УДК 517.925.52

В.Н. ЛАПТИНСКИЙ, В.К. ЛАПКОВСКИЙ, С.В. ПОДОЛЯН

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

В данной работе исследуется задача о периодических периода ω решениях матричного дифференциального уравнения Ляпунова с ω-периодической по t правой частью. На основе метода регуляризации [1, гл. 2] разработана методика получения эквивалентного интегрального уравнения для исследуемой задачи. Для исследования разрешимости полученного интегрального уравнения применены методы теории интегральных уравнений [2, 3]. Разработан эффективный алгоритм типа [1] построения решения.

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение

$$\frac{dX}{dt} = \lambda A(t)X + \lambda X B(t) + F_0(t) + \lambda F_1(t), \quad X \in R^{n\times n}, \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $F_0(t)$, $F_1(t)$ – непрерывные ω-периодические (n x n)-матрицы, λ – скалярный вещественный параметр. Примем следующие обозначения:

$$\alpha = \max_t \|A(t)\|,\ \beta = \max_t \|B(t)\|,\ h_0 = \max_t \|F_0(t)\|,\ h_1 = \max_t \|F_1(t)\|,\ M = \int_0^\omega A(\tau)d\tau,$$

$$N = -\int_0^\omega B(\tau)d\tau,\ \ \varepsilon = |\lambda|,\ \ \gamma = \|\Phi^{-1}\|,\quad q = \frac{1}{2}\gamma\omega^2(\alpha+\beta)^2,\ \ \|X\|_C = \max_t \|X(t)\|,$$

где $t \in [0, \omega]$, Φ – линейный оператор: $\Phi X = MX - XN$, $\|\bullet\|$ – подходящая норма матриц (например, любая из норм, приведенных в [4, с. 21]), C – банахово пространство непрерывных ω-периодических (n x n)-матричных функций.

Согласно [4, с. 216] задача об ω-периодических решениях уравнения (1) эквивалентна периодической краевой задаче для (1) с условием

$$X(0, \lambda) = X(\omega, \lambda). \tag{2}$$

Построим матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2).

Пусть $X = X(t, \lambda)$ – решение этой задачи. Тогда из (1) имеем

$$X(t,\lambda) = X(0,\lambda) + \int_0^t (\lambda A(\tau)X(\tau,\lambda) + \lambda X(\tau,\lambda)B(\tau) + F_0(\tau) + \lambda F_1(\tau))\,d\tau. \quad (3)$$

Полагая в (3) t = ω, получим на основании условия (2) при $\lambda \neq 0$:

$$\int_0^\omega (A(\tau)X(\tau,\lambda) + X(\tau,\lambda)B(\tau))d\tau = -\frac{1}{\lambda}\int_0^\omega F_0(\tau)d\tau - \int_0^\omega F_1(\tau)d\tau. \quad (4)$$

Далее воспользуемся формулой

$$X(\tau,\lambda) = X(t,\lambda) + \int_t^\tau \dot{X}(\sigma,\lambda)d\sigma,$$

где $\dot{X}(\sigma,\lambda) \equiv dX(\sigma,\lambda)/d\sigma$. Используя эту формулу, имеем из (4) в силу (1)

$$\begin{gathered}\int_0^\omega A(\tau)d\tau X(t,\lambda) + X(t,\lambda)\int_0^\omega B(\tau)d\tau + \int_0^\omega A(\tau)(\int_t^\tau (\lambda A(\sigma)X(\sigma,\lambda) + \lambda X(\sigma,\lambda)B(\sigma) + \\ +F_0(\sigma) + \lambda F_1(\sigma))d\sigma)d\tau + \int_0^\omega (\int_t^\tau (\lambda A(\sigma)X(\sigma,\lambda) + \lambda X(\sigma,\lambda)B(\sigma) + F_0(\sigma) + \\ +\lambda F_1(\sigma))d\sigma)B(\tau)d\tau = -\frac{1}{\lambda}\int_0^\omega F_0(\tau)d\tau - \int_0^\omega F_1(\tau)d\tau.\end{gathered} \quad (5)$$

