УДК 517.925

В.Н. ЛАПТИНСКИЙ, О.А. МАКОВЕЦКАЯ

АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА – РИККАТИ (левосторонняя регуляризация)

Получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости периодической краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова – Риккати и априорная оценка области локализации решения. Дан итерационный алгоритм построения решения, основанный на вычислительной схеме классического метода последовательных приближений.

Введение

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + XQ(t)X + F(t,X),\ X(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{1}$$

$$X(0) = X(\omega), \tag{2}$$

где $t \in I$, A, B, $Q \in \mathbb{C}(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, $F \in \mathbb{C}(D_{\tilde{\rho}},\mathbb{R}^{n\times n})$. Предполагается, что матрица-функция $F(t,X)$ в области $D_{\tilde{\rho}} = \{(t,X): t \in I,\ \|X\| < \tilde{\rho}\}$ удовлетворяет относительно X условию Липшица (локально); $F(t,0) \not\equiv 0$; $I = [0,\omega]$, $\omega > 0$, $0 < \tilde{\rho} \le \infty$.

При $Q = 0$ двухточечная краевая задача качественными методами исследовалась в работе [1], конструктивными методами [2] – в [3–5], с периодическими краевыми условиями – в [6–8].

Основная часть

Примем следующие обозначения:

$$D_\rho = \{(t,X):\ t \in I,\ \|X\| \le \rho\},\ D = \{X(t): \|X\|_{\mathbb{C}} \le \rho\},\ \tilde{A}(\omega) = \int_0^\omega A(\tau)d\tau,$$

$$\gamma = \|\tilde{A}^{-1}(\omega)\|,\ \alpha = \max_t \|A(t)\|,\ \beta = \max_t \|B(t)\|,\ \delta = \max_t \|Q(t)\|,\ h = \max_t \|F(t,0)\|,$$

$$\varphi(\rho) = \gamma\delta\omega\left(1+\frac{1}{2}\alpha\omega\right)\rho^2 + \gamma\omega\left[\beta + L + \frac{1}{2}\alpha\omega(\alpha+\beta+L)\right]\rho + \gamma\omega h\left(1+\frac{1}{2}\alpha\omega\right),$$

$$q(\rho) = \gamma\delta\omega(\alpha\omega+2)\rho + \frac{1}{2}\gamma\alpha\omega^2(\alpha+\beta+L) + \gamma\omega(\beta+L),\ \ \|X\|_{\mathbb{C}} = \max_t \|X(t)\|,$$

где $0<\rho<\tilde{\rho}$, $t\in I$, $L=L(\rho)>0$ – постоянная Липшица для $F(t,X)$ в области D_ρ, $\|\cdot\|$ – подходящая норма матриц, например, любая из норм, приведенных в [9, с. 21].

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$\det\tilde{A}(\omega)\neq 0, \tag{3}$$

$$\varphi(\rho)\leq\rho, \tag{4}$$

$$q(\rho)<1. \tag{5}$$

Тогда в области D_ρ решение задачи (1), (2) существует и единственно, при этом справедлива оценка $\|X\|_C\leq\varphi(\rho)$.

Доказательство. Используя условие (3), сначала выведем матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2).

Пусть $X(t)$ – решение задачи (1), (2). Тогда из (1) имеем

$$X(t)=X(0)+\int_0^t\left[A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)+X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+F(\tau,X(\tau))\right]d\tau. \tag{6}$$

Полагая в (6) $t=\omega$, получим на основании условия (2)

$$\int_0^\omega\left[A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)+X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+F(\tau,X(\tau))\right]d\tau=0. \tag{7}$$

Запишем соотношение (7) в следующем виде:

$$\int_0^\omega A(\tau)X(\tau)d\tau=-\int_0^\omega\left[X(\tau)B(\tau)+X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+F(\tau,X(\tau))\right]d\tau. \tag{8}$$

В (8) воспользуемся тождеством типа [2, с. 47]:

$$\int_0^\omega A(\tau)X(\tau)d\tau=\tilde{A}(\omega)X(t)-\int_0^t\left(\int_0^\tau A(\sigma)d\sigma\right)dX(\tau)+\int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma\right)dX(\tau). \tag{9}$$

