?
- 9 Как рассчитать число отсчетов дискретного сигнала?
- 10 Будет ли зависеть ошибка, возникающая при аппроксимации сигнала рядом Котельникова, от длительности отсчета и количества отсчетов?

7 Дискретное преобразование Фурье. Быстрое преобразование Фурье

7.1 Основные теоретические положения

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) – одна из двух наиболее распространенных процедур цифровой обработки сигналов. ДПФ позволяет анализировать, преобразовывать и синтезировать сигналы такими способами, которые невозможны при непрерывной (аналоговой) обработке [5].

ДПФ – это математическая процедура, используемая для определения гармонического, или частотного, состава дискретных сигналов. Истоком ДПФ является непрерывное преобразование Фурье $S(f)$, которое определяется как

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt, \quad (7.1)$$

где $s(t)$ – некоторый непрерывный сигнал во временной области.

В области обработки непрерывных сигналов (7.1) используется для преобразования аналитического выражения для непрерывной временной функции $s(t)$ в непрерывную функцию $S(f)$ в частотной области. Последующее вычисление значений выражения $S(f)$ дает возможность определить частотный состав любого сигнала, используемого на практике, и открывает широкий спектр возможностей для анализа и обработки сигналов в физике и технике.

Пусть задана исходная последовательность N комплексных чисел (значения сигнала в N точках выборки): x_0, x_1, \dots, x_{N-1} . Последовательность N комплексных чисел X_0, X_1, \dots, X_{N-1} , вычисляемая из исходной по формуле

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi nm/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) [\cos(2\pi nm/N) - j \sin(2\pi nm/N)], \quad (7.2)$$

называется дискретным преобразованием Фурье (*DFT*) исходной последовательности.

В формуле (7.2) приняты следующие обозначения:

$X(m)$ – m -й компонент ДПФ, т. е. $X(0)$, $X(1)$, $X(2)$ и т. д;

m – индекс ДПФ в частотной области, $m = 0, 1, 2, \dots, N - 1$;

$x(n)$ – последовательность входных отсчетов $x(0)$, $x(1)$, $x(2)$ и т. д;

n – временной индекс входных отсчетов, $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$;

N – количество отсчетов входной последовательности и количество частотных отсчетов результата ДПФ.

Обратное дискретное преобразование Фурье вычисляется по формуле

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) e^{j2\pi nm/N} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) [\cos(2\pi nm/N) + j \sin(2\pi nm/N)]. \quad (7.3)$$

Быстрым преобразованием Фурье (БПФ) называют набор алгоритмов, реализация которых приводит к существенному уменьшению вычислительной сложности ДПФ. Основная идея БПФ состоит в том, чтобы разбить исходный N -отсчетный сигнал $x(n)$ на два более коротких сигнала, ДПФ которых могут быть скомбинированы таким образом, чтобы получить ДПФ исходного N -отсчетного сигнала.

Так, если исходный N -отсчетный сигнал разбить на два $N/2$ -отсчетных сигнала, то для вычисления ДПФ каждого из них потребуется около $(N/2)^2$ комплексных умножений. Тогда для вычисления искомого N -отсчетного ДПФ потребуется порядка $2(N/2)^2 = N^2/2$ комплексных умножений, т. е. вдвое меньше по сравнению с прямым вычислением. Операцию разбиения можно повторить, вычисляя вместо $(N/2)$ -отсчетного ДПФ два $(N/4)$ -отсчетных ДПФ и сокращая тем самым объем вычислений еще в 2 раза. Выигрыш в 2 раза является приблизительным, поскольку не учитывается, каким образом из ДПФ меньшего размера образуется искомое N -отсчетное ДПФ.

Идея, лежащая в основе БПФ и схематично показанная на рисунке 7.1, заключается в следующем:

– исходная N -точечная последовательность $x[n]$ ($n = \overline{0, N-1}$) разбивается на две более короткие $(N/2)$ -точечные последовательности $g[n]$ и $h[n]$, где $n = \overline{0, N/2-1}$;

– вычисляются ДПФ $_{N/2}$ $G[m]$ и $H[m]$ $m = \overline{0, N/2-1}$ этих последовательностей;

– из двух полученных ДПФ_{N/2} $G[m]$ и $H[m]$ $m = \overline{0, N/2-1}$ конструируются ДПФ_N $X[m]$ $m = \overline{0, N-1}$ исходной N -точечной последовательности $x[n]$ ($n = \overline{0, N-1}$).

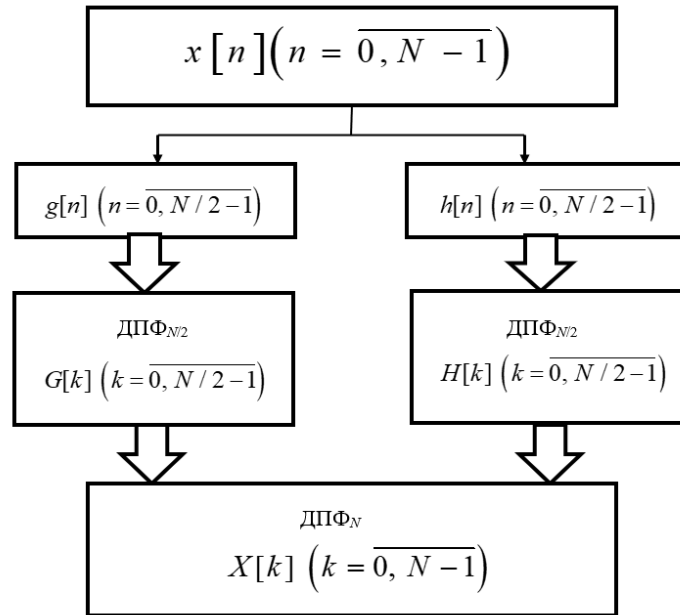


Рисунок 7.1 – Разложение ДПФ_N на два ДПФ_{N/2}

Существует большое количество алгоритмов БПФ. Однако все они являются частными случаями единого алгоритма, базирующегося на задаче разбиения одного массива чисел на два.

