

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ НОВЫХ ФОРМ ВОЛНОВЫХ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ФИШЕРА И ЛОТКИ-ВОЛЬТЕРРА

Известно [1-21], что уравнения Фишера и Лотки-Вольтерра играют важную роль в моделировании широкого круга задач биологии, химии, социологии. Центральное место при этом занимают вопросы, связанные с существованием точных волновых решений нелинейных уравнений параболического типа и разработкой методов их построения. В настоящей работе излагается прямой метод из [16] применительно к двумерным уравнениям Фишера и Лотки-Вольтерра.

I. Известно, что классические методы интегрирования нелинейных уравнений в частных производных, например, метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) или метод Хироты, а также их модификации, к указанным уравнениям не применимы. Некоторые классы точных решений построены с помощью методов группового анализа [12-15]. Тем не менее, вопрос о разработке общего метода интегрирования уравнений Фишера и Лотки-Вольтерра остается открытым.

Рассмотрим двумерное уравнение Фишера [14]

$$u_t = D(u_{xx} + u_{yy}) + Au + \frac{B}{1-u}(u_x^2 + u_y^2) + Ku^2, \quad D > 0 \quad (1)$$

с произвольными действительными коэффициентами и краевыми условиями Неймана

$$u_x(t, x, y)|_{x \rightarrow \pm\infty} = 0, \quad u_y(t, x, y)|_{y \rightarrow \pm\infty} = 0. \quad (2)$$

Краевые условия (2) являются типичными при моделировании биологических процессов (см. [13]). На основе прямого метода из [16] решение задачи (1), (2) будем строить в виде

$$u(t, x, y) = 1 - F^{-1}(\xi), \quad \xi = \alpha t + \beta x + \gamma y + \varphi, \quad (3)$$

где $F(\xi)$ – неизвестная функция одной переменной, $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$ – произвольные действительные числа. Подставляя (3) в (1), получим

$$F^3(A+K) - F^2(A+2K) + F(K - \alpha F' + Dp^2 F'') - 2Dp^2 (F')^2 + Bp^2 (F')^2 = 0, \quad (4)$$

$$p^2 = \beta^2 + \gamma^2.$$

Уравнение (4) – это нелинейное уравнение второго порядка. Его решение, с учетом (2), будем строить в виде

$$F(\xi) = a + b \exp(\xi), \quad (5)$$

где $a > 0, b > 0$ неизвестные параметры. Подставляя (5) в (4), получим следующие соотношения:

$$a = 1, \quad B = 2D, \quad A + K = 0, \quad K + \alpha = p^2 D. \quad (6)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. Для того чтобы уравнение (4) имело решение (5), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (6).

На основании теоремы 1 устанавливаем следующий результат.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (6). Тогда задача (1), (2) имеет решение вида (3), (5), которое удовлетворяет начальному условию

$$u(0, x, y) = 1 - [1 + b \exp(\beta x + \gamma y + \varphi)]^{-1},$$

причем параметр $b > 0$ является произвольным.

На рис. 1 представлен график решения задачи (1), (2)

$$u(\xi) = 1 - [1 + b \exp(\xi)]^{-1}$$

при следующих значениях параметров: $A = 1.0, B = 2.0, D = 1.0, K = -1.0, \alpha = 3.0, \beta = 1.0, \gamma = 1.0, \varphi = 0, b = 1.0$.