Соотношение (8) на основании (9) и в силу (1) можно записать в следующем виде:

$$\tilde{A}(\omega)X(t)=\int_0^t\left(\int_0^\tau A(\sigma)d\sigma\right)\left[A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)+X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+\right.$$

$$\left.+F(\tau,X(\tau))\right]d\tau-\int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma\right)\left[A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)+X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+\right.$$

$$\left.+F(\tau,X(\tau))\right]d\tau-\int_0^\omega\left[X(\tau)B(\tau)+X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+F(\tau,X(\tau))\right]d\tau.$$

Так как, согласно (3), $\det\tilde{A}(\omega)\neq 0$, то отсюда получим матричное интегральное уравнение вида

$$X(t)=\tilde{A}^{-1}(\omega)\left\{\int_0^t\left(\int_0^\tau A(\sigma)d\sigma\right)\left[A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)+X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+\right.\right.$$

$$\left.+F(\tau,X(\tau))\right]d\tau-\int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma\right)\left[A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)+X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+\right.$$

$$\left.\left.+F(\tau,X(\tau))\right]d\tau-\int_0^\omega\left[X(\tau)B(\tau)+X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+F(\tau,X(\tau))\right]d\tau\right\}.(10)$$

Уравнение (10) можно записать в следующем виде:

$$X(t)=\int_0^\omega K(t,\tau)\left[A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)+X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+F(\tau,X(\tau))\right]d\tau-$$

$$-\tilde{A}^{-1}(\omega)\int_0^\omega\left[X(\tau)B(\tau)+X(\tau)Q(\tau)X(\tau)+F(\tau,X(\tau))\right]d\tau,$$

где

$$K(t,\tau)=\begin{cases}\tilde{A}^{-1}(\omega)\int_0^\tau A(\sigma)d\sigma, & 0\le\tau\le t\le\omega,\\ -\tilde{A}^{-1}(\omega)\int_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma, & 0\le t<\tau\le\omega.\end{cases}$$

Верно и обратное: всякое непрерывное решение матричного интегрального уравнения (10) является решением задачи (1), (2). Это можно показать с помощью несложных выкладок. А именно: сначала обратимся к тождеству (10). Дифференцируя по t обе части этого тождества, получим

$$dX(t)=\left[A(t)X(t)+X(t)B(t)+X(t)Q(t)X(t)+F(t,X(t))\right]dt.$$

Далее воспользуемся этим соотношением в (10) и выполним затем интегрирование по частям, используя известную формулу [9, с. 52]. Тогда получим последовательно

$$X(t)=\tilde{A}^{-1}(\omega)\left\{\int_0^t\left(\int_0^\tau A(\sigma)d\sigma\right)dX(\tau)-\int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma\right)dX(\tau)-\right.$$

$$\left.-\int_0^\omega\left[dX(\tau)-A(\tau)X(\tau)d\tau\right]\right\}=\tilde{A}^{-1}(\omega)\left\{\left(\int_0^t A(\sigma)d\sigma\right)X(t)-\int_0^t A(\tau)X(\tau)d\tau+\right.$$

$$\left.+\left(\int_t^\omega A(\sigma)d\sigma\right)X(t)-\int_t^\omega A(\tau)X(\tau)d\tau-\int_0^\omega dX(\tau)+\int_0^\omega A(\tau)X(\tau)d\tau\right\}=$$

$$= \tilde{A}^{-1}(\omega)\left\{\tilde{A}(\omega)X(t) - \int_0^\omega dX(\tau)\right\} = X(t) - \tilde{A}^{-1}(\omega)\int_0^\omega dX(\tau).$$

Отсюда имеем

$$\int_0^\omega dX(\tau) = 0,$$

то есть условие (2) имеет место.

Исследуем разрешимость уравнения (10). Это уравнение запишем в операторной форме:

$$X = \mathcal{L}(X), \tag{11}$$

где через $\mathcal{L}$ обозначен соответствующий интегральный оператор в (10). Этот оператор действует на множестве $\mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$.

Покажем, что из условий (4), (5) следует выполнение принципа Банаха – Каччиопполи [10, с. 605] сжимающих отображений на множестве D, то есть в замкнутом шаре $\|X\|_{\mathbb{C}} \le \rho$.

