

# АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА – РИККАТИ (правосторонняя регуляризация)

*Получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости периодической краевой задачи для матричного дифференциального уравнения Ляпунова – Риккати и априорная оценка области локализации решения. Исследован итерационный алгоритм построения решения, основанный на вычислительной схеме классического метода последовательных приближений.*

## Введение

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + XQ(t)X + F(t, X), \quad X(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad (1)$$

$$X(0) = X(\omega), \quad (2)$$

где  $t \in I$ ,  $A, B, Q \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ ,  $F \in C(D_{\tilde{\rho}}, \mathbb{R}^{n \times n})$ . Предполагается, что матрица-функция  $F(t, X)$  в области  $D_{\tilde{\rho}} = \{(t, X) : t \in I, \|X\| < \tilde{\rho}\}$  удовлетворяет относительно  $X$  условию Липшица (локально);  $F(t, 0) \not\equiv 0$ ;  $I = [0, \omega]$ ,  $\omega > 0$ ,  $0 < \tilde{\rho} \leq \infty$ .

При  $Q = 0$  двухточечная краевая задача качественными методами исследовалась в работе [1], конструктивными методами [2] – в [3–5], с периодическими краевыми условиями – в [6–8] (в этих работах исследован невырожденный случай с двухсторонней регуляризацией).

## Основная часть

Примем следующие обозначения:

$$D_\rho = \{(t, X) : t \in I, \|X\| \leq \rho\}, D = \{X(t) : \|X\|_c \leq \rho\}, \tilde{B}(\omega) = \int_0^\omega B(\tau) d\tau,$$

$$\tilde{\gamma} = \|\tilde{B}^{-1}(\omega)\|, \alpha = \max_t \|A(t)\|, \beta = \max_t \|B(t)\|, \delta = \max_t \|Q(t)\|, h = \max_t \|F(t, 0)\|,$$

$$\varphi(\rho) = \tilde{\gamma}\delta\omega \left(1 + \frac{1}{2}\beta\omega\right) \rho^2 + \tilde{\gamma}\omega \left[\alpha + L + \frac{1}{2}\beta\omega(\alpha + \beta + L)\right] \rho + \tilde{\gamma}\omega h \left(1 + \frac{1}{2}\beta\omega\right),$$

$$q(\rho) = \tilde{\gamma}\delta\omega(\beta\omega + 2)\rho + \frac{1}{2}\tilde{\gamma}\beta\omega^2(\alpha + \beta + L) + \tilde{\gamma}\omega(\alpha + L), \quad \|X\|_c = \max_t \|X(t)\|,$$

где  $0 < \rho < \tilde{\rho}$ ,  $t \in I$ ,  $L = L(\rho) > 0$  – постоянная Липшица для  $F(t, X)$  в области  $D_\rho$ ,  $\|\cdot\|$  – норма матриц ( $S$  и  $T$ ), удовлетворяющая мультипликативному неравенству  $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$ , например, любая из норм, приведенных в [9, с. 21].

**Теорема 1.** Пусть выполнены следующие условия:

$$\det \tilde{B}(\omega) \neq 0, \quad (3)$$

$$\varphi(\rho) \leq \rho, \quad (4)$$

$$q(\rho) < 1. \quad (5)$$

Тогда в области  $D_\rho$  решение задачи (1), (2) существует и единственно, при этом справедлива оценка  $\|X\|_c \leq \varphi(\rho)$ .

**Доказательство.** Используя условие (3), выведем матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2).

Пусть  $X(t)$  – решение задачи (1), (2). Тогда из (1) имеем

$$X(t) = X(0) + \int_0^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau. \quad (6)$$

Полагая в (6)  $t = \omega$ , получим на основании условия (2)

$$\int_0^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau = 0. \quad (7)$$

Запишем соотношение (7) в следующем виде:

$$\int_0^\omega X(\tau)B(\tau) d\tau = - \int_0^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau. \quad (8)$$

В (8) воспользуемся тождеством типа [2, с. 47]:

$$\int_0^\omega X(\tau)B(\tau) d\tau = X(t)\tilde{B}(\omega) - \int_0^t (dX(\tau)) \left( \int_0^\tau B(\sigma) d\sigma \right) + \int_t^\omega (dX(\tau)) \left( \int_\tau^\omega B(\sigma) d\sigma \right). \quad (9)$$

Соотношение (8) на основании (9) и в силу (1) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} X(t)\tilde{B}(\omega) = & \int_0^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + \\ & + F(\tau, X(\tau))] \left( \int_0^\tau B(\sigma) d\sigma \right) d\tau - \int_t^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + \\ & + F(\tau, X(\tau))] \left( \int_\tau^\omega B(\sigma) d\sigma \right) d\tau - \int_0^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau. \end{aligned}$$