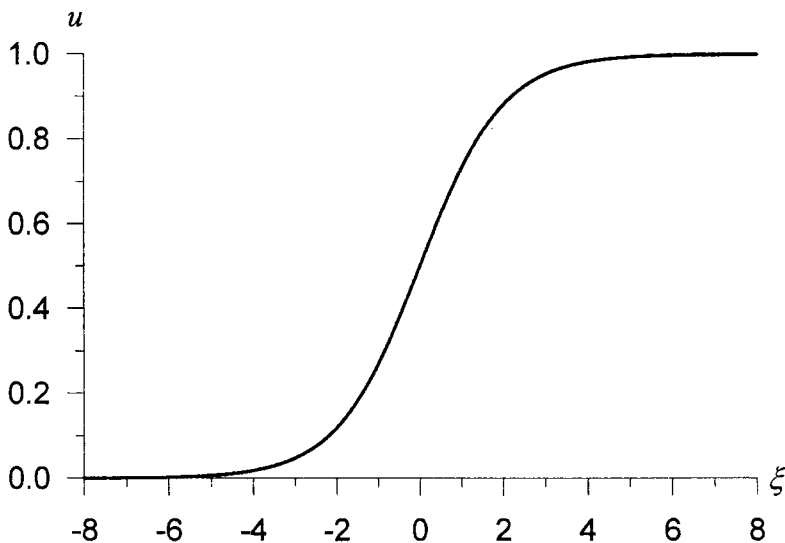


Рис. 1

II. Рассмотрим систему Лотки-Вольтерра

$$u_t = D(u_{xx} + u_{yy}) + \frac{B}{1-u} (u_x^2 + u_y^2) + u(a_1 - b_1 u - c_1 v), \quad D > 0, \quad (7)$$

$$v_t = D(v_{xx} + v_{yy}) + \frac{B}{1-v} (v_x^2 + v_y^2) + v(a_2 - b_2u - c_2v), \quad D > 0 \quad (8)$$

с произвольными действительными коэффициентами и краевыми условиями

$$u_x(t, x, y)|_{x \rightarrow \pm\infty} = 0, \quad u_y(t, x, y)|_{y \rightarrow \pm\infty} = 0, \quad (9)$$

$$v_x(t, x, y)|_{x \rightarrow \pm\infty} = 0, \quad v_y(t, x, y)|_{y \rightarrow \pm\infty} = 0.$$

Исследование системы (7), (8) сведем к одному уравнению Фишера вида (1). С этой целью положим, что

$$v(t, x, y) = \lambda_0 + \lambda_1 u(t, x, y), \quad (10)$$

где $\lambda_0 \neq 0$, $\lambda_1 \neq 0$ (см. [13]). Подставляя (10) в (7), (8), получим одно уравнение Фишера (1), если выполняются условия

$$\lambda_0 = \frac{a_2}{c_2}, \quad \lambda_1 = 1 - \lambda_0, \quad (b_1 - b_2)c_2 = (c_2 - c_1)(c_2 - a_2),$$

$$a_1 - a_2 = \left(\frac{c_1}{c_2} - 2 \right) a_2 - \frac{a_2 b_2}{c_2 - a_2}. \quad (11)$$

При этом коэффициенты A, K определяются формулами

$$A = a_1 - \frac{c_1 a_2}{c_2}, \quad K = \frac{c_1 a_2}{c_2} - b_1 - c_1.$$

Применяя теорему 2, устанавливаем следующий результат.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (11) и, кроме того,

$$a = 1, \quad B = 2D, \quad a_1 = b_1 + c_1, \quad p^2 D = \alpha + \frac{c_1 a_2}{c_2} - a_1.$$

Тогда краевая задача (7) – (9) имеет решение

$$u(t, x, y) = 1 - [1 + b \exp(\xi)]^{-1}, \quad v(t, x, y) = \lambda_0 + \lambda_1 u(t, x, y),$$

которое удовлетворяет начальному условию

$$u(0, x, y) = 1 - [1 + b \exp(\beta x + \gamma y + \varphi)]^{-1}, \quad v(0, x, y) = \lambda_0 + \lambda_1 u(0, x, y),$$

причем параметр $b > 0$ является произвольным. Графики функций $u(\xi)$, $v(\xi)$, которые являются решением задачи (7) – (9), приведены на рис. 2 при следующих значениях параметров: $B = 2.0$, $D = 1.0$, $a_1 = 2.0$, $b_1 = -2.0$, $c_1 = 4.0$, $a_2 = 0.5$, $b_2 = -0.5$, $c_2 = 1.0$, $b = 1.0$, $\alpha = 1.0$,

$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}, \varphi = 0, \lambda_0 = 0.5, \lambda_1 = 0.5$. Кривая 1 соответствует функции $u(\xi)$, кривая 2 – функции $v(\xi)$.

