

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ

Получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений Риккати.

В данной работе с помощью метода [1, гл. 3] исследуется краевая задача

$$\frac{dX}{dt} = A_1(t)X + XB_1(t) + X(S_1(t)X + S_2(t)Y) + F_1(t), \quad (1)$$

$$\frac{dY}{dt} = A_2(t)Y + YB_2(t) + Y(P_1(t)X + P_2(t)Y) + F_2(t), \quad (2)$$

$$X(0) = X(\omega), \quad (3)$$

$$Y(0) = Y(\omega), \quad (4)$$

где $t \in [0, \omega]$, $X(t), Y(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, матрицы $A_i(t), B_i(t), S_i(t), P_i(t), F_i(t)$ ($i=1,2$) определены и непрерывны на промежутке $[0, \omega]$; $\omega > 0$.

Система уравнений (1), (2) относится к многомерным системам дифференциальных уравнений специального вида. В частности, к таким уравнениям относятся матричные дифференциальные уравнения Ляпунова, Риккати, играющие важную роль в теории и приложениях дифференциальных уравнений [1-4]. Указанная система впервые появилась, по-видимому, в теории дифференциальных игр (см., например, [3]). Задача типа (1)-(4) рассмотрена в [1].

Примем следующие обозначения:

$$D = \{(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) : 0 \leq t \leq \omega, \|\mathbf{X}\| \leq \rho_1, \|\mathbf{Y}\| \leq \rho_2\}, \tilde{\mathbf{A}}_i(\omega) = \int_0^\omega \mathbf{A}_i(\tau) d\tau, \gamma_i = \|\tilde{\mathbf{A}}_i^{-1}(\omega)\|,$$

$$\alpha_i = \max_t \|\mathbf{A}_i(t)\|, \beta_i = \max_t \|\mathbf{B}_i(t)\|, \delta_i = \max_t \|\mathbf{S}_i(t)\|, \mu_i = \max_t \|\mathbf{P}_i(t)\|,$$

$$h_i = \max_t \|\mathbf{F}_i(t)\|, \|\mathbf{T}\|_C = \max_t \|\mathbf{T}(t)\|,$$

$$q_{11} = \gamma_1 \left[\frac{1}{2} \alpha_1 \omega^2 (\alpha_1 + \beta_1 + 2\delta_1 \rho_1 + \delta_2 \rho_2) + \omega (\beta_1 + 2\delta_1 \rho_1 + \delta_2 \rho_2) \right],$$

$$q_{12} = \gamma_1 \delta_2 \rho_1 \omega \left(\frac{1}{2} \alpha_1 \omega + 1 \right), q_{21} = \gamma_2 \mu_1 \rho_2 \omega \left(\frac{1}{2} \alpha_2 \omega + 1 \right),$$

$$q_{22} = \gamma_2 \left[\frac{1}{2} \alpha_2 \omega^2 (\alpha_2 + \beta_2 + \mu_1 \rho_1 + 2\mu_2 \rho_2) + \omega (\beta_2 + \mu_1 \rho_1 + 2\mu_2 \rho_2) \right],$$

где $t \in [0, \omega]$, $\rho_1, \rho_2 > 0$, $\|\cdot\|$ — мультипликативная норма матриц ($\|\mathbf{ST}\| \leq \|\mathbf{S}\| \cdot \|\mathbf{T}\|$), например, любая из норм, приведенных в [5, с. 21].

В случае, когда коэффициенты в (1), (2) постоянные, получим систему типа [3].

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

$$1) \det \tilde{\mathbf{A}}_i \neq 0 \quad (i=1,2), \tag{5}$$

$$2) \quad \gamma_1 \left\{ \frac{1}{2} \alpha_1 \omega^2 [(\alpha_1 + \beta_1) \rho_1 + \delta_1 \rho_1^2 + \delta_2 \rho_1 \rho_2 + h_1] + \right. \\ \left. + \omega (\beta_1 \rho_1 + \delta_1 \rho_1^2 + \delta_2 \rho_1 \rho_2 + h_1) \right\} \leq \rho_1, \tag{6}$$

$$\gamma_2 \left\{ \frac{1}{2} \alpha_2 \omega^2 [(\alpha_2 + \beta_2) \rho_2 + \mu_2 \rho_2^2 + \mu_1 \rho_1 \rho_2 + h_2] + \right. \\ \left. + \omega (\beta_2 \rho_2 + \mu_2 \rho_2^2 + \mu_1 \rho_1 \rho_2 + h_2) \right\} \leq \rho_2,$$

$$3) q_{11} < 1, \det(\mathbf{E} - \mathbf{Q}) > 0, \tag{7}$$

где $\mathbf{E} = \text{diag}(1,1)$, $\mathbf{Q} = (q_{ij})$.

Тогда задача (1)-(4) однозначно разрешима в области D .

Доказательство. Используя условие (5) и следуя методике [1], сначала выведем систему матричных интегральных уравнений, эквивалентную задаче (1)-(4).