Сначала покажем, что $\mathcal{L}(X) \in D$ для произвольной матрицы-функции $X(t) \in D$. Выполнив оценки по норме в (11), получим последовательно

$$\|\mathcal{L}(X)\| \le \|\tilde{A}^{-1}(\omega)\| \Bigg\| \int_0^t \left(\int_0^\tau A(\sigma)d\sigma\right)\left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + \right.$$

$$\left. + F(\tau, X(\tau))\right]d\tau - \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma\right)\left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + \right.$$

$$\left. + F(\tau, X(\tau))\right]d\tau - \int_0^\omega \left[X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))\right]d\tau \Bigg\| \le$$

$$\le \gamma \left\{ \int_0^t \left\| \left(\int_0^\tau A(\sigma)d\sigma\right) \right\| \left\| A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau)) \right\| d\tau + \right.$$

$$+ \int_t^\omega \left\| \left(\int_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma\right) \right\| \left\| A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau)) \right\| d\tau +$$

$$\left. + \int_0^\omega \left\| X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau)) \right\| d\tau \right\} \le$$

$$\le \gamma \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau \|A(\sigma)\| d\sigma\right) \left[\left(\|A(\tau)\| + \|B(\tau)\|\right)\|X(\tau)\| + \|Q(\tau)\|\|X(\tau)\|^2 + \right. \right.$$

$$+\left\|F(\tau,X(\tau))\right\|\Big]d\tau+\int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega\left\|A(\sigma)\right\|d\sigma\right)\Big[\left(\left\|A(\tau)\right\|+\left\|B(\tau)\right\|\right)\left\|X(\tau)\right\|+\left\|Q(\tau)\right\|\left\|X(\tau)\right\|^2+$$

$$+\left\|F(\tau,X(\tau))\right\|\Big]d\tau+\int_0^\omega\left(\left\|B(\tau)\right\|\left\|X(\tau)\right\|+\left\|Q(\tau)\right\|\left\|X(\tau)\right\|^2+\left\|F(\tau,X(\tau))\right\|\right)d\tau\Bigg\}\le$$

$$\le\gamma\Bigg\{\alpha\int_0^t\tau\,\Big[(\alpha+\beta)\left\|X(\tau)\right\|+\delta\left\|X(\tau)\right\|^2+\left\|F(\tau,X(\tau))\right\|\Big]d\tau+$$

$$+\alpha\int_t^\omega(\omega-\tau)\,\Big[(\alpha+\beta)\left\|X(\tau)\right\|+\delta\left\|X(\tau)\right\|^2+\left\|F(\tau,X(\tau))\right\|\Big]d\tau+$$

$$+\int_0^\omega\Big[\beta\left\|X(\tau)\right\|+\delta\left\|X(\tau)\right\|^2+\left\|F(\tau,X(\tau))\right\|\Big]d\tau\Bigg\}\le$$

$$\le\gamma\omega\left\{\frac{1}{2}\alpha\omega\left[\delta\rho^2+(\alpha+\beta+L)\rho+h\right]+\delta\rho^2+(\beta+L)\rho+h\right\}.$$

Таким образом,

$$\left\|\mathcal{L}(X)\right\|\le\gamma\omega\left\{\frac{1}{2}\alpha\omega\left[\delta\rho^2+(\alpha+\beta+L)\rho+h\right]+\delta\rho^2+(\beta+L)\rho+h\right\}=\varphi(\rho).\quad(12)$$

Из (12) на основании (4) следует соотношение

$$\left\|\mathcal{L}(X)\right\|_{\mathbb{C}}\le\rho.\quad(13)$$

Далее из (11) имеем для произвольных $\tilde{X}$, $\tilde{\tilde{X}}\in D$:

$$\mathcal{L}(\tilde{\tilde{X}})-\mathcal{L}(\tilde{X})=$$

$$=\tilde{A}^{-1}(\omega)\Bigg\{\int_0^t\left(\int_0^\tau A(\sigma)d\sigma\right)\Big[A(\tau)\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)+\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)B(\tau)+$$

$$+\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)+F\left(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\right)-F\left(\tau,\tilde{X}(\tau)\right)\Big]d\tau-$$

$$-\int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma\right)\Big[A(\tau)\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)+\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)B(\tau)+$$

$$+\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)+F\left(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\right)-F\left(\tau,\tilde{X}(\tau)\right)\Big]d\tau-$$

$$-\int_0^\omega\Big[\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)B(\tau)+\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)+$$

$$+F\left(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\right)-F\left(\tau,\tilde{X}(\tau)\right)\Big]d\tau\Big\}.$$

Преобразуем следующее выражение:

$$\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)=\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)+$$
$$+\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)=\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)+$$
$$+\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)Q(\tau)\tilde{X}(\tau),$$

а затем оценим его по норме

$$\left\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)\right\|\le 2\rho\delta\left\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right\|.$$