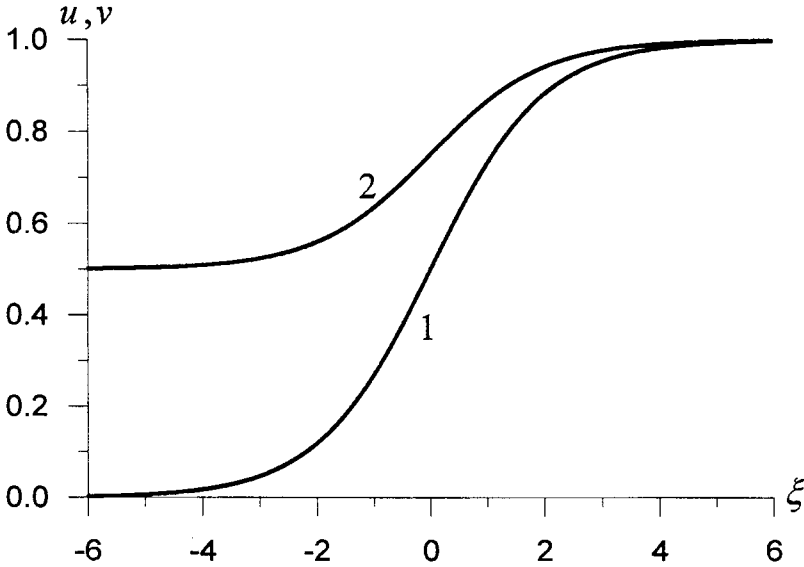


Рис. 2

III. Рассмотрим двумерное уравнение Фишера (ср. с [14])

$$u_t = D(u_{xx} + u_{yy}) + Au + \frac{B}{1-u}(u_x^2 + u_y^2) + Ru_x + Qu_y + Ku^2, \quad D > 0 \quad (12)$$

с произвольными действительными коэффициентами и краевыми условиями Неймана (2). Решение уравнения (12) будем строить в виде (3). Подставляя (3) в (12), получим

$$F^3(A+K) - F^2(A+2K) + F\left[K + (\beta R + \gamma Q - \alpha)F' + Dp^2F''\right] + p^2(B-2D)(F')^2 = 0. \quad (13)$$

Решение уравнения (13), с учетом краевых условий (2), строится в виде

$$F(\xi) = a + b \exp(\xi) + d \exp(-\xi), \quad (14)$$

где $a > 0, b > 0, d > 0$ – неизвестные параметры волн. Подставляя (14) в (13), найдем

$$\begin{aligned} A + K = 0, \quad \alpha = R\beta + \gamma Q, \quad p^2(B - D) = K, \quad a(3D - 2B) = D - B, \\ 4bd(2D - B) = (a^2 - a)(B - D). \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 4. Для того чтобы уравнение (13) имело решение вида (14), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (15).

На основании теоремы 4 устанавливаем следующий результат.

Теорема 5. Пусть выполнены условия (15). Тогда задача (12), (2) имеет решение вида (3), (14), которое удовлетворяет начальному условию

$$u(0, x, y) = 1 - [a + b \exp(\beta x + \gamma y + \varphi) + d \exp(-\beta x - \gamma y - \varphi)]^{-1}.$$

График решения задачи (12), (2)

$$u(\xi) = 1 - [a + b \exp(\xi) + d \exp(-\xi)]^{-1}$$

представлен на рис. 3 при следующих значениях параметров: $A = -0.8$, $B = 1.0$, $D = 0.6$, $K = 0.8$, $R = 2.0$, $Q = -1.0$, $\beta = 1.0$, $\gamma = 1.0$, $\alpha = 1.0$, $a = 2.0$, $b = d = 1.0$.

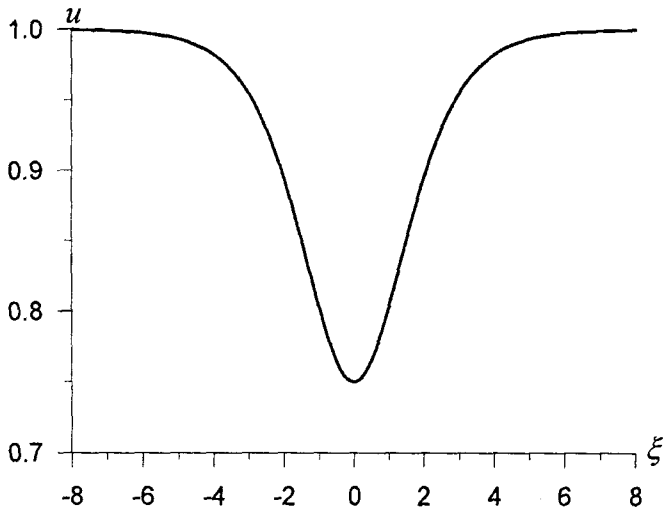


Рис. 3

IV. Задача (12), (2) допускает также решение вида

$$u(t, x, y) = 1 - F^{-2}(\xi), \quad F(\xi) = a + b \exp(\xi) + d \exp(-\xi). \quad (16)$$