Пусть матрицы M и N не имеют общих характеристических чисел. Тогда согласно [5, с. 207] оператор Φ обратим и уравнение (5) можно записать в следующем виде:

$$\begin{gathered}X(t,\lambda) = \Phi^{-1}\left\{ \int_0^\omega A(\tau)(\int_\tau^t (\lambda A(\sigma)X(\sigma,\lambda) + \lambda X(\sigma,\lambda)B(\sigma) + F_0(\sigma) + \right. \\ +\lambda F_1(\sigma)d\sigma)d\tau + \int_0^\omega (\int_\tau^t (\lambda A(\sigma)X(\sigma,\lambda) + \lambda X(\sigma,\lambda)B(\sigma) + F_0(\sigma) + \lambda F_1(\sigma))d\sigma)B(\tau)d\tau - \\ \left. -\frac{1}{\lambda}\int_0^\omega F_0(\tau)d\tau - \int_0^\omega F_1(\tau)d\tau \right\}.\end{gathered} \quad (6)$$

Таким образом, всякое (классическое) решение задачи (1), (2) удовлетворяет матричному интегральному уравнению (6). Покажем обратное: всякое непрерывное решение уравнения (6) является решением задачи (1), (2). Пусть $X = X(t,\lambda)$ – непрерывное решение уравнения (6). Дифференцируя обе части уравнения (6) по переменной t, получим с учетом перестановочности оператора дифференцирования и оператора Φ^{-1}

$$\frac{dX(t,\lambda)}{dt} = \Phi^{-1}\left\{ \int_0^{\omega} A(\tau)d\tau(\lambda A(t)X(t,\lambda) + \lambda X(t,\lambda)B(t) + F_0(t) + \lambda F_1(t)) + \right.$$

$$\left. +(\lambda A(t)X(t,\lambda) + \lambda X(t,\lambda)B(t) + F_0(t) + \lambda F_1(t))\int_0^{\omega} B(\tau)d\tau \right\},$$

откуда

$$\frac{dX(t,\lambda)}{dt} = \lambda A(t)X(t,\lambda) + \lambda X(t,\lambda)B(t) + F_0(t) + \lambda F_1(t). \qquad (7)$$

Покажем, что данное решение уравнения (6) является ω-периодическим. Из (7) имеем

$$dX(t,\lambda) \equiv \left[\lambda A(t)X(t,\lambda) + \lambda X(t,\lambda)B(t) + F_0(t) + \lambda F_1(t)\right]dt. \qquad (8)$$

Выполнив интегрирование по частям в (6) с учетом (8), получим соотношение

$$\int_0^{\omega} \left[\lambda \dot{A}(t)X(t,\lambda) + \lambda X(t,\lambda)B(t) + F_0(t) + \lambda F_1(t)\right] dt = 0 ;$$

отсюда следует (2).

Таким образом, установлено, что полученное матричное интегральное уравнение (6) в соответствии с [4, с. 216] эквивалентно задаче об ω-периодических решениях дифференциального уравнения (1).

Для исследования разрешимости уравнения (6) воспользуемся методом разложения в ряд по степеням параметра λ [2, 3]. Следуя [1], формальное представление ω-периодического решения будем искать в следующем виде:

$$X(t,\lambda) = \frac{1}{\lambda} X_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k X_k(t). \qquad (9)$$

Для определения неизвестных матриц $X_{k-1}(t), k = 0,1,2...$, подставим (9) в обе части уравнения (6) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях λ. Тогда получим последовательно

$$X_{-1} = -\Phi^{-1}\int_0^{\omega} F_0(\tau)d\tau,$$

$$X_0(t) = \Phi^{-1}\left\{\int_0^{\omega} A(\tau)\left(\int_{\tau}^{t}(A(\sigma)X_{-1} + X_{-1}B(\sigma) + F_0(\sigma))d\sigma\right)d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_0^{\omega}\left(\int_{\tau}^{t}(A(\sigma)X_{-1} + X_{-1}B(\sigma) + F_0(\sigma))d\sigma\right)B(\tau)d\tau - \int_0^{\omega} F_1(\tau)d\tau \right\},$$

$$X_1(t) = \Phi^{-1}\left\{\int_0^{\omega} A(\tau)\left(\int_{\tau}^{t}(A(\sigma)X_0(\sigma) + X_0(\sigma)B(\sigma) + F_1(\sigma))d\sigma\right)d\tau + \right.$$