Так как согласно (3),  $\det \tilde{B}(\omega) \neq 0$  то отсюда получим матричное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} X(t) = & \left\{ \int_0^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + \right. \\ & + F(\tau, X(\tau))] \left( \int_0^\tau B(\sigma) d\sigma \right) d\tau - \int_t^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + \\ & + F(\tau, X(\tau))] \left( \int_\tau^\omega B(\sigma) d\sigma \right) d\tau - \int_0^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + \\ & \left. + F(\tau, X(\tau))] d\tau \right\} \tilde{B}^{-1}(\omega). \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение (10) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} X(t) = & \int_0^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] K(t, \tau) d\tau - \\ & - \int_0^\omega [X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))] d\tau \tilde{B}^{-1}(\omega), \end{aligned}$$

где

$$K(t, \tau) = \begin{cases} \int_0^\tau B(\sigma) d\sigma \tilde{B}^{-1}(\omega), & 0 \leq \tau \leq t \leq \omega, \\ -\int_\tau^\omega B(\sigma) d\sigma \tilde{B}^{-1}(\omega), & 0 \leq t < \tau \leq \omega. \end{cases}$$

Верно и обратное: всякое непрерывное решение матричного интегрального уравнения (10) является решением задачи (1), (2). Для доказательства продифференцируем тождество (10). В результате получим

$$dX(t) = [A(t)X(t) + X(t)B(t) + X(t)Q(t)X(t) + F(t, X(t))] dt.$$

Подставляя это соотношение в (10) и выполняя затем интегрирование по частям, используя известную формулу [9, с. 52], последовательно найдем

$$\begin{aligned} X(t) &= \left\{ \int_0^t (dX(\tau)) \left( \int_0^\tau B(\sigma) d\sigma \right) - \int_t^\omega (dX(\tau)) \left( \int_\tau^\omega B(\sigma) d\sigma \right) - \right. \\ &- \left. \int_0^\omega [dX(\tau) - X(\tau)B(\tau)d\tau] \right\} \tilde{B}^{-1}(\omega) = \left\{ X(t) \left( \int_0^t B(\sigma) d\sigma \right) - \int_0^t X(\tau)B(\tau)d\tau + \right. \\ &+ \left. X(t) \left( \int_t^\omega B(\sigma) d\sigma \right) - \int_t^\omega X(\tau)B(\tau)d\tau - \int_0^\omega dX(\tau) + \int_0^\omega X(\tau)B(\tau)d\tau \right\} \tilde{B}^{-1}(\omega) = \\ &= \left\{ X(t) \tilde{B}(\omega) - \int_0^\omega dX(\tau) \right\} \tilde{B}^{-1}(\omega) = X(t) - \int_0^\omega dX(\tau) \tilde{B}^{-1}(\omega). \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\int_0^\omega dX(\tau) = 0,$$

или

$$X(\omega) = X(0).$$

А это и есть условие (2).

Исследуем разрешимость уравнения (10). Для этого запишем его в операторной форме

$$X = \mathcal{L}(X), \quad (11)$$

где через  $\mathcal{L}$  обозначен соответствующий интегральный оператор в (10). Заметим, что оператор действует на множестве  $\mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ .

Покажем, что из условий (4), (5) следует выполнение принципа Банаха – Каччиопполи [10, с. 605] сжимающих отображений на множестве  $D$ , то есть в замкнутом шаре  $\|X\|_{\mathbb{C}} \leq \rho$ .

Проверим, что  $\mathcal{L}(X) \in D$  для произвольной матрицы-функции  $X(t) \in D$ . Выполнив оценки по норме в (11), получим последовательно