Из уравнения (1) на основании условия (3) имеем

$$\int_0^{\omega} \mathbf{A}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) d\tau = - \int_0^{\omega} [\mathbf{X}(\tau) \mathbf{B}_1(\tau) + \mathbf{X}(\tau) (\mathbf{S}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) + \mathbf{S}_2(\tau) \mathbf{Y}(\tau)) + \mathbf{F}_1(\tau)] d\tau.$$

Воспользуемся тождеством типа [1, с. 47]

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega} \mathbf{A}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) d\tau &= \int_0^{\omega} \mathbf{A}_1(\tau) d\tau \mathbf{X}(t) - \int_0^t \left(\int_0^{\tau} \mathbf{A}_1(\sigma) d\sigma \right) d\mathbf{X}(\tau) + \\ &+ \int_t^{\omega} \left(\int_{\tau}^{\omega} \mathbf{A}_1(\sigma) d\sigma \right) d\mathbf{X}(\tau). \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда на основе (8) в силу (1) получим

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_1(\omega) \mathbf{X}(t) &= \int_0^t \left(\int_0^{\tau} \mathbf{A}_1(\sigma) d\sigma \right) [\mathbf{A}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) + \mathbf{X}(\tau) \mathbf{B}_1(\tau) + \\ &+ \mathbf{X}(\tau) (\mathbf{S}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) + \mathbf{S}_2(\tau) \mathbf{Y}(\tau)) + \mathbf{F}_1(\tau)] d\tau - \\ &- \int_t^{\omega} \left(\int_{\tau}^{\omega} \mathbf{A}_1(\sigma) d\sigma \right) [\mathbf{A}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) + \mathbf{X}(\tau) \mathbf{B}_1(\tau) + \\ &+ \mathbf{X}(\tau) (\mathbf{S}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) + \mathbf{S}_2(\tau) \mathbf{Y}(\tau)) + \mathbf{F}_1(\tau)] d\tau - \\ &- \int_0^{\omega} [\mathbf{X}(\tau) \mathbf{B}_1(\tau) + \mathbf{X}(\tau) (\mathbf{S}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) + \mathbf{S}_2(\tau) \mathbf{Y}(\tau)) + \mathbf{F}_1(\tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (9)$$

Так как, согласно (5), $\det \tilde{\mathbf{A}}_1(\omega) \neq 0$, то из (9) получим матричное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \tilde{\mathbf{A}}_1^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^t \left(\int_0^{\tau} \mathbf{A}_1(\sigma) d\sigma \right) [\mathbf{A}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) + \mathbf{X}(\tau) \mathbf{B}_1(\tau) + \right. \\ &+ \mathbf{X}(\tau) (\mathbf{S}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) + \mathbf{S}_2(\tau) \mathbf{Y}(\tau)) + \mathbf{F}_1(\tau)] d\tau - \\ &- \int_t^{\omega} \left(\int_{\tau}^{\omega} \mathbf{A}_1(\sigma) d\sigma \right) [\mathbf{A}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) + \mathbf{X}(\tau) \mathbf{B}_1(\tau) + \\ &+ \mathbf{X}(\tau) (\mathbf{S}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) + \mathbf{S}_2(\tau) \mathbf{Y}(\tau)) + \mathbf{F}_1(\tau)] d\tau - \\ &\left. - \int_0^{\omega} [\mathbf{X}(\tau) \mathbf{B}_1(\tau) + \mathbf{X}(\tau) (\mathbf{S}_1(\tau) \mathbf{X}(\tau) + \mathbf{S}_2(\tau) \mathbf{Y}(\tau)) + \mathbf{F}_1(\tau)] d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогично получим следующее интегральное уравнение:

$$\mathbf{Y}(t) = \tilde{\mathbf{A}}_2^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^t \left(\int_0^{\tau} \mathbf{A}_2(\sigma) d\sigma \right) [\mathbf{A}_2(\tau) \mathbf{Y}(\tau) + \mathbf{Y}(\tau) \mathbf{B}_2(\tau) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & +\mathbf{Y}(\tau)(\mathbf{P}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{P}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau))+\mathbf{F}_2(\tau)]d\tau - \\
 & -\int_0^\omega \int_\tau^\omega \mathbf{A}_2(\sigma)d\sigma \left[\mathbf{A}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau)+\mathbf{Y}(\tau)\mathbf{B}_2(\tau)+ \right. \\
 & \left. +\mathbf{Y}(\tau)(\mathbf{P}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{P}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau))+\mathbf{F}_2(\tau)]d\tau - \right. \\
 & \left. -\int_0^\omega [\mathbf{Y}(\tau)\mathbf{B}_2(\tau)+\mathbf{Y}(\tau)(\mathbf{P}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{P}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau))+\mathbf{F}_2(\tau)]d\tau \right\}. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Верно и обратное: всякое непрерывное решение системы матричных интегральных уравнений (10), (11) является решением задачи (1)-(4). Это можно показать с помощью несложных выкладок.