Используя эту оценку, получим последовательно

$$\left\|\mathcal{L}(\tilde{\tilde{X}})-\mathcal{L}(\tilde{X})\right\|\le\gamma\Big\{\int_0^t\left\|\int_0^\tau A(\sigma)d\sigma\right\|\Big\|A(\tau)\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)+\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)B(\tau)+$$
$$+\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)+F\left(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\right)-F\left(\tau,\tilde{X}(\tau)\right)\Big\|d\tau+$$
$$+\int_t^\omega\left\|\int_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma\right\|\Big\|A(\tau)\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)+\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)B(\tau)+\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-$$
$$-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)+F\left(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\right)-F\left(\tau,\tilde{X}(\tau)\right)\Big\|d\tau+\int_0^\omega\Big\|\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)B(\tau)+$$
$$+\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)+F\left(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\right)-F\left(\tau,\tilde{X}(\tau)\right)\Big\|d\tau\Big\}\le$$
$$\le\gamma\Big\{\int_0^t\left(\int_0^\tau\|A(\sigma)\|d\sigma\right)\Big[\left(\|A(\tau)\|+\|B(\tau)\|\right)\left\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right\|+$$
$$+\left\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)\right\|+\left\|F\left(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\right)-F\left(\tau,\tilde{X}(\tau)\right)\right\|\Big]d\tau+$$
$$+\int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega\|A(\sigma)\|d\sigma\right)\Big[\left(\|A(\tau)\|+\|B(\tau)\|\right)\left\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right\|+$$
$$+\left\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)\right\|+\left\|F\left(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\right)-F\left(\tau,\tilde{X}(\tau)\right)\right\|\Big]d\tau+$$
$$+\int_0^\omega\Big[\|B(\tau)\|\left\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right\|+\left\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)\right\|+$$

$$+\left\|F\left(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\right)-F\left(\tau,\tilde{X}(\tau)\right)\right\|d\tau\Bigg\}\le\gamma\Bigg\{\alpha(\alpha+\beta+2\delta\rho+L)\int_0^t\tau\left\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right\|d\tau+$$

$$+\alpha(\alpha+\beta+2\delta\rho+L)\int_t^{\omega}(\omega-\tau)\left\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right\|d\tau+$$

$$+(\beta+2\delta\rho+L)\int_0^{\omega}\left\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right\|d\tau\Bigg\}\le$$

$$\le\gamma\omega\left[\frac{1}{2}\alpha\omega(2\delta\rho+\alpha+\beta+L)+2\delta\rho+\beta+L\right]\left\|\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X}\right\|_{\mathbb{C}}=q\left\|\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X}\right\|_{\mathbb{C}}.$$

Отсюда имеем оценку

$$\left\|\mathcal{L}(\tilde{\tilde{X}})-\mathcal{L}(\tilde{X})\right\|_{\mathbb{C}}\le q\left\|\tilde{\tilde{X}}-\tilde{X}\right\|_{\mathbb{C}}. \tag{14}$$

Из анализа соотношений (13), (14) видно, что неравенства (4), (5) являются условиями принципа сжимающих отображений применительно к (11). На основании этого заключаем, что в шаре $\|X\|_{\mathbb{C}}\le\rho$ решение уравнения (11) существует и единственно. Таким образом, задача (1), (2) однозначно разрешима в области D_ρ. При этом на основании (12) справедлива оценка $\|X\|_{\mathbb{C}}\le\varphi(\rho)$. Теорема полностью доказана.

Для построения решения матричного интегрального уравнения (10) воспользуемся классическим методом последовательных приближений [10, с. 605], [11, с. 53]:

$$X_{k+1}(t)=\tilde{A}^{-1}(\omega)\Bigg\{\int_0^t\left(\int_0^{\tau}A(\sigma)d\sigma\right)\Big[A(\tau)X_k(\tau)+X_k(\tau)B(\tau)+X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau)+$$

$$+F\left(\tau,X_k(\tau)\right)\Big]d\tau-\int_t^{\omega}\left(\int_{\tau}^{\omega}A(\sigma)d\sigma\right)\Big[A(\tau)X_k(\tau)+X_k(\tau)B(\tau)+$$

$$+X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau)+F\left(\tau,X_k(\tau)\right)\Big]d\tau-$$

$$-\int_0^{\omega}\Big[X_k(\tau)B(\tau)+X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau)+F\left(\tau,X_k(\tau)\right)\Big]d\tau\Bigg\},\ k=0,1,2,..., \tag{15}$$

где $X_0(t)$ – произвольная матричная функция класса $\mathbb{C}[0,\omega]$, принадлежащая множеству D.