Подставляя (16) в уравнение (12), найдем

$$F^4(A + K) - F^2(A + 2K) + 2(R\beta + \gamma Q - \alpha)FF' + 2Dp^2FF'' + p^2(4B - 6D)(F')^2 + K = 0, \quad (17)$$

и, следовательно,

$$A + K = 0, \quad \alpha = R\beta + \gamma Q, \quad 4B = 5D, \quad p^2D = K, \quad 4bd = a^2 - 1. \quad (18)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 6. Для того чтобы уравнение (17) имело решение вида

$$F(\xi) = a + b \exp(\xi) + d \exp(-\xi),$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (18).

На основании теоремы (6) устанавливаем следующий результат.

Теорема 7. Пусть выполнены условия (18). Тогда задача (12), (2) имеет решение вида (16), которое удовлетворяет начальному условию

$$u(0, x, y) = 1 - [a + b \exp(\beta x + \gamma y + \varphi) + d \exp(-\beta x - \gamma y - \varphi)]^{-2}.$$

На рис. 4 представлен график решения задачи (12), (2)

$$u(\xi) = 1 - [a + b \exp(\xi) + d \exp(-\xi)]^{-2}$$

при следующих значениях параметров: $A = -0.8$, $B = 0.5$, $D = 0.4$, $K = 0.8$, $R = 2.0$, $Q = -1.0$, $\beta = 1.0$, $\gamma = 1.0$, $\alpha = 1.0$, $a = 2.0$,

$$b = d = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

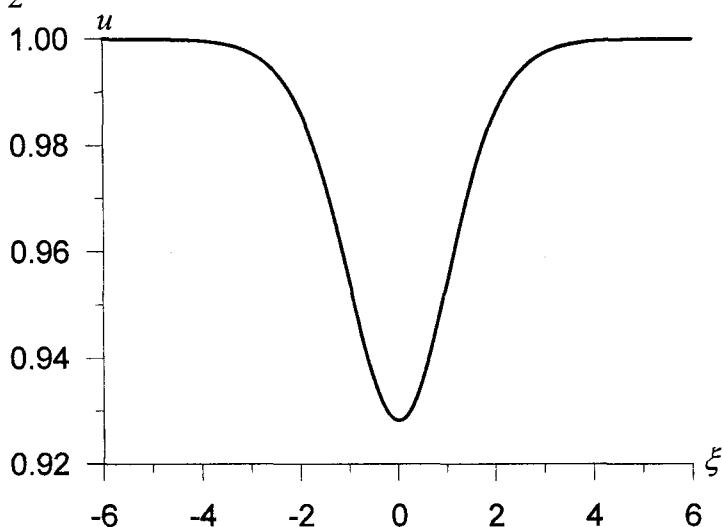


Рис. 4

V. Рассмотрим систему Лотки-Вольтерра

$$u_t = D(u_{xx} + u_{yy}) + \frac{B}{1-u}(u_x^2 + u_y^2) + R_1 u_x + R_2 v_x + Q_1 u_y + Q_2 v_y + u(a_1 - b_1 u - c_1 v), \quad (19)$$

$$D > 0,$$

$$v_t = D(v_{xx} + v_{yy}) + \frac{B}{1-v}(v_x^2 + v_y^2) + R_3 v_x + R_4 u_x + Q_3 v_y + Q_4 u_y + v(a_2 - b_2 u - c_2 v) \quad (20)$$

с произвольными действительными коэффициентами и краевыми условиями Неймана (9). Сведем систему (19), (20) к одному уравнению вида (12). Для этого положим, что

$$v(t, x, y) = \lambda_0 + \lambda_1 u(t, x, y), \quad \lambda_0 \neq 0, \quad \lambda_1 \neq 0.$$