Исследуем разрешимость системы уравнений (10), (11). Эту систему запишем в операторной форме:

$$\mathbf{X} = \mathcal{L}_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad (12)$$

$$\mathbf{Y} = \mathcal{L}_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad (13)$$

где через $\mathcal{L}_i (i=1,2)$ обозначены соответствующие интегральные операторы в (10), (11). Эти операторы действуют на множестве $\{(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t)) : \|\mathbf{X}\|_C < \infty, \|\mathbf{Y}\|_C < \infty\}$.

Покажем, что из условий (5)-(7) следует выполнение модифицированного [6] принципа Банаха-Каччиопполи [7, с. 605] на множестве

$$\tilde{D} = \{(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t)) : \|\mathbf{X}\|_C \leq \rho_1, \|\mathbf{Y}\|_C \leq \rho_2\}.$$

Сначала покажем, что $(\mathcal{L}_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \mathcal{L}_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) \in \tilde{D}$, если $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in \tilde{D}$. Выполнив оценки по норме в (12), (13), имеем последовательно

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{L}_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\| \leq & \|\tilde{\mathbf{A}}_1^{-1}(\omega)\| \left\| \int_0^i \int_0^\tau \mathbf{A}_1(\sigma)d\sigma \left[\mathbf{A}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{X}(\tau)\mathbf{B}_1(\tau)+ \right. \right. \\
 & \left. \left. +\mathbf{X}(\tau)(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau))+\mathbf{F}_1(\tau)]d\tau - \right. \right. \\
 & \left. \left. -\int_0^\omega \int_\tau^\omega \mathbf{A}_1(\sigma)d\sigma \left[\mathbf{A}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{X}(\tau)\mathbf{B}_1(\tau)+ \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. +\mathbf{X}(\tau)(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau))+\mathbf{F}_1(\tau)]d\tau - \right. \right. \\
 & \left. \left. -\int_0^\omega [\mathbf{X}(\tau)\mathbf{B}_1(\tau)+\mathbf{X}(\tau)(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}(\tau)+\mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}(\tau))+\mathbf{F}_1(\tau)]d\tau \right\} \leq
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \leq \gamma_1 \left\{ \int_0^i \int_0^\tau \|A_1(\sigma)\| d\sigma \right\} \left[\|A_1(\tau)\| \|X(\tau)\| + \|X(\tau)\| \|B_1(\tau)\| + \right. \\
& + \|X(\tau)\| \|S_1(\tau)\| \|X(\tau)\| + \|X(\tau)\| \|S_2(\tau)\| \|Y(\tau)\| + \|F_1(\tau)\| \Big] d\tau + \\
& + \int_i^\omega \int_\tau^\omega \|A_1(\sigma)\| d\sigma \left[\|A_1(\tau)\| \|X(\tau)\| + \|X(\tau)\| \|B_1(\tau)\| + \right. \\
& + \|X(\tau)\| \|S_1(\tau)\| \|X(\tau)\| + \|X(\tau)\| \|S_2(\tau)\| \|Y(\tau)\| + \|F_1(\tau)\| \Big] d\tau + \\
& + \int_0^\omega \left[\|X(\tau)\| \|B_1(\tau)\| + \|X(\tau)\| \|S_1(\tau)\| \|X(\tau)\| + \|X(\tau)\| \|S_2(\tau)\| \|Y(\tau)\| + \|F_1(\tau)\| \right] d\tau \Big\} \leq \\
& \leq \gamma_1 \left\{ \int_0^i \alpha_1 \tau \left[(\alpha_1 + \beta_1) \|X(\tau)\| + \delta_1 \|X(\tau)\|^2 + \delta_2 \|X(\tau)\| \|Y(\tau)\| + h_1 \right] d\tau + \right. \\
& + \int_i^\omega \alpha_1 (\omega - \tau) \left[(\alpha_1 + \beta_1) \|X(\tau)\| + \delta_1 \|X(\tau)\|^2 + \delta_2 \|X(\tau)\| \|Y(\tau)\| + h_1 \right] d\tau + \\
& \left. + \int_0^\omega \left[\beta_1 \|X(\tau)\| + \delta_1 \|X(\tau)\|^2 + \delta_2 \|X(\tau)\| \|Y(\tau)\| + h_1 \right] d\tau \right\} \leq \\
& \leq \gamma_1 \left\{ \frac{1}{2} \alpha_1 \omega^2 \left[(\alpha_1 + \beta_1) \rho_1 + \delta_1 \rho_1^2 + \delta_2 \rho_1 \rho_2 + h_1 \right] + \right. \\
& \left. + \omega \left(\beta_1 \rho_1 + \delta_1 \rho_1^2 + \delta_2 \rho_1 \rho_2 + h_1 \right) \right\}. \tag{14}
\end{aligned}$$