Используя условие (4), нетрудно доказать индукцией по k, что все приближенные решения, полученные по алгоритму (15), принадлежат множеству D. Основой доказательства является рекуррентная оценка

$$\|X_{k+1}\|_{\mathbb{C}}\le\gamma\delta\omega\left(1+\frac{1}{2}\alpha\omega\right)\|X_k\|_{\mathbb{C}}^2+\gamma\omega\left[\beta+L+\frac{1}{2}\alpha\omega(\alpha+\beta+L)\right]\|X_k\|_{\mathbb{C}}+$$

$$+\gamma\omega h\left(1+\frac{1}{2}\alpha\omega\right),\ k=0,1,2,...,$$

которую нетрудно получить по аналогии с (12).

Изучим вопрос о сходимости полученной последовательности. Следуя известному приему [11, с. 54], этот вопрос заменим эквивалентным вопросом о сходимости ряда

$$X_0(t)+(X_1(t)-X_0(t))+(X_2(t)-X_1(t))+...+(X_k(t)-X_{k-1}(t))+... \qquad (16)$$

Докажем равномерную по $t\in[0,\omega]$ сходимость ряда (16). Для этого построим сходящийся числовой ряд, который мажорирует на $[0,\omega]$ матричный функциональный ряд (16).

Оценим $\|X_{m+1}(t)-X_m(t)\|$, учитывая, что

$$X_{m+1}(t)-X_m(t)=\mathcal{L}(X_m(t))-\mathcal{L}(X_{m-1}(t)),\ m=1,2,... \qquad (17)$$

Выполнив оценки в (17), получим на основании (14)

$$\|X_{m+1}(t)-X_m(t)\|=\|\mathcal{L}(X_m(t))-\mathcal{L}(X_{m-1}(t))\|\le q\|X_m-X_{m-1}\|_{\mathbb{C}}.$$

Отсюда следует рекуррентная оценка

$$\|X_{m+1}-X_m\|_{\mathbb{C}}\le q\|X_m-X_{m-1}\|_{\mathbb{C}},\ m=1,2,... \qquad (18)$$

На основе (18) получим явную оценку

$$\|X_{m+1}-X_m\|_{\mathbb{C}}\le q^m\|X_1-X_0\|_{\mathbb{C}},\ m=1,2,... \qquad (19)$$

при этом $\|X_1-X_0\|_{\mathbb{C}}=\|\mathcal{L}(X_0)-X_0\|_{\mathbb{C}}$.

Используя оценку (18), нетрудно доказать с помощью известных приемов [10, с. 605], [11, с. 54], что последовательность $\{X_k(t)\}_0^\infty$ сходится равномерно по $t\in I$ к решению интегрального уравнения (10), при этом справедливы оценки

$$\|X-X_k\|_{\mathbb{C}}\le\frac{q^k}{1-q}\|X_1-X_0\|_{\mathbb{C}},\ k=0,1,2,..., \qquad (20)$$

$$\|X\|_{\mathbb{C}}\le\|X_0\|_{\mathbb{C}}+\frac{\|X_1-X_0\|_{\mathbb{C}}}{1-q}. \qquad (21)$$

Замечание. Приближенные решения, построенные по алгоритму (15), вообще говоря, не обязаны удовлетворять краевому условию (2). В связи с этим следует получить соответствующую оценку для $\|X_{k+1}(\omega)-X_{k+1}(0)\|$, $k=0,1,2,...$ На основании (15) имеем

$$\frac{dX_{k+1}(t)}{dt}=A(t)X_k(t)+X_k(t)B(t)+X_k(t)Q(t)X_k(t)+F(t,X_k(t)). \qquad (22)$$

Подставляя (22) в правую часть (15) и выполняя затем интегрирование по частям, получим

$$\tilde{A}^{-1}(\omega)\left\{X_{k+1}(\omega)-X_{k+1}(0)+\int_0^\omega A(\tau)\left[X_{k+1}(\tau)-X_k(\tau)\right]d\tau\right\}=0.$$

Отсюда имеем соотношение

$$\Delta_{k+1}\equiv X_{k+1}(\omega)-X_{k+1}(0)=-\int_0^\omega A(\tau)\left[X_{k+1}(\tau)-X_k(\tau)\right]d\tau. \qquad (23)$$