Тогда при выполнении условий

$$\lambda_0 = \frac{a_2}{c_2}, \quad \lambda_1 = 1 - \frac{a_2}{c_2}, \quad R_1 - R_3 = \frac{R_4 c_2}{c_2 - a_2} - \frac{R_2 (c_2 - a_2)}{c_2}, \quad (21)$$

$$Q_1 - Q_3 = \frac{Q_4 c_2}{c_2 - a_2} - \frac{Q_2 (c_2 - a_2)}{c_2}, \quad a_1 + a_2 = \frac{c_1 a_2}{c_2} - \frac{b_2 a_2}{c_2 - a_2},$$

$$(b_1 - b_2)c_2 = (c_2 - c_1)(c_2 - a_2)$$

система (19), (20) приводится к одному уравнению вида (12), в котором

$$A = a_1 - \frac{c_1 a_2}{c_2}, \quad R = R_1 + \left(\frac{c_2 - a_2}{a_2} \right) R_2, \quad Q = Q_1 + \left(\frac{c_2 - a_2}{a_2} \right) Q_2,$$

$$K = -b_1 - c_1 + \frac{c_1 a_2}{c_2}.$$

Применяя теорему (5), устанавливаем следующий результат.

Теорема 6. Пусть выполнены условия (21) и, кроме того,

$$a_1 = b_1 + c_1, \quad \alpha = \beta \left[R_1 + \left(\frac{c_2 - a_2}{a_2} \right) R_2 \right] + \gamma \left[Q_1 + \left(\frac{c_2 - a_2}{a_2} \right) Q_2 \right],$$

$$p^2(B - D) = \frac{c_1 a_2}{c_2} - a_1, \quad a(3D - 2B) = D - B, \quad 4bd(2D - B) = (a^2 - a)(B - D).$$

Тогда краевая задача (19), (20), (9) имеет решение

$$u(t, x, y) = u(\xi) = 1 - [a + b \exp(\xi) + d \exp(-\xi)]^{-1},$$

$$v(t, x, y) = v(\xi) = \lambda_0 + \lambda_1 u(t, x, y),$$

которое удовлетворяет начальному условию

$$u(0, x, y) = 1 - [a + b \exp(\beta x + \gamma y + \varphi) + d \exp(-\beta x - \gamma y - \varphi)]^{-1},$$

$$v(t, x, y) = v(\xi) = \lambda_0 + \lambda_1 u(\xi).$$

VI. Из пункта IV следует, что система (19), (20) может иметь решение

$$u(t, x, y) = 1 - [a + b \exp(\xi) + d \exp(-\xi)]^{-2} = u(\xi),$$

$$v(t, x, y) = \lambda_0 + \lambda_1 u(\xi) = v(\xi) \quad (22)$$

при выполнении условий (21) и следующих соотношений:

$$a_1 = b_1 + c_1, \quad \alpha = \beta \left[R_1 + \left(\frac{c_2 - a_2}{a_2} \right) R_2 \right] + \gamma \left[Q_1 + \left(\frac{c_2 - a_2}{a_2} \right) Q_2 \right], \quad (23)$$

$$p^2 D = \frac{c_1 a_2}{c_2} - a_1, \quad 4B = 5D, \quad 4bd = a^2 - 1.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 7. Пусть выполнены условия (21) и (23). Тогда краевая задача (19), (20), (9) имеет решение вида (22), которое удовлетворяет начальному условию

$$u(0, x, y) = 1 - [a + b \exp(\beta x + \gamma y + \varphi) + d \exp(-\beta x - \gamma y - \varphi)]^{-2},$$

$$v(0, x, y) = \lambda_0 + \lambda_1 u(0, x, y).$$

VII. Рассмотрим двумерное уравнение Фишера с кубической нелинейностью

$$u_t = D(u_{xx} + u_{yy}) + Au + \frac{B}{1-u} (u_x^2 + u_y^2) + Ru_x + Qu_y + Ku^2 + Hu^3, \quad D > 0, \quad (24)$$