$$+\int_0^{\omega}\Big(\int_{\tau}^{t}(A(\sigma)X_0(\sigma)+X_0(\sigma)B(\sigma)+F_1(\sigma))d\sigma\Big)B(\tau)d\tau\Bigg\},$$

$$X_{k+1}(t)=\Phi^{-1}\Bigg\{\int_0^{\omega}A(\tau)\Big(\int_{\tau}^{t}(A(\sigma)X_k(\sigma)+X_k(\sigma)B(\sigma))d\sigma\Big)d\tau+$$

$$+\int_0^{\omega}\Big(\int_{\tau}^{t}(A(\sigma)X_k(\sigma)+X_k(\sigma)B(\sigma))d\sigma\Big)B(\tau)d\tau\Bigg\},k=1,2,\dots . \quad (10)$$

Выполнив оценки по норме в (10), получим следующую рекуррентную формулу:

$$\|X_{k+1}\|_C \le q\|X_k\|_C,\ k=1,2,\dots . \quad (11)$$

Из (11) имеем явную оценку

$$\|X_{k+1}\|_C \le q^k\|X_1\|_C,\ k=1,2,\dots . \quad (12)$$

Используя неравенство (12), получим из (9) при $0<|\lambda|<\frac{1}{q}$:

$$\|X(t,\lambda)\|_C \le \frac{1}{\varepsilon}\|X_{-1}\|_C+\|X_0\|_C+\varepsilon\|X_1\|_C+\varepsilon q\|X_1\|_C+\dots+\varepsilon^k q^{k-1}\|X_1\|_C+\dots=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\|X_{-1}\|_C+\|X_0\|_C+\varepsilon\|X_1\|_C\cdot\frac{1}{1-\varepsilon q}. \quad (13)$$

На основании [4, с. 43] можно заключить, что ряд (9) сходится абсолютно и равномерно относительно $t\in R$ в области $0<|\lambda|<\frac{1}{q}$.

Согласно [3, с. 160] сумма $X(t,\lambda)$ этого ряда представляет собой решение уравнения (6) в указанной области. Применяя принцип сжимающих отображений [2, с. 605] к уравнению (6), нетрудно доказать, что при выполнении условия $0<|\lambda|q<1$ это решение единственно. Таким образом, получена

Теорема. Пусть матрицы M, N не имеют общих характеристических чисел. Тогда в области $0<|\lambda|<\frac{1}{q}$ ω-периодическое решение уравнения (1) существует и единственно; оно представимо в виде (9).

Получим оценки, характеризующие скорость сходимости алгоритма (10). Из (9) имеем

$$\|X(t,\lambda)-\tilde{X}_m(t,\lambda)\| \le \varepsilon^{m+1}\|X_{m+1}(t)\|+$$

$$+\varepsilon^{m+2}\|X_{m+2}(t)\|+\dots,\ m=0,1,2,\dots, \quad (14)$$

где

$$\tilde{X}_m(t,\lambda) = \frac{1}{\lambda}X_{-1} + \sum_{k=0}^{m} \lambda^k X_k(t).$$

Выполнив оценки по норме в (14), получим

$$\left\|X(t,\lambda) - \tilde{X}_m(t,\lambda)\right\|_C \le \frac{\left\|X_1\right\|_C}{1 - \varepsilon q}\varepsilon^{m+1}q^m, \qquad m = 0,\ 1,\ 2,\ldots \quad (15)$$

Поскольку для полученного алгоритма имеют место неравенства

$$\left\|X_{-1}\right\|_C \le \gamma\omega h_0,$$

$$\left\|X_0\right\|_C \le q\left\|X_{-1}\right\|_C + \tilde{q}h_0 + \gamma\omega h_1 \le q\cdot\gamma\omega h_0 + \tilde{q}h_0 + \gamma\omega h_1,$$

$$\left\|X_1\right\|_C \le q\left\|X_0\right\|_C + \tilde{q}h_1 \le (h_1 + qh_0)(\tilde{q} + q\gamma\omega),$$