Аналогичные оценки выполним для оператора \mathcal{L}_2 :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\| & \leq \|\tilde{A}_2^{-1}(\omega)\| \left\| \int_0^i \int_0^\tau A_2(\sigma) d\sigma \right\| \left[A_2(\tau) Y(\tau) + Y(\tau) B_2(\tau) + \right. \\
& + Y(\tau) (P_1(\tau) X(\tau) + P_2(\tau) Y(\tau)) + F_2(\tau) \Big] d\tau - \\
& - \int_i^\omega \int_\tau^\omega A_2(\sigma) d\sigma \left[A_2(\tau) Y(\tau) + Y(\tau) B_2(\tau) + \right. \\
& + Y(\tau) (P_1(\tau) X(\tau) + P_2(\tau) Y(\tau)) + F_2(\tau) \Big] d\tau - \\
& \left. - \int_0^\omega \left[Y(\tau) B_2(\tau) + Y(\tau) (P_1(\tau) X(\tau) + P_2(\tau) Y(\tau)) + F_2(\tau) \right] d\tau \right\} \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \gamma_2 \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau \|\mathbf{A}_2(\sigma)\| d\sigma \right) \left[\|\mathbf{A}_2(\tau)\| \|\mathbf{Y}(\tau)\| + \|\mathbf{Y}(\tau)\| \|\mathbf{B}_2(\tau)\| + \right. \right. \\
 &+ \|\mathbf{Y}(\tau)\| \|\mathbf{P}_1(\tau)\| \|\mathbf{X}(\tau)\| + \|\mathbf{Y}(\tau)\| \|\mathbf{P}_2(\tau)\| \|\mathbf{Y}(\tau)\| + \|\mathbf{F}_2(\tau)\| \left. \right] d\tau + \\
 &+ \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega \|\mathbf{A}_2(\sigma)\| d\sigma \right) \left[\|\mathbf{A}_2(\tau)\| \|\mathbf{Y}(\tau)\| + \|\mathbf{Y}(\tau)\| \|\mathbf{B}_2(\tau)\| + \right. \\
 &+ \|\mathbf{Y}(\tau)\| \|\mathbf{P}_1(\tau)\| \|\mathbf{X}(\tau)\| + \|\mathbf{Y}(\tau)\| \|\mathbf{P}_2(\tau)\| \|\mathbf{Y}(\tau)\| + \|\mathbf{F}_2(\tau)\| \left. \right] d\tau + \\
 &+ \int_0^\omega \left[\|\mathbf{Y}(\tau)\| \|\mathbf{B}_2(\tau)\| + \|\mathbf{Y}(\tau)\| \|\mathbf{P}_1(\tau)\| \|\mathbf{X}(\tau)\| + \|\mathbf{Y}(\tau)\| \|\mathbf{P}_2(\tau)\| \|\mathbf{Y}(\tau)\| + \|\mathbf{F}_2(\tau)\| \right] d\tau \left. \right\} \leq \\
 &\leq \gamma_2 \left\{ \int_0^t \alpha_2 \tau \left[(\alpha_2 + \beta_2) \|\mathbf{Y}(\tau)\| + \mu_1 \|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{Y}(\tau)\| + \mu_2 \|\mathbf{Y}(\tau)\|^2 + h_2 \right] d\tau + \right. \\
 &+ \int_t^\omega \alpha_2 (\omega - \tau) \left[(\alpha_2 + \beta_2) \|\mathbf{Y}(\tau)\| + \mu_1 \|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{Y}(\tau)\| + \mu_2 \|\mathbf{Y}(\tau)\|^2 + h_2 \right] d\tau + \\
 &+ \int_0^\omega \left[\beta_2 \|\mathbf{Y}(\tau)\| + \mu_1 \|\mathbf{X}(\tau)\| \|\mathbf{Y}(\tau)\| + \mu_2 \|\mathbf{Y}(\tau)\|^2 + h_2 \right] d\tau \left. \right\} \leq \\
 &\leq \gamma_2 \left\{ \frac{1}{2} \alpha_2 \omega^2 \left[(\alpha_2 + \beta_2) \rho_2 + \mu_2 \rho_2^2 + \mu_1 \rho_1 \rho_2 + h_2 \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \omega (\beta_2 \rho_2 + \mu_2 \rho_2^2 + \mu_1 \rho_1 \rho_2 + h_2) \right\}. \tag{15}
 \end{aligned}$$

Из (14), (15) на основании условия (6) следуют соотношения

$$\|\mathcal{L}_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\|_c \leq \rho_1, \tag{16}$$

$$\|\mathcal{L}_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\|_c \leq \rho_2. \tag{17}$$