с произвольными коэффициентами и краевыми условиями (2). Решение уравнения (24) будем строить в виде (16). Подставляя (16) в (24), получим нелинейное уравнение

$$2\alpha F^3 F' = Dp^2 [2F^3 F'' - 6F^2 (F')^2] + A[F^6 - F^4] + 2(R\beta + Q\gamma)F^3 F' + 4p^2 B F^2 (F')^2 +$$

$$+ K[F^6 - 2F^4 + F^2] + H[F^6 - 3F^4 + 3F^2 - 1] \quad (25)$$

и, следовательно,

$$\alpha = R\beta + \gamma Q, \quad 4(B - D)p^2 = 2K + 3H + A, \quad p^2(4B - 3D) = 2(2K + 3H + A),$$

$$-(6a^2 + 4bd)(2K + 3H + A) + 2Dp^2(3a^2 + 4bd) + (4B - 6D)p^2 a^2 + K + 3H = 0,$$

$$-(2a^2 + 6bd)(2K + 3H + A) + Dp^2(a^2 + 9bd) - bdp^2(4B - 6D) + K + 3H = 0, \quad (26)$$

$$a^4 + 12a^2 bd + 6b^2 d^2 + 12Dp^2(a^2 bd + b^2 d^2) - 2bdp^2(4B - 6D)(bd + a^2) +$$

$$+(a^2 + 2bd)(K + 3H) - H = 0.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 8. Для того чтобы уравнение (25) имело решение вида (16), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (26).

На основании теоремы 8 устанавливаем следующий результат.

Теорема 9. Пусть выполнены условия (26). Тогда краевая задача (24), (2) имеет решение вида (16), которое удовлетворяет начальному условию

$$u(0, x, y) = 1 - [a + b \exp(\beta x + \gamma y + \varphi) + d \exp(-\beta x - \gamma y - \varphi)]^{-2}.$$

График решения задачи (24), (2) $u(\xi) = 1 - F^{-2}(\xi)$ представлен на рис. 5 при следующих значениях параметров: $A=1.2$, $B=0.625$, $D=0.5$, $K=-0.57564372$, $H=0.31709581$, $\beta=1.0$, $\gamma=1.0$, $p=\sqrt{2}$, $a=1.0$, $b=d_u=0.39508109$.

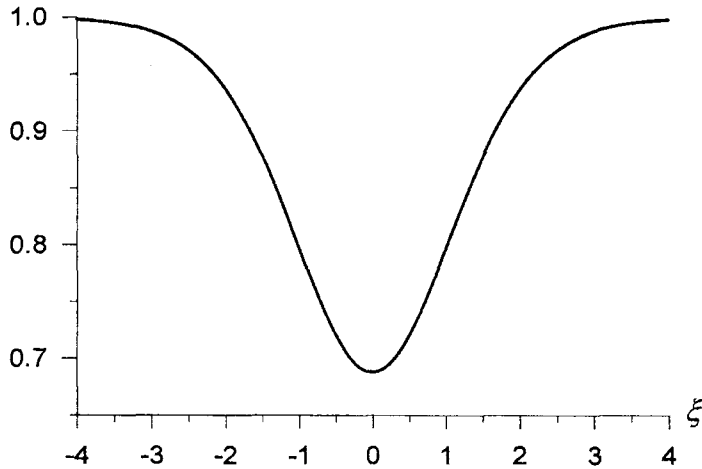


Рис. 5

VIII. Исследуем на основе уравнения (24) систему Лотки-Вольтерра с квадратичными и кубическими членами

$$\begin{aligned} u_t = D(u_{xx} + u_{yy}) + \frac{B}{1-u} (u_x^2 + u_y^2) + R_1 u_x + R_2 v_x + Q_1 u_y + Q_2 v_y + a_1 u^2 + a_2 uv + \\ + a_3 v^2 + b_1 u^3 + b_2 u^2 v + b_3 uv^2 + b_4 v^3, \quad D > 0, \\ v_t = D(v_{xx} + v_{yy}) + \frac{B}{1-v} (v_x^2 + v_y^2) + R_3 v_x + R_4 u_x + Q_3 v_y + Q_4 u_y + c_1 u^2 + c_2 uv + \\ + c_3 v^2 + d_1 u^3 + d_2 u^2 v + d_3 uv^2 + d_4 v^3 \end{aligned} \quad (27)$$