Первый алгоритм называется **алгоритмом БПФ с прореживанием по времени**. Суть данного алгоритма состоит в следующем: $(N/2)$ -точечная последовательность $g[n]$ $n = \overline{0, N/2-1}$ формируется из отсчетов исходной N -точечной последовательности $x[n]$ ($n = \overline{0, N-1}$) с четными номерами, а последовательность $h[n]$ $n = \overline{0, N/2-1}$ из отсчетов с нечетными номерами.

Выражение для ДПФ_N имеет следующий вид:

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{mn} = \sum_{n-\text{четное}} x[n] W_N^{mn} + \sum_{n-\text{нечетное}} x[n] W_N^{mn},$$

где W – поворачивающийся множитель, $W = \exp\left(-j \frac{2\pi}{N}\right)$. Это вектор на комплексной плоскости.

Заменяя индексы суммирования $n = 2r$ при четных n и $n = 2r + 1$ при нечетных n , будем иметь

$$X(m) = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r]W_N^{2mr} + \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1]W_N^{(2r+1)m} = \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r](W_N^2)^{mr} + W_N^m \sum_{r=0}^{N/2-1} x[2r+1](W_N^2)^{mr}. \quad (7.4)$$

С учетом равенства (7.3) и способа разбиения N -точечной последовательности на две $(N/2)$ -точечные, перепишем выражение (7.4) в следующем виде:

$$X(m) = \sum_{r=0}^{N/2-1} g[n](W_{N/2})^{nm} + W_N^m \sum_{r=0}^{N/2-1} h[n](W_{N/2})^{nm}. \quad (7.5)$$

Суммы в (7.5) представляют собой $(N/2)$ -точечные ДПФ, т. е. ДПФ $_{N/2}$:

$$\begin{cases} G(m) = \sum_{r=0}^{N/2-1} g[n](W_{N/2})^{nm}, & m = \overline{0, N/2-1}; \\ H(m) = \sum_{r=0}^{N/2-1} h[n](W_{N/2})^{nm}, & m = \overline{0, N/2-1}. \end{cases} \quad (7.6)$$

Поэтому

$$X(m) = G(m) + W_N^m H(m). \quad (7.7)$$

Поскольку ДПФ $_N$ $X(m)$ определено при $m = \overline{0, N-1}$, а ДПФ $_{N/2}$ $G(m)$ $H(m)$ определены лишь при $m = \overline{0, N/2-1}$, формулу (7.7) необходимо доопределить для $m = \overline{N/2, N/2-1}$.

Учитывая, что ДПФ $_{N/2}$ имеет периодический характер с периодом $N/2$ отсчетов, то

$$G(m) = G(m + N/2); \quad H(m) = H(m + N/2). \quad (7.8)$$

Запишем выражение (7.8) в виде

$$X(m) = \begin{cases} G(m) + W_N^m H(m), & m = \overline{0, N/2-1}; \\ G(m - N/2) + W_N^{m-N/2} H(m - N/2), & m = \overline{N/2, N/2-1}. \end{cases} \quad (7.9)$$

Алгоритм (7.9) удобно представлять в виде направленного графа, что позволяет формализовать вычисления. На рисунке 7.2 изображен граф базовой операции БПФ с прореживанием по времени, называемой «бабочкой».

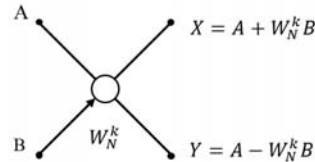


Рисунок 7.2 – Базовая операция «бабочка» алгоритма БПФ с прореживанием по времени

Базовая операция «бабочка» ставит в соответствие двум входным (в общем случае комплексным) числам A и B два выходных числа X и Y по следующему правилу:

$$\begin{cases} X = A + W_N^m B; \\ Y = A - W_N^m B. \end{cases} \quad (7.10)$$

Белый кружок в центре «бабочки» обозначает операцию сложения/вычитания, а стрелка – операцию умножения на поворачивающий множитель W_N^m , верхний выход соответствует сумме, а нижний – разности. Правило (7.10) отвечает алгоритму (7.9) объединения двух ДПФ $_{N/2}$ в одно ДПФ $_{N/2}$, при этом используется $N/2$ «бабочек». Поскольку для каждой базовой операции необходимо выполнить одно комплексное умножение и два комплексных сложения, объединение двух ДПФ $_{N/2}$ в одно ДПФ $_N$ требует $N/2$ комплексных умножений и N комплексных сложений.

Например, на рисунке 7.3 представлен направленный граф для реализации БПФ с прореживанием по времени для последовательности, содержащей восемь отсчетов.

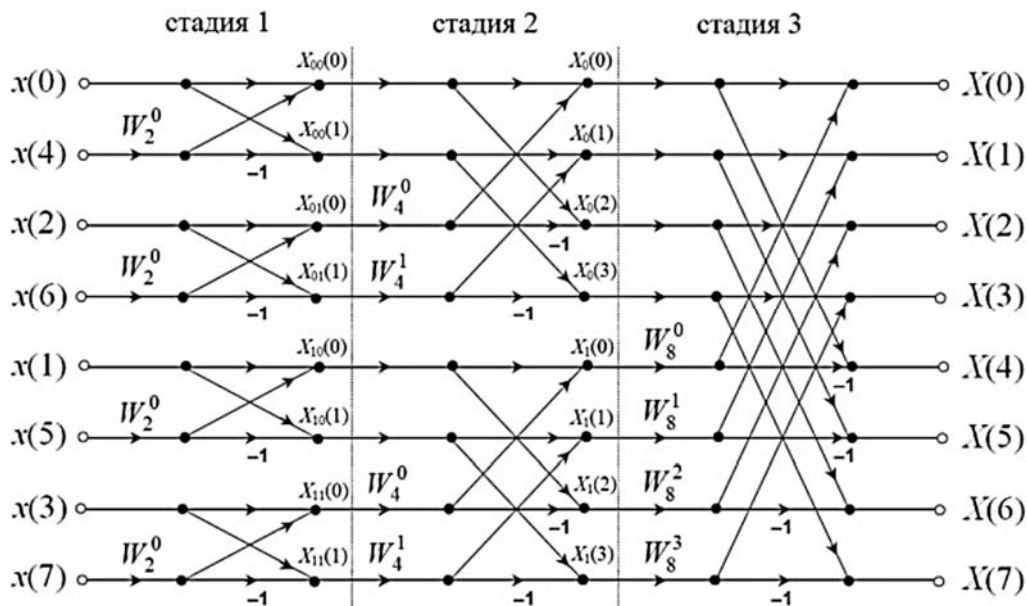


Рисунок 7.3 – Направленный граф 8-точечного БПФ с прореживанием по времени

Алгоритм с прореживанием по частоте. В алгоритме БПФ с прореживанием по частоте $(N/2)$ -точечная последовательность $g(n)$ ($n = \overline{0, N/2-1}$) формируется из первой, а $(N/2)$ -точечная последовательность $h(n)$ ($n = \overline{0, N/2-1}$) – из второй половины отсчетов исходной N -точечной последовательности $x[n]$ ($n = \overline{0, N-1}$).