Далее из (12) имеем для произвольных $(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}), (\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}, \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) \in \tilde{D}$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}, \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) - \mathcal{L}_1(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) &= \tilde{\mathbf{A}}_1^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau \mathbf{A}_1 d\sigma \right) \left[\mathbf{A}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}}) + (\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}}) \mathbf{B}_1 + \right. \right. \\
 &+ (\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}}\mathbf{S}_1\tilde{\mathbf{X}}) + (\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\mathbf{X}}\mathbf{S}_2\tilde{\mathbf{Y}}) \left. \right] d\tau - \\
 &- \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega \mathbf{A}_1 d\sigma \right) \left[\mathbf{A}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}}) + (\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}}) \mathbf{B}_1 + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} \right) + \left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} \right) \Big] d\tau - \\
& - \int_0^\omega \left[\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}} \right) \mathbf{B}_1 + \left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} \right) + \left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} \right) \right] d\tau \Big\}.
\end{aligned}$$

Выполнив оценки по норме, получим

$$\begin{aligned}
\| \mathcal{L}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}, \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) - \mathcal{L}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}, \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) \| & \leq \| \tilde{\tilde{\mathbf{A}}}_1^{-1}(\omega) \| \left\| \int_0^i \int_0^\tau \mathbf{A}_1 d\sigma \right\| \left[\mathbf{A}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}) + (\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}) \mathbf{B}_1 + \right. \\
& + \left. \left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} \right) + \left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} \right) \right] d\tau - \\
& - \int_i^\omega \left(\int_\tau^\omega \mathbf{A}_1 d\sigma \right) \left[\mathbf{A}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}) + (\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}) \mathbf{B}_1 + \right. \\
& + \left. \left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} \right) + \left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} \right) \right] d\tau - \\
& - \int_0^\omega \left[\left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}} \right) \mathbf{B}_1 + \left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} \right) + \left(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} \right) \right] d\tau \Big\| \leq \\
& \leq \gamma_1 \left\{ \int_0^i \left(\int_0^\tau \|\mathbf{A}_1\| d\sigma \right) \left[\|\mathbf{A}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}})\| + \|(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}})\mathbf{B}_1\| + \right. \right. \\
& + \left. \left. \|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}})\| + \|(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}})\mathbf{S}_1\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\| + \|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2(\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}})\| + \|(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}})\mathbf{S}_2\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}\| \right] d\tau + \\
& + \int_i^\omega \left(\int_\tau^\omega \|\mathbf{A}_1\| d\sigma \right) \left[\|\mathbf{A}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}})\| + \|(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}})\mathbf{B}_1\| + \right. \\
& + \left. \|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}})\| + \|(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}})\mathbf{S}_1\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\| + \|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2(\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}})\| + \|(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}})\mathbf{S}_2\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}\| \right] d\tau + \\
& + \int_0^\omega \left[\|(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}})\mathbf{B}_1\| + \|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}})\| + \|(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}})\mathbf{S}_1\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\| + \right. \\
& + \left. \|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{S}_2(\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}})\| + \|(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}})\mathbf{S}_2\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}\| \right] d\tau \Big\} \leq \\
& \leq \gamma_1 \left\{ \left[\frac{1}{2} \alpha_1 \omega^2 (\alpha_1 + \beta_1 + 2\delta_1 \rho_1 + \delta_2 \rho_2) + \omega (\beta_1 + 2\delta_1 \rho_1 + \delta_2 \rho_2) \right] \|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{X}}}\|_c + \right. \\
& \left. + \delta_2 \rho_1 \omega \left(\frac{1}{2} \alpha_1 \omega + 1 \right) \|\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}\|_c \right\}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует оценка

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{L}_1(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) - \mathcal{L}_1(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) \right\|_c \leq \gamma_1 \left\{ \left[\frac{1}{2} \alpha_1 \omega^2 (\alpha_1 + \beta_1 + 2\delta_1 \rho_1 + \delta_2 \rho_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \omega (\beta_1 + 2\delta_1 \rho_1 + \delta_2 \rho_2) \right] \left\| \tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{X}} \right\|_c + \delta_2 \rho_1 \omega \left(\frac{1}{2} \alpha_1 \omega + 1 \right) \left\| \tilde{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{Y}} \right\|_c \right\}. \quad (18) \end{aligned}$$

Аналогично получим оценку

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{L}_2(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) - \mathcal{L}_2(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) \right\|_c \leq \gamma_2 \left\{ \mu_1 \rho_2 \omega \left(\frac{1}{2} \alpha_2 \omega + 1 \right) \left\| \tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{X}} \right\|_c + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{2} \alpha_2 \omega^2 (\alpha_2 + \beta_2 + \mu_1 \rho_1 + 2\mu_2 \rho_2) + \omega (\beta_2 + \mu_1 \rho_1 + 2\mu_2 \rho_2) \right] \left\| \tilde{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{Y}} \right\|_c \right\}. \quad (19) \end{aligned}$$

Запишем (18), (19) в матричном виде

$$\tilde{\mathbf{K}} \leq \mathbf{Q}\mathbf{K}, \quad (20)$$

где

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \left\| \mathcal{L}_1(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) - \mathcal{L}_1(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) \right\|_c \\ \left\| \mathcal{L}_2(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) - \mathcal{L}_2(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}) \right\|_c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} \left\| \tilde{\mathbf{X}} - \tilde{\mathbf{X}} \right\|_c \\ \left\| \tilde{\mathbf{Y}} - \tilde{\mathbf{Y}} \right\|_c \end{pmatrix}.$$