с произвольными коэффициентами и краевыми условиями (9). Сведем систему (27) к одному уравнению вида (24) с помощью подстановки

$$v(t, x, y) = \lambda_0 + \lambda_1 u(t, x, y), \quad \lambda_0 \neq 0, \quad \lambda_1 \neq 0.$$

Тогда при выполнении соотношений

$$\lambda_0 + \lambda_1 = 1, \quad R_1 + \lambda_1 R_2 = R_3 + \frac{R_4}{\lambda_1}, \quad Q_1 + \lambda_1 Q_2 = Q_3 + \frac{1}{\lambda_1} Q_4,$$

$$\begin{aligned}
 a_2\lambda_0 + 3\lambda_0^2\lambda_1a_3 + b_3\lambda_0^2 + 3b_4\lambda_0^2\lambda_1 &= \frac{1}{\lambda_1}c_2\lambda_0 + 2c_3\lambda_0 + \frac{1}{\lambda_1}d_3\lambda_0^2 + 3d_4\lambda_0^2, \\
 a_1 + a_2\lambda_1 + 3a_3\lambda_1^2\lambda_0 + b_2\lambda_0 + 2\lambda_0\lambda_1b_3 + 3b_4\lambda_0\lambda_1^2 &= \\
 &= \frac{1}{\lambda_1}c_1 + c_2 + c_3\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1}d_2\lambda_0 + 2d_3\lambda_0 + 3d_4\lambda_0\lambda_1,
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$a_3\lambda_1^3 + b_1 + b_2\lambda_1 + b_3\lambda_1^2 + b_4\lambda_1^3 = \frac{1}{\lambda_1}d_1 + d_2 + d_3\lambda_1 + d_4\lambda_1^2$$

система (27) сведется к одному уравнению вида (24) с коэффициентами $R = R_1 + \lambda_1 R_2 \equiv R^*$, $Q = Q_1 + \lambda_1 Q_2 \equiv Q^*$, $A = a_2\lambda_0 + 3\lambda_0^2\lambda_1a_3 + b_3\lambda_0^2 + 3b_4\lambda_0^2\lambda_1 \equiv A^*$,

$$K = a_1 + a_2\lambda_1 + 3a_3\lambda_0\lambda_1^2 + b_2\lambda_0 + 2\lambda_0\lambda_1b_3 + 3b_4\lambda_0\lambda_1^2 \equiv K^*,$$

$$H = a_3\lambda_1^3 + b_1 + b_2\lambda_1 + b_3\lambda_1^2 + b_4\lambda_1^3 \equiv H^*.$$

На основании теоремы 9 устанавливаем следующий результат.

Теорема 10. Пусть выполнены условия (28) и, кроме того,

$$\alpha = R^* \beta + \gamma Q^*, \quad 4(B - D)p^2 = S^*, \quad p^2(4B - 3D) = 2S^*,$$

$$-(6a^2 + 4bd)S^* + 2Dp^2(3a^2 + 4bd) + (4B - 6D)p^2a^2 + K^* + 3H^* = 0,$$

$$-(2a^2 + 6bd)S^* + Dp^2(a^2 + 9bd) - bdp^2(4B - 6D) + K^* + 3H^* = 0,$$

$$\begin{aligned}
 a^4 + 12a^2bd + 6b^2d^2 + 12Dp^2(a^2bd + b^2d^2) - 2bdp^2(4B - 6D)(bd + a^2) + \\
 + (a^2 + 2bd)(K^* + 3H^*) - H^* = 0, \quad S^* \equiv 2K^* + 3H^* + A^*.
 \end{aligned}$$

Тогда краевая задача (27), (9) имеет решение вида

$$u(t, x, y) = 1 - F^{-2}(\xi), \quad F(\xi) = a + b \exp(\xi) + d \exp(-\xi),$$

$$v(t, x, y) = \lambda_0 + \lambda_1 u(t, x, y),$$

которое удовлетворяет начальному условию

$$u(0, x, y) = 1 - [a + b \exp(\beta x + \gamma y + \varphi) + d \exp(-\beta x - \gamma y - \varphi)]^{-2},$$