Выражение для ДПФ $_N$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} X(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{mn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] W_N^{mn} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] W_N^{mn} = \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n] W_N^{mn} + W_N^{m(N/2)} \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n+N/2] W_N^{mn}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Выражение (7.11) состоит из двух сумм по $N/2$ слагаемых, но каждая из них не является ДПФ $_{N/2}$, т. к. содержит в качестве поворачивающихся множителей W_N^{kn} , а не $W_{N/2}^{kn}$.

Объединяя в (7.11) обе суммы и используя соотношение

$$W_N^{(N/2)k} = e^{-j\frac{2\pi N}{N2}k} = (e^{-j\pi})^k = (-1)^k, \quad (7.12)$$

получим

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left\{ x[n] + (-1)^m x[n+N/2] \right\} W_N^{mn} = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left\{ g[n] + (-1)^m h[n] \right\} W_N^{mn}. \quad (7.13)$$

С учетом четности и нечетности отсчетов алгоритм БПФ с прореживанием по частоте запишется в следующем виде:

$$X(m) = \begin{cases} G(m) + H(m), & m = \overline{0, N/2-1}; \\ (G(m) + H(m)) W_N^m, & m = \overline{0, N/2-1}. \end{cases} \quad (7.14)$$

Базовая операция «бабочка» в алгоритме БПФ с прореживанием по частоте представлена на рисунке 7.4.

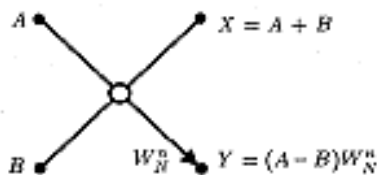


Рисунок 7.4 – Базовая операция «бабочка» алгоритма ДПФ с прореживанием по частоте

В соответствии с рисунком 7.4,

$$\begin{cases} X = A + B; \\ Y = (A - B)W_N^m. \end{cases} \quad (7.15)$$

На рисунке 7.5 представлен граф БПФ с прореживанием по частоте для последовательности из восьми отсчетов.

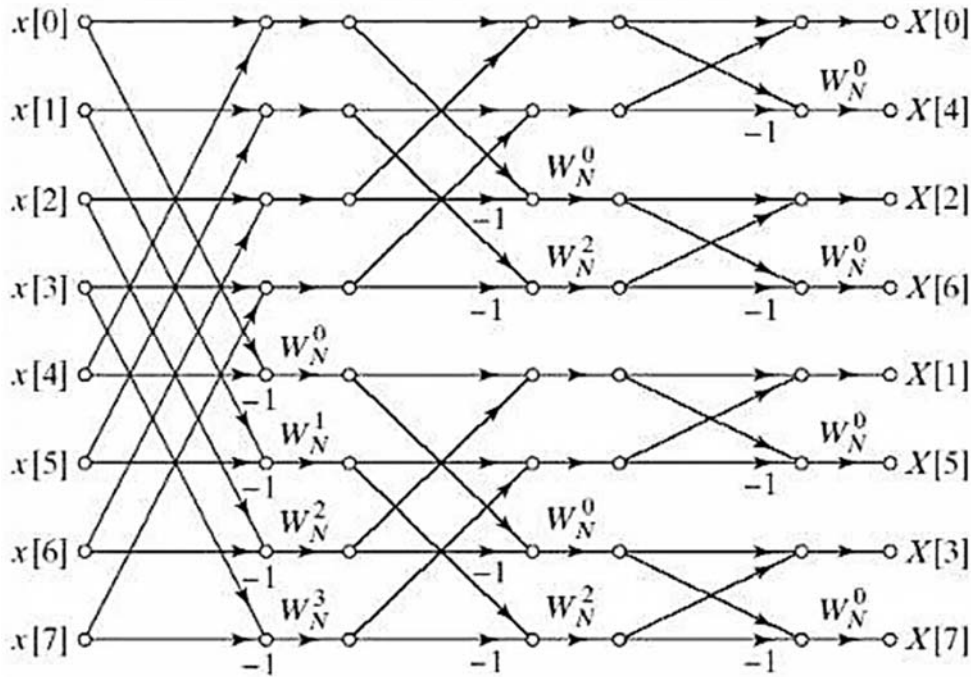


Рисунок 7.5 – Направленный граф 8-точечного БПФ с прореживанием по времени

7.2 Индивидуальное задание

Ознакомьтесь с основными теоретическими положениями, решить следующие задачи.

7.2.1 Имеется числовая последовательность, состоящая из четырех отсчетов $x = \{0,5; 1; 1; 0,5\}$. Используя ДПФ и БПФ найти отсчеты этой последовательности в частотной области. Сравнить вычислительные затраты на реализацию ДПФ и БПФ этой последовательности.

7.2.2 Найти последовательность, ДПФ которой описывается выражением $X[m] = \delta[m]$, $m = \overline{0, N-1}$.

7.2.3 Определить ДПФ последовательности $x[n] = 7 - 2n$, $n = \overline{0, 7}$.

7.2.4 Найти ДПФ и БПФ последовательности вида $x[n] = 0,125 + 0,25 \sin(0,5\pi n)$, $n = \overline{0, 7}$.

7.2.5 Найти при $n = \overline{0, 7}$ ДПФ и БПФ последовательности вида $x[n] = 2 + 0,5 \sin(0,25\pi n)$.

Контрольные вопросы

- 1 Что такое ДПФ?
- 2 Запишите формулы для прямого и обратного ДПФ.
- 3 Назовите основные свойства ДПФ.
- 4 В чем сущность алгоритмов БПФ?
- 5 Какие виды алгоритмов чаще всего используются на практике?
- 6 Алгоритм БПФ с прореживанием по времени.
- 7 Алгоритм БПФ с прореживанием по частоте.