Используя условие (7), можно показать на основании [8, с. 370], что характеристические числа положительной матрицы \mathbf{Q} расположены внутри единичного круга с центром в начале координат. Таким образом, на множестве \tilde{D} имеют место соотношения (16)-(19), являющиеся условием модифицированного [6] принципа Банаха-Каччиопполи [7, с. 605] сжимающих отображений применительно к системе уравнений (12), (13). На основании этого заключаем, что решение $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$, $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(t)$ этой системы на множестве \tilde{D} существует и единственно. В конечном итоге это означает, что задача (1)-(4) однозначно разрешима в области D .

Замечание 1. Вместо условия (7) можно принять условие $\|\mathbf{Q}\| < 1$, более удобное для применения.

Для построения решения системы матричных интегральных уравнений (10), (11) (см. также (12), (13)) воспользуемся классическим методом последовательных приближений (см., например, [7, с. 605]):

$$\mathbf{X}_k(t) = \tilde{\mathbf{A}}_1^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^t \int_0^\tau \mathbf{A}_1(\sigma) d\sigma \right\} \left[\mathbf{A}_1(\tau) \mathbf{X}_{k-1}(\tau) + \mathbf{X}_{k-1}(\tau) \mathbf{B}_1(\tau) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +\mathbf{X}_{k-1}(\tau)(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau)+\mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau))+\mathbf{F}_1(\tau)]d\tau - \\
& -\int\limits_i^\omega\int\limits_\tau^\omega\mathbf{A}_1(\sigma)d\sigma\left[\mathbf{A}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau)+\mathbf{X}_{k-1}(\tau)\mathbf{B}_1(\tau)+\right. \\
& \left. +\mathbf{X}_{k-1}(\tau)(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau)+\mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau))+\mathbf{F}_1(\tau)]d\tau - \\
& -\int\limits_0^\omega[\mathbf{X}_{k-1}(\tau)\mathbf{B}_1(\tau)+\mathbf{X}_{k-1}(\tau)(\mathbf{S}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau)+\mathbf{S}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau))+\mathbf{F}_1(\tau)]d\tau\left.\right\}, \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_k(t) = & \tilde{\mathbf{A}}_2^{-1}(\omega)\left\{\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau\mathbf{A}_2(\sigma)d\sigma\left[\mathbf{A}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)+\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)\mathbf{B}_2(\tau)+\right.\right. \\
& \left. +\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)(\mathbf{P}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau)+\mathbf{P}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau))+\mathbf{F}_2(\tau)]d\tau - \\
& -\int\limits_i^\omega\int\limits_\tau^\omega\mathbf{A}_2(\sigma)d\sigma\left[\mathbf{A}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)+\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)\mathbf{B}_2(\tau)+\right. \\
& \left. +\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)(\mathbf{P}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau)+\mathbf{P}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau))+\mathbf{F}_2(\tau)]d\tau - \\
& \left. -\int\limits_0^\omega[\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)\mathbf{B}_2(\tau)+\mathbf{Y}_{k-1}(\tau)(\mathbf{P}_1(\tau)\mathbf{X}_{k-1}(\tau)+\mathbf{P}_2(\tau)\mathbf{Y}_{k-1}(\tau))+\mathbf{F}_2(\tau)]d\tau\right\}, \quad (22)
\end{aligned}$$

$k=1,2,\dots,$

где $\mathbf{X}_0(t)$, $\mathbf{Y}_0(t)$ – произвольные матричные функции класса $C[0,\omega]$, принадлежащие множеству \tilde{D} .

Используя условия (6), нетрудно показать, что все приближенные решения, полученные по алгоритму (21), (22), принадлежат множеству \tilde{D} . Заметим, что эти решения, вообще говоря, не удовлетворяют краевым условиям (3), (4). Поэтому следует создавать более эффективные алгоритмы построения решения задачи (1)-(4). Такие алгоритмы можно получить на основе применения подхода [1, гл. 3]. Их разработке будут посвящены дальнейшие исследования авторов.