$$v(0, x, y) = \lambda_0 + \lambda_1 u(0, x, y).$$

Таким образом, предложенный метод позволяет аналитически моделировать волновые решения двумерных уравнений Фишера и Лотки-Вольтерра с различными типами нелинейности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Lotka, A.J.** Updated oscillations derived from the law of mass action / A.J. Lotka // J. Amer. Chem. Soc., 1920. – Vol. 42. – P. 1595-1599.
2. **Volterra, V.** Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi / V. Volterra // Mem. Acad. Lincei, 1926. – Vol. 2. – P. 31-113.
3. **Fisher, R.A.** The wave of advance of advantageous genes / R.A. Fisher // Ann. Eugenics, 1937. – Vol. 7. – P. 353-369.
4. **Колмогоров А.Н.** Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме / А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский, Н.С. Пискунов // Бюллетень МГУ. Сер. А. Матем. и механика, 1937. – Т. 1. – С. 1-25.
5. **Canosa, J.** Diffusion in nonlinear multiplicative media / J. Canosa // J. Math. Phys., 1969. – Vol. 10. – P. 1862-1868.
6. **Aronson, D.G.** Partial differential equations and related topics / D.G. Aronson, H.F. Weinberger // Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1975. – Vol. 446. – P. 5-49.
7. **Ablowitz, M.J.** Explicit solution of Fisher's equation for a special wave speed / M.J. Ablowitz, A. Zeppetella // Bull. Math. Biol., 1979. – Vol. 41. – P. 835-840.
8. **Shigesada, N.** Spatial segregation of interacting species / N. Shigesada, K. Kawasaki, E. Teramoto // J. Theor. Biol., 1979. – Vol. 79. – P. 83-99.
9. **Murray, J.D.** Mathematical biology / J.D. Murray. – Springer, 1989.
10. **Brazhnik, P.K.** Travelling waves and static structures in a two-dimensional exactly solvable reaction-diffusion system / P.K. Brazhnik, J.J. Tyson // J. Phys. A: Math. Gen., 1999. – Vol. 32. – P. 8033-8044.
11. **Brazhnik, P.K.** On travelling wave solutions of Fisher's equation in two spatial dimensions / P.K. Brazhnik, J.J. Tyson // SIAM. J. Appl. Math., 1999. – Vol. 60. – P. 371-391.
12. **Cherniha, R.** Lie symmetries of nonlinear two-dimensional reaction-diffusion systems / R. Cherniha // Rept. Math. Phys., 2000. – Vol. 46. – P. 63-76.
13. **Чернига, Р.М.** Нові точні розв'язки та їхні властивості одного нелінійного рівняння математичної біології / Р.М. Чернига // Укр. мат. журнал, 2001. – Т. 53. – № 10. – С. 1409-1421.
14. **Bindu, P.S.** Symmetries and integrability properties of generalized Fisher type nonlinear diffusion equation / P.S. Bindu, M. Lakshmanan // Proceedings of institute of mathematics of NAS of Ukraine, 2002. – Vol. 43. – Part 1. – P. 36-48.
15. **Чернига, Р.М.** Дифузійна система Лотки-Вольтерра: симетрії Лі, точні та числові розв'язки / Р.М. Чернига, В.А. Дутка // Укр. мат. журнал, 2004. – Т. 56. – № 10. – С. 1395-1404.
16. **Жестков, С.В.** Конструктивные методы построения глобальных решений нелинейных уравнений в частных производных / С.В. Жестков. – Могилев: МГУ им. А.А. Кулешова, 2006.
17. **Зайцев, В.Ф.** Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения. / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. – М.: Международная программа образования, 1996.
18. **Жестков, С.В.** О существовании новых форм волновых решений нелинейных уравнений математической биологии / С.В. Жестков, А.А. Романенко // Весці НАНБ. Сер. фіз.-мат. наук, 2010. – № 2. – С. 46-51.
19. **Мизохата, С.** Теория уравнений с частными производными / С. Мизохата. – М.: Мир, 1977.

-
20. **Сидоров, С.В.** Бегущие волны и динамический хаос в активных средах: численное исследование / С.В. Сидоров // Дифференц. уравнения, 2009. – Т. 45. – № 2. – С. 250-254.
21. **Баранник, А.Ф.** Про нелінійні розв'язки нелінійного рівняння реакції-дифузії / А.Ф. Баранник, И.И. Юрик // Доп. Нац. АН. України, 2005. – № 2. – С. 11-17.

Поступила в редакцію 27.04.2010 г.