8 Модуляция дискретных сигналов

8.1 Основные теоретические положения

В настоящее время все большая часть информации, передаваемой по разнообразным каналам связи, существует в цифровом виде. Это означает, что передаче подлежит не непрерывный (аналоговый) модулирующий сигнал, а последовательность целых чисел n_0, n_1, n_2, \dots , которые могут принимать значения из некоторого фиксированного конечного множества. Эти числа, называемые *символами* (symbol), поступают от источника информации с периодом T , а частота, соответствующая этому периоду, называется *символьной скоростью* (symbol rate): $f_T = 1/T$.

Последовательность передаваемых символов является, очевидно, дискретным сигналом. Поскольку символы принимают значения из конечного множества, этот сигнал фактически является и *квантованным*, т. е. его можно назвать *цифровым* сигналом.

Типичный подход при осуществлении передачи дискретной последовательности символов состоит в следующем. Каждому из возможных значений символа сопоставляется некоторый набор параметров несущего колебания. Эти параметры поддерживаются постоянными в течение интервала T , т. е. до прихода следующего символа.

Такой способ модуляции, когда параметры несущего колебания меняются скачкообразно, называется *манипуляцией* (keying) [1, 5].

Сигналы с дискретной амплитудной модуляцией. Сигналы дискретной амплитудной модуляции характеризуются тем, что амплитуда несущего колебания изменяется в соответствии с управляющим сигналом, который представляет собой последовательности импульсов, обычно прямоугольной формы. При исследовании характеристик сигналов с непрерывной модуляцией

в качестве управляющего сигнала $s(t)$ рассматривался гармонический сигнал. По аналогии с этим, для сигналов с дискретной модуляцией в качестве управляющего сигнала используем периодическую последовательность прямоугольных импульсов

$$s(t) = S_0 \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t-iT}{\tau_{\text{и}}}\right), \quad (8.1)$$

где

$$\text{rect}\left(\frac{t}{\tau_{\text{и}}}\right) = \begin{cases} 1 & \text{при } -\frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{4}; \\ 0 & \text{при } \frac{T}{4} \leq t < \frac{3T}{4}. \end{cases} \quad (8.2)$$

На рисунке 8.1 представлены эюры управляющего сигнала $s(t)$, несущего колебания $u_{\text{нес}}(t)$ и амплитудно-манипулированного сигнала $u_{\text{АТ}}(t)$. Здесь и далее будем полагать амплитуду импульсов управляющего сигнала $s(t)$ равной $S_0 = 1$, а начальную фазу несущего колебания $\varphi_0 = 0$. Тогда сигнал с дискретной амплитудной модуляцией можно записать следующим образом:

$$u_{\text{АТ}}(t) = s(t) \cdot u_{\text{нес}}(t) = U_m \cdot s(t) \cos \omega_0 t. \quad (8.3)$$

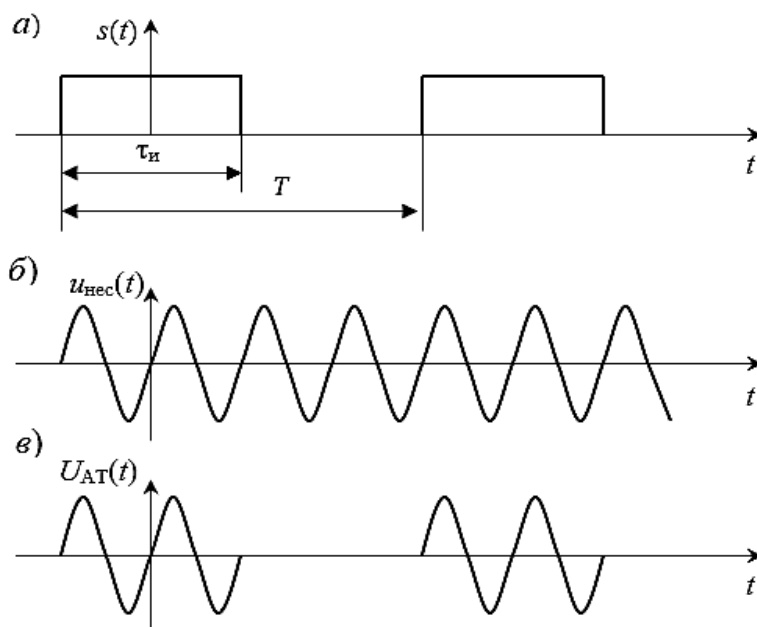


Рисунок 8.1 – Амплитудная манипуляция

Сигналы с дискретной частотной модуляцией. При анализе сигналов с дискретной угловой модуляцией удобно в качестве модулирующего сиг-

нала $s(t)$ использовать периодическую последовательность прямоугольных импульсов вида «меандр». Тогда управляющий сигнал на интервале времени $\left(-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}\right)$ принимает значение $s(t) = -S_0$, а на интервале времени $\left(\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right)$ – значение $s(t) = S_0$, $S_0 = 1$.

Частотная модуляция сигнала описывается выражением

$$u_{\text{ЧМ}}(t) = U_m \cos \left[\omega_0 t + \Delta\omega_{\text{д}} \int_0^t s(t_1) dt_1 + \varphi_0 \right]. \quad (8.4)$$

Тогда с учётом того, что на интервале $\left(-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}\right)$ управляющий сигнал $s(t) = -1$, а на интервале $\left(\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right)$ управляющий сигнал $s(t) = 1$, проведя операцию интегрирования, получим выражение сигнала ЧМ:

$$u_{\text{ЧМ}}(t) = \begin{cases} U_m \cos(\omega_0 t - \Delta\omega_{\text{д}} t) = U_m \cos(\omega_0 - \Delta\omega_{\text{д}})t & \text{при } -\frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{4}; \\ U_m \cos(\omega_0 t + \Delta\omega_{\text{д}} t) = U_m \cos(\omega_0 + \Delta\omega_{\text{д}})t & \text{при } \frac{T}{4} \leq t < \frac{3T}{4}. \end{cases} \quad (8.5)$$

На рисунке 8.2 приведены временные диаграммы управляющего сигнала $s(t)$ несущего колебания $u_{\text{нес}}(t)$ и сигнала дискретной частотной модуляции $u_{\text{ЧТ}}(t)$.