Выполнив оценки по норме в (23), получим

$$\left\|\Delta_{k+1}\right\|\le\int_0^\omega\left\|A(\tau)\left[X_{k+1}(\tau)-X_k(\tau)\right]\right\|d\tau\le\int_0^\omega\left\|A(\tau)\right\|\,\left\|X_{k+1}(\tau)-X_k(\tau)\right\|d\tau\le$$

$$\le\alpha\int_0^\omega\left\|X_{k+1}(\tau)-X_k(\tau)\right\|d\tau\le\alpha\omega\left\|X_{k+1}-X_k\right\|_{\mathrm{C}}.$$

Отсюда на основании (19) имеем оценку

$$\left\|X_{k+1}(\omega)-X_{k+1}(0)\right\|\le\alpha\omega q^k\left\|X_1-X_0\right\|_{\mathrm{C}},\ \ k=0,1,2,... \qquad (24)$$

Оценки (20), (21), (24) следует дополнить оценкой для $\left\|X_1-X_0\right\|_{\mathrm{C}}$. В случае $X_0=0$ эту оценку можно получить в конструктивном виде. В самом деле, из (15) при $k=0$ имеем в этом случае

$$X_1(t)=\int_0^\omega K(t,\tau)F(\tau,0)d\tau. \qquad (25)$$

Выполнив оценки по норме в (25), получим

$$\left\|X_1(t)\right\|\le\int_0^\omega\left\|K(t,\tau)F(\tau,0)\right\|d\tau\le h\int_0^\omega\left\|K(t,\tau)\right\|d\tau\le\frac{1}{2}\gamma\alpha\omega^2 h. \qquad (26)$$

Используя (26), получим из (21)

$$\left\|X\right\|_{\mathrm{C}}\le\frac{\gamma\alpha\omega^2 h}{2(1-q)}. \qquad (27)$$

Очевидно, оценка (27) будет эффективной, если

$$\frac{\gamma\alpha\omega^2 h}{2(1-q)}\le\rho.$$

Легко видеть, что это соотношение выполняется при достаточно малых значениях ω, h.

Итак, доказана

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (3)–(5). *Тогда в области* D_ρ *решение задачи* (1), (2) *существует и единственно. Это решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением* (15).

Заключение

Основные результаты данной работы заключаются в следующем:

- в невырожденном случае с левосторонней регуляризацией разработана конструктивная методика получения эквивалентного интегрального уравнения для периодической краевой задачи уравнения Ляпунова - Риккати;
- получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости указанного уравнения;
- исследован алгоритм построения приближенных решений с вычислительной схемой классического метода последовательных приближений;
- выведены конструктивные оценки области локализации решения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. ***Murty, K.N.*** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems existence and uniqueness / K.N. Murty, G.W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl. – 1992. – V. 167. – P. 505–515.
2. ***Лаптинский, В.Н.*** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В.Н. Лаптинский. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
3. ***Laptinsky, V.N.*** On the Two-Point Boundary-Value Problem for the Riccati Matrix Differential Equations / V.N. Laptinsky, I.I. Makovetsky // Central European Science Journal. – 2005. – V. 3(1). – P. 143–154.
4. ***Лаптинский, В.Н.*** К конструктивному анализу двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова / В.Н. Лаптинский, И.И. Маковецкий // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41. – № 7. – С. 994–996.
5. ***Лаптинский, В.Н.*** О разрешимости двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова / В.Н. Лаптинский, И.И. Маковецкий // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 3. – С. 218–223.
6. ***Лаптинский, В.Н.*** О периодических решениях нелинейных матричных дифференциальных уравнений / В.Н. Лаптинский // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1997. – № 4. – С. 14–18.
7. ***Лаптинский, В.Н.*** Конструктивный анализ периодической краевой задачи для нелинейного матричного дифференциального уравнения Ляпунова / В.Н. Лаптинский. – Могилев : Белорусско-Российский университет, 2007. – 26 с. – (Препринт / ИТМ НАН Беларуси; № 7).
8. ***Подолян, С.В.*** Периодические решения нелинейных матричных дифференциальных уравнений / С.В. Подолян // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1988. – № 6. – С. 31–34.
9. ***Демидович, Б.П.*** Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1967. – 472 с.
10. ***Канторович, Л.В.*** Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 744 с.
11. ***Бибиков, Ю.Н.*** Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Н. Бибиков. – М. : Высшая школа, 1991. – 303 с.

Поступила в редакцию 04.10.2011 г.