Изучим вопрос о сходимости полученной последовательности. Следуя известному приему (см., например, [9]), этот вопрос заменим эквивалентным вопросом о сходимости рядов

$$\mathbf{X}_0 + (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0) + \dots + (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}) + \dots, \quad (23)$$

$$\mathbf{Y}_0 + (\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_0) + \dots + (\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1}) + \dots \quad (24)$$

Докажем равномерную по $t \in [0,\omega]$ сходимость рядов (23), (24). Для этого построим специальный сходящийся матричный степенной ряд,

который мажорирует на $[0, \omega]$ указанные матричные функциональные ряды. Из (21), (22) имеем соответственно

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k = & \tilde{\mathbf{A}}_1^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau \mathbf{A}_1 d\sigma \right) \left[\mathbf{A}_1(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}) + (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1})\mathbf{B}_1 + \right. \right. \\ & + (\mathbf{X}_k \mathbf{S}_1 \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1} \mathbf{S}_1 \mathbf{X}_{k-1}) + (\mathbf{X}_k \mathbf{S}_2 \mathbf{Y}_k - \mathbf{X}_{k-1} \mathbf{S}_2 \mathbf{Y}_{k-1}) \left. \right] d\tau - \\ & - \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega \mathbf{A}_1 d\sigma \right) \left[\mathbf{A}_1(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}) + (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1})\mathbf{B}_1 + \right. \\ & + (\mathbf{X}_k \mathbf{S}_1 \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1} \mathbf{S}_1 \mathbf{X}_{k-1}) + (\mathbf{X}_k \mathbf{S}_2 \mathbf{Y}_k - \mathbf{X}_{k-1} \mathbf{S}_2 \mathbf{Y}_{k-1}) \left. \right] d\tau - \\ & \left. - \int_0^\omega \left[(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1})\mathbf{B}_1 + (\mathbf{X}_k \mathbf{S}_1 \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1} \mathbf{S}_1 \mathbf{X}_{k-1}) + (\mathbf{X}_k \mathbf{S}_2 \mathbf{Y}_k - \mathbf{X}_{k-1} \mathbf{S}_2 \mathbf{Y}_{k-1}) \right] d\tau \right\}, \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{k+1} - \mathbf{Y}_k = & \tilde{\mathbf{A}}_2^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau \mathbf{A}_2 d\sigma \right) \left[\mathbf{A}_2(\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1}) + (\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1})\mathbf{B}_2 + \right. \right. \\ & + (\mathbf{Y}_k \mathbf{P}_1 \mathbf{X}_k - \mathbf{Y}_{k-1} \mathbf{P}_1 \mathbf{X}_{k-1}) + (\mathbf{Y}_k \mathbf{P}_2 \mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1} \mathbf{P}_2 \mathbf{Y}_{k-1}) \left. \right] d\tau - \\ & - \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega \mathbf{A}_2 d\sigma \right) \left[\mathbf{A}_2(\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1}) + (\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1})\mathbf{B}_2 + \right. \\ & + (\mathbf{Y}_k \mathbf{P}_1 \mathbf{X}_k - \mathbf{Y}_{k-1} \mathbf{P}_1 \mathbf{X}_{k-1}) + (\mathbf{Y}_k \mathbf{P}_2 \mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1} \mathbf{P}_2 \mathbf{Y}_{k-1}) \left. \right] d\tau - \\ & - \int_0^\omega \left[(\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1})\mathbf{B}_2 + (\mathbf{Y}_k \mathbf{P}_1 \mathbf{X}_k - \mathbf{Y}_{k-1} \mathbf{P}_1 \mathbf{X}_{k-1}) + \right. \\ & \left. + (\mathbf{Y}_k \mathbf{P}_2 \mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1} \mathbf{P}_2 \mathbf{Y}_{k-1}) \right] d\tau \left. \right\}, \quad k=1, 2, \dots \quad (26) \end{aligned}$$

Выполнив оценки по норме в (25), (26), получим оценки типа (18), (19):

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k\|_C \leq \\ & \leq \gamma_1 \left\{ \frac{1}{2} \alpha_1 \omega^2 (\alpha_1 + \beta_1 + 2\delta_1 \rho_1 + \delta_2 \rho_2) \|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}\|_C + \frac{1}{2} \alpha_1 \delta_2 \rho_1 \omega^2 \|\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1}\|_C \right\} + \\ & + \gamma_1 \left\{ \omega (\beta_1 + 2\delta_1 \rho_1 + \delta_2 \rho_2) \|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}\|_C + \delta_2 \rho_1 \omega \|\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1}\|_C \right\}, \quad (27) \\ & \|\mathbf{Y}_{k+1} - \mathbf{Y}_k\|_C \leq \\ & \leq \gamma_2 \left\{ \frac{1}{2} \alpha_2 \mu_1 \rho_2 \omega^2 \|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}\|_C + \frac{1}{2} \alpha_2 \omega^2 (\alpha_2 + \beta_2 + \mu_1 \rho_1 + 2\mu_2 \rho_2) \|\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1}\|_C \right\} + \end{aligned}$$

$$+\gamma_2 \{ \mu_1 \rho_2 \omega \| \mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1} \|_C + \omega (\beta_2 + \mu_1 \rho_1 + 2\mu_2 \rho_2) \| \mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1} \|_C \}, \quad k=1,2,\dots \quad (28)$$