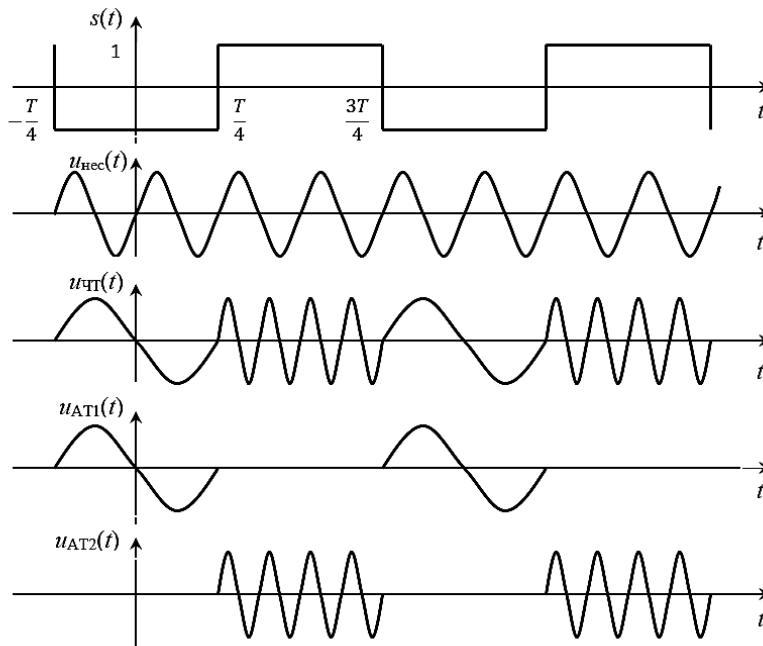


Рисунок 8.2 – Сигнал частотной модуляции

Сигналы с дискретной фазовой модуляцией. Сигнал с фазовой модуляцией описывается выражением

$$u_{\text{ФМ}}(t) = U_m \cdot \cos[\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\varphi_d \cdot s(t)], \quad (8.6)$$

где $\Delta\varphi_d$ – девиация фазы;

φ_0 – начальная фаза колебания несущей частоты.

Если при формировании сигнала дискретной фазовой модуляции используется периодическая последовательность прямоугольных импульсов, то выражение для сигнала дискретной фазовой модуляции принимает вид

$$u_{\text{ФТ}}(t) = \begin{cases} U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\varphi_d) & \text{при } -\frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{4}; \\ U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) & \text{при } \frac{T}{4} \leq t < \frac{3T}{4}. \end{cases} \quad (8.7)$$

При использовании «меандра» в качестве управляющего сигнала сигнал дискретной частотной модуляции записывается следующим образом:

$$u_{\text{ФТ}}(t) = \begin{cases} U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0 - \Delta\varphi_d) & \text{при } -\frac{T}{4} \leq t < \frac{T}{4}; \\ U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \Delta\varphi_d) & \text{при } \frac{T}{4} \leq t < \frac{3T}{4}. \end{cases} \quad (8.8)$$

8.2 Индивидуальное задание

Ознакомиться с основными теоретическими положениями по модуляции цифровых сигналов. Решить следующие задачи.

8.2.1 Рассчитать и построить спектр амплитудно-манипулированного сигнала, если амплитуда носителя равна 10 В, период модулирующего сигнала $T = 50$ мкс, длительность элементарного сигнала $\tau = 50$ мс, частота носителя $F_1 = 100$ Гц, а модуляция производится однополярными импульсами с амплитудой 1 В.

8.2.2 Рассчитать и построить амплитудный и частотный спектры сигнала, если носитель описывается выражением $U_n(t) = 20 \sin 400\pi t$, модулируемого

видеоимпульсами $c(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{5} \cos(40k\pi t)$.

8.2.3 Построить амплитудно-частотный спектр фазоманипулированного сигнала, если модуляция происходит на угол $\Delta\varphi = 90^\circ$, амплитуда носителя – 30 В, скважность – 3, частота – 20 Гц, частота носителя – 1 кГц.

8.2.4 Синусоидальный носитель $U_n(t) = 500\sin 1000\pi t$ модулируется по фазе на угол $\Delta\varphi = 90^\circ$. Построить амплитудный спектр ФМ-сигнала, если модулирующий сигнал имеет вид $c(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{3} \cos(20k\pi t)$.

8.2.5 Рассчитать и построить спектр ЧМ-сигнала, если частота носителя – 200 Гц, индекс модуляции – 5, амплитуда носителя – 40 В, частота модулирующего сигнала 20 Гц.

Контрольные вопросы

- 1 Что такое манипуляция?
- 2 Назовите основные виды цифровой модуляции.
- 3 Как описывается сигнал с дискретной амплитудной модуляцией?
- 4 Как определить спектр сигнала с дискретной амплитудной модуляцией?
Чем он отличается от спектра аналогового АМ-сигнала?
- 5 Как определяется сигнал с дискретной частотной модуляцией?
- 6 Как определяется сигнал с дискретной фазовой модуляцией?

9 Расчет характеристик цифровых систем обработки информации

9.1 Основные теоретические положения

В связи с развитием вычислительной техники особое значение для оценки параметров систем обработки информации приобрело использование кусочно-постоянных функций. Кусочно-постоянной функцией называется функция, область определения которой разбивается на интервалы, на каждом из которых функция постоянна. Основными среди таких функций являются функции Уолша и Хаара [5].

Они заданы для значений t в интервале от 0 до T (в интервале $\theta = t/T$ от 0 до 1). Любые две из этих функций взаимно ортогональны: их произведение равно нулю во всем указанном интервале, и имеются участки, для которых каждая из функций, будучи умноженной на саму себя, не равна нулю. Для того чтобы кусочно-постоянные базисные ортогональные функции могли использоваться при обработке информации, нужно, чтобы так же, как синусоиды и косинусоиды, они принимали не только положительные, но и отрицательные значения.