где $\tilde{q} = \dfrac{\gamma\omega^2}{2}(\alpha+\beta)$, то оценки (13), (15) нетрудно привести к коэффициентному виду:

$$\left\|X(t,\lambda)\right\|_C \le \frac{(h_0 + \varepsilon h_1)(\gamma\omega + \varepsilon\tilde{q})}{\varepsilon(1 - \varepsilon q)} = \frac{\gamma\omega(h_0 + \varepsilon h_1)\left[2 + \varepsilon\omega(\alpha+\beta)\right]}{2\varepsilon(1 - \varepsilon q)},$$

$$\left\|X(t,\lambda) - \tilde{X}_m(t,\lambda)\right\|_C \le \frac{(h_1 + qh_0)(\tilde{q} + q\gamma\omega)}{1 - \varepsilon q}\varepsilon^{m+1}q^m =$$

$$= \frac{\varepsilon\gamma(\alpha+\beta)\omega^2\left[\gamma\omega(\alpha+\beta) + 1\right]\cdot\left[\gamma(\alpha+\beta)^2\omega^2 h_0 + 2h_1\right]}{4(1 - \varepsilon q)}\cdot(\varepsilon q)^m.$$

Таким образом, на основе подхода [1] получено аналитическое представление ω-периодического решения уравнения (1) с удобным для применения алгоритмом (10) и эффективно проверяемыми условиями сходимости и скорости сходимости.

Затруднения могут возникнуть при получении оператора, обратного к Φ. Однако при дополнительных предположениях о характеристических числах матриц M и N, для Φ^{-1} имеют место явные аналитические представления [5, 6].

Полученные результаты проиллюстрируем на следующем примере, полагая

$$A(t)=\begin{pmatrix} 1 & 2\cos t \\ \sin t & 1 \end{pmatrix}; \quad B(t)=\begin{pmatrix} 1 & 3\sin t \\ \cos t & 1 \end{pmatrix}; \quad F_0(t)=\begin{pmatrix} 1 & \sin 2t \\ \cos 2t & -1 \end{pmatrix};$$

$$F_1(t)=\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}; \qquad \omega=2\pi.$$

Поскольку $M = 2\pi E$, $N = -2\pi E$, то $\hat{O} = 4\pi E$, где E – единичная (2×2)-матрица. В качестве нормы матриц примем евклидову норму. Тогда

$$\gamma=\frac{\sqrt{2}}{4\pi}, \qquad \alpha=\sqrt{6}\ , \quad \beta=\sqrt{11}, \quad h_0=\sqrt{3}\ , \quad h_1=\sqrt{2}\ ,$$

при этом

$$q=\frac{\pi}{\sqrt{2}}(17+2\sqrt{66}). \tag{16}$$

Согласно доказанной теореме 2π-периодическое решение данного уравнения существует и единственно в проколотой окрестности

$$0 < |\lambda| < \frac{\sqrt{2}}{\pi(17+2\sqrt{66})}.$$

Построим приближенное решение

$$\tilde{X}_1(t,\lambda) \;=\; \frac{1}{\lambda}X_{-1} \;+\; X_0(t) \;+\; \lambda X_1(t), \tag{17}$$

используя разработанный алгоритм. Применительно к рассматриваемому уравнению имеем

$$X_{-1}=-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} F_0(\tau)d\tau, \tag{18}$$

$$X_0(t)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left\{ A(\tau)\int_\tau^t\left[A(\sigma)X_{-1}+X_{-1}B(\sigma)+F_0(\sigma) \right]d\sigma \;+\right.$$

$$\left.\int_\tau^t\left[A(\sigma)X_{-1}+X_{-1}B(\sigma)+F_0(\sigma) \right]d\sigma\, B(\tau)-F_1(\tau) \right\}d\tau, \tag{19}$$

$$X_1(t)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left\{ A(\tau)\int_\tau^t\left[A(\sigma)X_0(\sigma)+X_0(\sigma)B(\sigma)+F_1(\sigma) \right]d\sigma +\right.$$

$$\left.+\int_\tau^t\left[A(\sigma)X_0(\sigma)+X_0(\sigma)B(\sigma)+F_1(\sigma) \right]d\sigma\, B(\tau) \right\}d\tau. \tag{20}$$

Выполнив в (18) – (20) требуемые вычисления, получим соответственно

$$X_{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X_0(t) = \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} & \frac{1}{2}(2\sin t + 3\cos t - \cos 2t) \\ \frac{1}{2}\ (\cos t + \sin t + \sin 2t) & -\frac{5}{8} \end{pmatrix},$$