Запишем оценки (27), (28) в матричной форме

$$\mathbf{Z}_k \leq \mathbf{Q}\mathbf{Z}_{k-1}, \quad k=1,2,\dots, \quad (29)$$

где

$$\mathbf{Z}_k = \begin{pmatrix} \| \mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k \|_C \\ \| \mathbf{Y}_{k+1} - \mathbf{Y}_k \|_C \end{pmatrix}.$$

Далее на основании рекуррентной оценки (29) имеем явную оценку

$$\mathbf{Z}_k \leq \mathbf{Q}^k \mathbf{Z}_0, \quad k=1,2,\dots \quad (30)$$

Поскольку характеристические числа матрицы \mathbf{Q} расположены внутри единичного круга, то, используя оценку (30) и соответствующие мажоранты для рядов (23), (24), можно показать, что на основании [5; 7] последовательность $\{ \mathbf{X}_k(t), \mathbf{Y}_k(t) \}_0^\infty$ сходится равномерно по $t \in [0, \omega]$ к решению системы интегральных уравнений (10), (11), при этом имеет место оценка

$$\tilde{\mathbf{Z}}_i \leq (\mathbf{E} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^i \mathbf{Z}_0, \quad i=0,1,2,\dots, \quad (31)$$

где

$$\tilde{\mathbf{Z}}_i = \begin{pmatrix} \| \mathbf{X} - \mathbf{X}_i \|_C \\ \| \mathbf{Y} - \mathbf{Y}_i \|_C \end{pmatrix}.$$

Используя оценку (30), нетрудно получить оценку области локализации решения задачи (1)-(4), определяемую алгоритмом (21), (22):

$$\mathbf{Z} \leq \tilde{\mathbf{Z}}_0 + (\mathbf{E} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Z}_0, \quad (32)$$

где

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \| \mathbf{X} \|_C \\ \| \mathbf{Y} \|_C \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{Z}}_0 = \begin{pmatrix} \| \mathbf{X}_0 \|_C \\ \| \mathbf{Y}_0 \|_C \end{pmatrix}.$$

Замечание 2. Используя условия (6), (7), аналогичную оценку можно получить, исходя из системы интегральных уравнений (10), (11).

В самом деле, выполнив оценки по норме в тождествах (10), (11), получим

$$\mathbf{Z} \leq \mathbf{Q}\mathbf{Z} + \mathbf{R}, \quad (33)$$

где $\mathbf{R} = \text{colon}(r_1, r_2)$;

$$r_1 = \gamma_1 h_1 \omega \left(\frac{1}{2} \alpha_1 \omega + 1 \right), \quad r_2 = \gamma_2 h_2 \omega \left(\frac{1}{2} \alpha_2 \omega + 1 \right).$$

Используя положительную обратимость матрицы $\mathbf{E} - \mathbf{Q}$, из (33) получим оценку

$$\mathbf{Z} \leq (\mathbf{E} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{R}. \quad (34)$$

Как видно, оценка (34) является коэффициентной. Чтобы воспользоваться оценкой (32), следует получить оценки для \mathbf{Z}_0 , $\tilde{\mathbf{Z}}_0$, т.е. эта оценка менее удобна для применения, чем оценка (34). Однако в случае $\mathbf{X}_0 = 0$, $\mathbf{Y}_0 = 0$ эти оценки совпадают.

Замечание 3. Отметим в соответствии с замечанием 1, что если принять $\|\mathbf{Q}\| < 1$, то оценка области локализации решения может быть получена в виде

$$\|\mathbf{Z}\| \leq \frac{\|\mathbf{R}\|}{1 - \|\mathbf{Q}\|}.$$

Аналогичная оценка имеет место для $\tilde{\mathbf{Z}}_i$:

$$\|\tilde{\mathbf{Z}}_i\| \leq \frac{\|\mathbf{Q}\|^i \|\mathbf{Z}_0\|}{1 - \|\mathbf{Q}\|}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, в настоящей работе получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости на компакте и дан эффективный алгоритм построения решения задачи (1)-(4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лаптинский, В.Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В.Н. Лаптинский. – Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
2. *Зубов, В.И.* Лекции по теории управления / В.И. Зубов. – М.: Наука, 1975. – 496 с.
3. *Lucas, J.* Explicit solutions of Riccati equations appearing in differential games / J. Lucas // Applied Mathematics Letters, 1990. – V. 3. – №. 4. – P. 9-12.
4. *Murty, K.N.* Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems existence and uniqueness / K.N. Murty, G.W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl., 1992. – V. 167. – P. 505-515.
5. *Демидович, Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
6. *Забрейко, П.П.* Принцип неподвижной точки и нелокальные теоремы о разрешимости для существенно нелинейных дифференциальных уравнений / П.П. Забрейко, В.Н. Лаптинский // Докл. АН Беларуси. – 1997. – Т. 41. – № 1. – С. 5-9.
7. *Канторович, Л.В.* Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
8. *Гантмахер, Ф.Р.* Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
9. *Бибиков, Ю.Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Н. Бибиков. – М.: Высшая школа, 1991. – 303 с.

Поступила в редакцию 01.10.2009 г.