Функции Хаара. Систему ортогональных функций Хаара $\{\chi_n(x)\}$ можно использовать в качестве базисной при разложении в неравномерно сходящийся ряд Фурье – Хаара любой непрерывной на отрезке $[0,1]$ функции $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \chi_n(x) \quad (9.1)$$

с коэффициентами

$$c_n = \int_0^1 f(x) \chi_n(x) dx. \quad (9.2)$$

При использовании функции Хаара в качестве базисных для аппроксимации сигналов $S(t)$ на отрезке $[0, T]$ многочленами Фурье безразмерный аргумент x функции Хаара необходимо заменить на at , где коэффициент $a = \frac{1}{T}$ задает необходимый временной масштаб функций и имеет размерность времени в минус первой степени.

В определении функции Хаара используется понятие двоичных отрезков. Отрезки, которые можно получить делением отрезка $[0, 1]$ на 2^m равных частей, называются двоичными. Эти отрезки считаются замкнутыми слева и с открытыми справа, если их правый конец отличен от 1. Если правый конец отрезка равен 1, то отрезок считается замкнутым и справа. Таким образом, двоичные отрезки – $[0, 1]$, $[0, 1/2)$, $[1/2, 1]$, $[0, 1/4)$, $[1/4, 1/2)$, $[1/2, 3/4)$, $[3/4, 1]$, $[0, 1/8)$. Отрезки $[1/4, 3/4)$ или $[5/8, 7/8)$ двоичными не считаются.

Для двоичных отрезков введем следующее обозначение:

$$l_{mj} = \left[\frac{j-1}{2^{m-1}}, \frac{j}{2^{m-1}} \right), \quad (9.3)$$

где j меняется от 1 до 2^{m-1} , а $m = 1, 2, \dots$ (при $j = 2^{m-1}$ надо считать l_{mj} замкнутым также справа).

Для каждого m выполняется $l_{m1} + l_{m2} + l_{m3} + \dots + l_{m, 2^{m-1}} = [0, 1]$.

Наряду с двойной нумерацией будем использовать простую нумерацию, полагая $l_{mj} = l_n$, где $n = 2^{m-1} + j$. При такой нумерации $n = 2, 3, \dots$ (отрезок с $n = 1$ отсутствует).

Левую и правую половины l_{mj} обозначают l_{mj}^- и l_{mj}^+ , так что $l_{mj}^- + l_{mj}^+ = l_{mj}$.

Систему функций Хаара $\{\chi_n(x)\}$ удобно строить группами: группа номер m содержит 2^{m-1} функций $\{\chi_n(x)\}$, $j = 1, 2, \dots, 2^{m-1}$; $m = 1, 2, \dots$, причем первая функция $\chi_1(x) = 1$ остается вне групп.

Определение функций Хаара:

$$\chi_{mj}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } x \in l_{mj}^-; \\ -2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } x \in l_{mj}^+; \\ 0 & \text{при } x \notin l_{mj}. \end{cases} \quad (9.4)$$

На рисунке 9.1 изображены первые восемь функций этой системы.

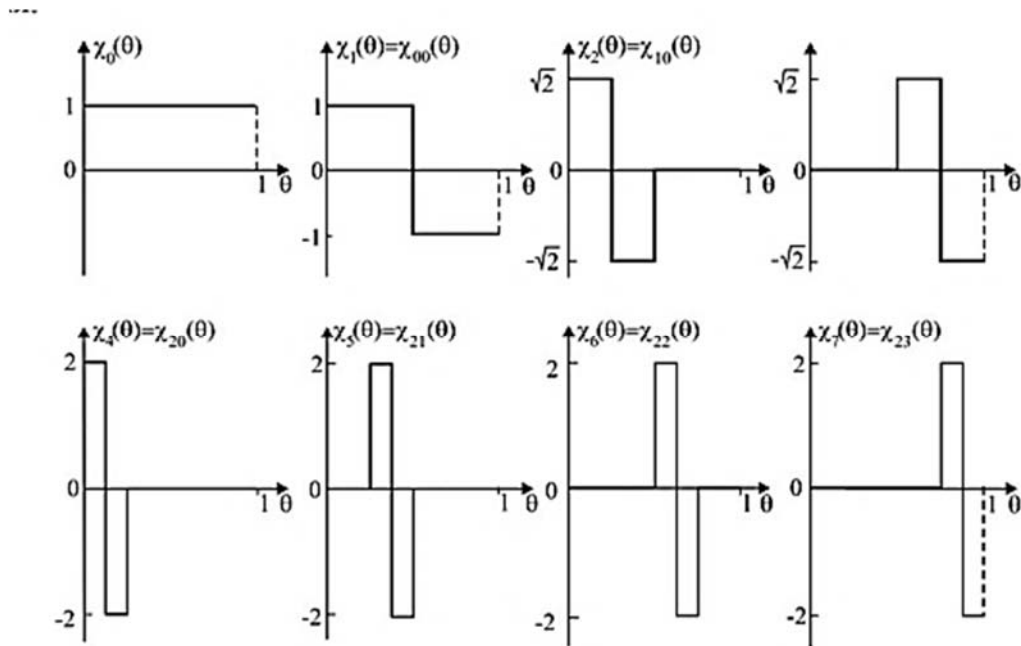


Рисунок 9.1 – Функции Хаара

Функции Уолша. Функции Уолша являются естественным расширением системы функций Радемахера, получены Уолшем в 1923 г. и представляют полную систему ортонормированных прямоугольных функций.

Множество функций Уолша, упорядоченных по частоте, обычно обозначают следующим образом:

$$S_w = \{wal_w(i, t), i = 0, 1, \dots, N - 1\}.$$

$N = 2^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, нижний индекс w показывает, что упорядочение осуществляется по Уолшу (по частоте). Индекс функции i соответствует i -му элементу множества S_w . Обозначим через v_i частоту функции $wal_w(i, t)$. Для определения частоты воспользуемся соотношением

$$v_i = \begin{cases} 0, & i = 0; \\ i/2, & i - \text{четное}; \\ (i+1)/2, & i - \text{нечетное}. \end{cases} \quad (9.5)$$

Функции Уолша, упорядоченные по частоте, аналогично тригонометрическим функциям можно подразделить на четные $cal(i, t)$ и нечетные $sal(i, t)$:

$$wal_w(i, t) = \begin{cases} wal_w(2i, t) = cal(i, t); \\ wal_w(2i - 1, t) = sal(i, t). \end{cases} \quad (9.6)$$

На рисунке 9.2 показаны первые восемь функций $wal_w(i, t)$.