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sin^3 t - \frac{2}{3}\cos^3 t + \sin^2 t + \frac{5}{8}\sin 2t + \frac{1}{2}\sin t - \frac{17}{32} & \frac{7}{4}\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{9}{8}\cos t - \frac{7}{16} \\ \frac{5}{8}\ \cos t + \frac{3}{8}\sin t - \frac{1}{2}\cos 2t\ - \frac{1}{8} & \sin^3 t + \frac{1}{3}\cos^3 t + \frac{3}{2}\sin^2 t\ - \frac{5}{8}\sin 2t - \frac{1}{2}\cos t + \sin t - \frac{47}{32} \end{pmatrix}.$$

Подставив в (17) результаты вычислений, получим

$$\tilde{X}_1(t,\lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\lambda} - \frac{5}{8} + \lambda(\frac{1}{3}\sin^3 t - \frac{2}{3}\cos^3 t + \sin^2 t + \frac{5}{8}\sin 2t + \frac{1}{2}\sin t - \frac{17}{32}) & \frac{1}{2}(2\sin t + 3\cos t - \cos 2t) + \lambda(\frac{7}{4}\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t - \frac{9}{8}\cos t - \frac{7}{16}) \\ \frac{1}{2}\ (\ \cos t\ + \sin t + \sin 2t)\ + \lambda(\frac{5}{8}\ \cos t + \frac{3}{8}\sin t - \frac{1}{2}\cos t\ - \frac{1}{8}\ ) & \frac{1}{2\lambda} - \frac{5}{8} + \lambda(\sin^3 t + \frac{1}{3}\cos^3 t + \frac{3}{2}\sin^2 t\ - \frac{5}{8}\sin 2t - \frac{1}{2}\cos t + \sin t - \frac{47}{32}) \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Воспользовавшись (15), найдем оценку для $\left\| X\ (t, \lambda)\ - \ \tilde{X}_1\ (t, \lambda) \right\|$.

Поскольку $\| X_1 \|_C = \sqrt{16,06444...} \approx 4,008,$

то

$$\|X(t,\lambda) - \tilde{X}_1(t,\lambda)\| < \frac{\varepsilon^2 q \;\; 4,008}{1-\varepsilon q}, \tag{22}$$

где q дается соотношением (16). Из (22) видно, что при достаточно малых значениях λ, формула (21) имеет высокую точность.

Найдем оценку для $\|X(t,\lambda)\|$ на основе соотношения

$$\| X(t,\lambda) \| \le \frac{\gamma\,\omega(\sqrt{3}+\varepsilon\sqrt{2})\;[\,2+\varepsilon\,\omega(\,\sqrt{6}+\sqrt{11}\,)\,]}{2\varepsilon(1-\varepsilon q)}. \tag{23}$$

Используя полученные выше конкретные значения величин, входящих в (23), имеем

$$\| X(t,\lambda) \| < \frac{(\sqrt{3}+\varepsilon\sqrt{2})\,[\,1+\varepsilon\,\pi(\,\sqrt{6}+\sqrt{11}\,)\,]}{\varepsilon[\,\sqrt{2}-\varepsilon\pi(\sqrt{17}+2\sqrt{66})\,]}.$$

Из структуры алгоритма (10) видно, что построение приближенных решений задачи (1), (2) связано с простыми вычислительными процедурами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Лаптинский, В.Н.*** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В.Н. Лаптинский. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
2. ***Канторович, Л.В.***, Функциональный анализ / Л.В. Канторовоч, Г.П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 744 с.
3. ***Рисс, Ф.*** Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. – М. : ИЛ, 1954. – 499 с.
4. ***Демидович, Б.П.*** Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1967 – 472 с.
5. ***Гантмахер, Ф.Р.*** Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1967. – 576 с.
6. ***Абдикасова, П.А.*** Построение интегрального многообразия системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами в банаховом пространстве / П.А. Абдикасова, К.Г. Валеев // Республиканский межведомственный сборник “Математическая физика”. – Киев : Наукова думка, 1976. – Вып. 19. – С. 3–10.

Поступила в редакцию 13.10.2011 г.