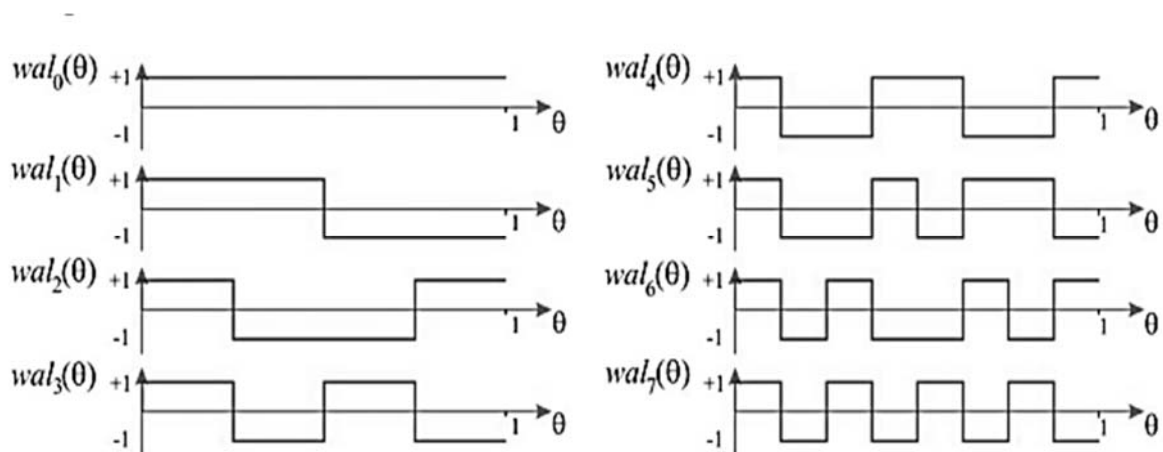


Рисунок 9.2 – Функции Уолша

При этом видно, что частота каждой последующей функции Уолша больше или равняется частоте предыдущей функции Уолша и имеет на одно пересечение нулевого уровня больше в открытом интервале $t \in [0, 1]$. Отсюда и следует название «упорядочение по частоте».

Система функций Уолша является полной ортонормированной системой на интервале $[0, 1]$, т. е. справедливо соотношение

$$\int_0^1 wal(k, x) wal(n, x) dx = \begin{cases} 1 & \text{при } k = n; \\ 0 & \text{при } k \neq n. \end{cases} \quad (9.7)$$

и может служить базисом для спектрального представления сигналов. Любую интегрируемую на интервале $0 \leq x \leq 1$ функцию, являющуюся математической моделью электрического сигнала, можно представить рядом Фурье по системе функций Уолша

$$f(x) = A(0)wal(0, x) + A(1)wal(1, x) + \dots + A(i)wal(i, x) + \dots \quad (9.8)$$

Коэффициенты $A(i)$ находятся по формуле

$$A(i) = \int_0^1 f(x) \text{wal}(i, x) dx, \quad (9.9)$$

где x – безразмерное время, нормированное к произвольному интервалу, $x = \frac{t}{T}$.

Системы обработки информации. В самом общем случае под системой обработки сигналов понимается какой-либо преобразователь входных сигналов в выходные. В простейшем случае система представляет собой устройство (физическое или виртуальное – в виде математической модели) и содержит один входной сигнал и один выходной [5].

Системы делят на линейные и нелинейные. В линейных системах, в отличие от нелинейных, справедлив принцип суперпозиции (реакция системы на сумму сигналов эквивалентна сумме реакций системы на каждый входной сигнал в отдельности).

Система стационарна, если произвольная задержка входного сигнала приводит к такой же задержке выходного сигнала (система с постоянными коэффициентами), в противном случае – система не стационарна. Стационарность системы означает независимость от времени и инвариантность к сдвигу во времени.

Фактически все системы цифровой обработки сигналов являются линейными инвариантными во времени системами (сокращенное название ЛИС или ЛИВ). Дискретные ЛИС описываются:

– во временной области – импульсной характеристикой (реакция системы на единичный импульс);

– в частотной области – функцией передачи (передаточной функцией).

Рассмотрим простейшую ЛИС, на вход которой подан входной дискретный (или цифровой) сигнал $x(n)$ и на выходе наблюдается выходной дискретный (или цифровой) сигнал $y(n)$. Структурная схема такой системы представлена на рисунке 9.3.



Рисунок 9.3 – Структура простейшей ЛИС

Тогда, зная импульсную характеристику системы $h(n)$, можно связать выходной сигнал с входным посредством разностного уравнения

$$\sum_n a_n y(k-n) = \sum_m b_m x(k-n), \quad (9.10)$$

где коэффициенты a_n, b_m полностью характеризуют импульсную характеристику системы $h(n)$ и определяют ее передаточную функцию.

В общем случае (теоретически) пределы индексов могут быть и отрицательными. Это означает, что текущий отсчет системы зависит не только от предыстории, но и от будущего (т. е. требует знания отсчетов, которые будут получены). Поэтому, если отклик системы равен нулю $h(k) = 0$ при $k < 0$ (отклик системы зависит только от предыстории), то систему называют каузальной (причинной). В такой системе реакция на входной сигнал появляется только после поступления сигнала на ее вход. Некаузальные системы физически невозможно реализовать в реальном масштабе времени. Если требуется реализовать свертку сигналов с двусторонними операторами (например, при дифференцировании, преобразовании Гильберта и т. п.), то это выполняется задержкой (сдвигом) входного сигнала (обычно на количество отрицательных индексов в выражении свертки).

Пример вычисления дискретной свертки сигналов представлен на рисунке 9.4.

		$x(k)$	2	1	3	-1	
$y(0-k)$	2	1	-1				$f(0) = 2 \cdot (-1) = -2$
$y(1-k)$	2	1	-1				$f(1) = 2 - 1 = 1$
$y(2-k)$	2	1	-1				$f(2) = 2 \cdot 2 + 1 - 3 = 2$
$y(3-k)$	2	1	-1				$f(3) = 2 + 3 + 1 = 6$
$y(4-k)$	2	1	-1				$f(4) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$
$y(5-k)$	2	1	-1				$f(5) = -2$

Рисунок 9.4 – Пример вычисления дискретной свертки

Зная импульсную характеристику системы $h(k)$ (как множество отсчетов длины K) всегда можно рассчитать отклик $y(n)$ на любую входную последовательность $x(n)$:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{K-1} x(n-k)h(k). \quad (9.11)$$

Свертке во временной области соответствует произведение Фурье образов функций в частотной области. Если известно $h(n)$, то возможно рассчитать

(с помощью ДПФ) спектр импульсной характеристики $H(k)$ – передаточная функция системы. Аналогично для входного сигнала $x(n)$ рассчитаем спектр $X(k)$.

9.2 Индивидуальное задание

Ознакомьтесь с основным теоретическим материалом по функциям Хаара, функциям Уолша, основным характеристикам цифровых систем обработки информации. Решить следующие задачи.

9.2.1 Рассчитать значения первых восьми коэффициентов разложения в ряд Фурье – Уолша – Хаара следующих сигналов:

$$S(t) = \begin{cases} \frac{2E}{T}t & \text{при } 0 < t < \frac{T}{2}; \\ \frac{2E}{T}\left(\frac{T}{2} - t\right) & \text{при } \frac{T}{2} < t < T; \end{cases} \quad S(t) = \begin{cases} E(1 - e^{-\alpha t}) & \text{при } 0 < t < \frac{T}{2}; \\ Ee^{-\alpha\left(\frac{T}{2} - t\right)} & \text{при } \frac{T}{2} < t < T. \end{cases}$$

9.2.2 Разложить в ряд Уолша, ограничиваясь первыми восемью функциями Уолша, функции $\sin x$, $\cos x$ и построить их.

9.2.3 Последовательность $\delta[n]$ имеет один ненулевой отсчёт при $n=0$; остальные отсчёты равны 0. Изобразить графики последовательностей $\delta[n]$, $\delta[n-2]$, $\delta[2-n]$, $\delta[n+2]$.

9.2.4 Последовательность $x[n]$, $n = \overline{-\infty, \infty}$ задана своими значениями 3, 4, 5, 6, 7, соответствующими моментам дискретного времени 0, 1, 2, 3, 4; остальные отсчёты равны 0. Представить $x[n]$ линейной комбинацией сдвинутых последовательностей $\delta[n-k]$, $k = \overline{-\infty, \infty}$.

9.2.5 Построить графики последовательностей вида $c[n] = \cos(\omega n)$ при $\omega = \pi$; при $\omega = 2\pi$; при $\omega = \pi/2$; при $\omega = \pi/5$; при $\omega = 3/5$; при $\omega = 3/2$. Какие из них являются периодическими?

9.2.6 Построить графики последовательностей вида $c[n] = \sin(\omega n)$ при $\omega = \pi/2$; при $\omega = \pi$; при $\omega = \pi/2$; при $\omega = \pi/5$; при $\omega = 3/5$; при $\omega = 3/2$. Какие из них являются периодическими?

9.2.7 Построить график последовательности $x[n] = b^n u[-n]$, выбрав значение b из интервала (0,1).

9.2.8 Определить свертку последовательностей $u[n]$ и $u[n]$ при $n=5$. Значения всех отсчетов равны 1.

9.2.9 Входной сигнал системы $x[n]$, $n = \overline{-\infty, +\infty}$ задан своими значениями 5, 4, 3, 2, 1, соответствующими моментам дискретного времени 0, 1, 2, 3, 4. Остальные отсчеты равны 0. Импульсная характеристика $h[n]$ задана своими значениями 1, 1, 1, 1, 1, соответствующими моментам дискретного време-

ни 0, 1, 2, 3, 4. Остальные отсчеты равны 0. Определить сигнал на выходе системы обработки информации.

9.2.10 Сигнал $x[n]$ задан следующими значениями отсчетов 1, 7, 8, 4, 6. Импульсная характеристика задана отсчетами 1, 2, 3, 4, 8, 9. Определить дискретную свертку этих сигналов.

9.2.11 Сигнал $x[n]$ задан следующими значениями отсчетов 1, 7, 5, 5, 6, 2. Импульсная характеристика задана отсчетами 1, 7, 6, 5, 8, 9. Определить дискретную свертку этих сигналов.

9.2.12 Определить z -преобразование дискретного сигнала $x[n]$, имеющего следующий вид:

$$x[n] = \begin{cases} 0, & n \leq 0; \\ 2, & n = 1 \dots 6; \\ 0, & n > 6. \end{cases}$$

Контрольные вопросы

- 1 Дайте определение функции Хаара.
- 2 Какая функция Хаара $\chi_n(x)$ определена на отрезке $[7/8, 1]$?
- 3 Каким образом вычисляются коэффициенты разложения при представлении сигнала в виде суммы функций Хаара?
- 4 Дайте определение функциям Уолша.
- 5 Как представить сигнал с помощью функций Уолша?
- 6 Дайте определение цифровой системе обработки информации.
- 7 Как классифицируются цифровые системы обработки информации?
- 8 Чем характеризуются цифровые системы обработки информации?
- 9 Как выполняется дискретная свертка?

Список литературы

- 1 **Нефёдов, С. В.** Преобразование измерительных сигналов: учебник / С. В. Нефёдов, А. П. Тарасенко, В. М. Чернова. – Москва: КУРС; ИНФРА-М, 2018. – 224 с.
- 2 **Гадзиковский, В. И.** Цифровая обработка сигналов: учебное пособие / В. И. Гадзиковский. – Москва: СОЛОН-Пр., 2014. – 766 с.
- 3 **Шахтарин, Б. И.** Обнаружение сигналов: учебное пособие / Б. И. Шахтарин. – 3-е изд., стер. – Москва: Горячая линия – Телеком, 2015. – 464 с.
- 4 **Баскаков, С. И.** Радиотехнические цели и сигналы / С. И. Баскаков. – 4-е изд. – Москва: Высшая школа, 2003. – 462 с.
- 5 **Солонина, А. И.** Основы цифровой обработки сигналов. Курс лекций: учебное пособие / А. И. Солонина, Д. А. Улахович, С. М. Арбузов. – 2-е изд. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2005. – 768 с.