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(X)\| &\leq \left\| \int_0^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + \right. \\ &+ \left. F(\tau, X(\tau))] \left( \int_0^\tau B(\sigma) d\sigma \right) d\tau - \int_t^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +F(\tau, X(\tau)) \left[ \int_{\tau}^{\omega} B(\sigma) d\sigma \right] d\tau - \int_0^{\omega} [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + \\
 & +F(\tau, X(\tau))] d\tau \left\| \tilde{B}^{-1}(\omega) \right\| \leq \tilde{\gamma} \left\{ \int_0^{\tau} [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + \right. \\
 & +F(\tau, X(\tau))] \left\| \left( \int_0^{\tau} B(\sigma) d\sigma \right) \right\| d\tau + \int_0^{\omega} [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + \\
 & +F(\tau, X(\tau))] \left\| \left( \int_{\tau}^{\omega} B(\sigma) d\sigma \right) \right\| d\tau + \int_0^{\omega} [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)Q(\tau)X(\tau) + \\
 & +F(\tau, X(\tau))] d\tau \left\} \leq \tilde{\gamma} \left\{ \int_0^{\tau} \int_0^{\tau} \|B(\sigma)\| d\sigma \left[ (\|A(\tau)\| + \|B(\tau)\|) \|X(\tau)\| + \|Q(\tau)\| \|X(\tau)\|^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \|F(\tau, X(\tau))\| \right] d\tau + \int_0^{\omega} \int_{\tau}^{\omega} \|B(\sigma)\| d\sigma \left[ (\|A(\tau)\| + \|B(\tau)\|) \|X(\tau)\| + \|Q(\tau)\| \|X(\tau)\|^2 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \|F(\tau, X(\tau))\| \right] d\tau + \int_0^{\omega} \left[ \|A(\tau)\| \|X(\tau)\| + \|Q(\tau)\| \|X(\tau)\|^2 + \|F(\tau, X(\tau))\| \right] d\tau \right\} \leq \\
 & \leq \tilde{\gamma} \left\{ \beta \int_0^{\tau} \left[ (\alpha + \beta) \|X(\tau)\| + \delta \|X(\tau)\|^2 + \|F(\tau, X(\tau))\| \right] d\tau + \right. \\
 & \left. + \beta \int_0^{\omega} (\omega - \tau) \left[ (\alpha + \beta) \|X(\tau)\| + \delta \|X(\tau)\|^2 + \|F(\tau, X(\tau))\| \right] d\tau + \right. \\
 & \left. + \int_0^{\omega} \left[ \alpha \|X(\tau)\| + \delta \|X(\tau)\|^2 + \|F(\tau, X(\tau))\| \right] d\tau \right\} \leq \\
 & \leq \tilde{\gamma} \omega \left\{ \frac{1}{2} \beta \omega \left[ \delta \rho^2 + (\alpha + \beta + L) \rho + h \right] + \delta \rho^2 + (\alpha + L) \rho + h \right\} = \varphi(\rho). \quad (12)
 \end{aligned}$$

Из (12) на основании (4) следует соотношение

$$\|\mathcal{L}(X)\|_c \leq \rho. \quad (13)$$

Из (11) имеем для произвольных  $\tilde{X}, \tilde{\tilde{X}} \in D$ :

$$\mathcal{L}(\tilde{\tilde{X}}) - \mathcal{L}(\tilde{X}) = \left\{ \int_0^{\tau} A(\tau) (\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)) + (\tilde{\tilde{X}}(\tau) - \tilde{X}(\tau)) B(\tau) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)+F\left(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\right)-F\left(\tau,\tilde{X}(\tau)\right)\left]\left[\int_0^\tau B(\sigma)d\sigma\right]d\tau- \\
& -\int_t^\omega A(\tau)\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)+\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)B(\tau)+\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)- \\
& -\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)+F\left(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\right)-F\left(\tau,\tilde{X}(\tau)\right)\left]\left[\int_\tau^\omega B(\sigma)d\sigma\right]d\tau- \\
& -\int_0^\omega A(\tau)\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)+\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)+ \\
& +F\left(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\right)-F\left(\tau,\tilde{X}(\tau)\right)\left]d\tau\right\}\tilde{B}^{-1}(\omega).
\end{aligned}$$

Преобразуем следующее выражение:

$$\begin{aligned}
& \tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)=\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)+ \\
& +\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)=\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)+ \\
& +\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)Q(\tau)\tilde{X}(\tau),
\end{aligned}$$

а затем оценим его по норме

$$\left\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)\right\|\leq 2\rho\delta\left\|\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right\|.$$

Используя эту оценку, получим последовательно

$$\begin{aligned}
& \left\|\mathcal{L}(\tilde{\tilde{X}})-\mathcal{L}(\tilde{X})\right\|\leq\tilde{\gamma}\left\{\int_0^t\left\|A(\tau)\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)+\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)B(\tau)+\right.\right. \\
& +\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)+F\left(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\right)-F\left(\tau,\tilde{X}(\tau)\right)\left.\left.\right\|\left\|\int_0^\tau B(\sigma)d\sigma\right\|d\tau+ \right. \\
& +\int_t^\omega\left\|A(\tau)\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)+\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)B(\tau)+\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\right. \\
& \left.-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)+F\left(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\right)-F\left(\tau,\tilde{X}(\tau)\right)\right\|\left\|\int_\tau^\omega B(\sigma)d\sigma\right\|d\tau+ \\
& \left.+\int_0^\omega\left\|A(\tau)\left(\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)\right)+\tilde{\tilde{X}}(\tau)Q(\tau)\tilde{\tilde{X}}(\tau)-\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)+F\left(\tau,\tilde{\tilde{X}}(\tau)\right)-\right.\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -F(\tau, \tilde{X}(\tau))\|d\tau \} \leq \tilde{\gamma} \left\{ \int_0^t (\|A(\tau)\| + \|B(\tau)\|) \|\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\| + \|\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) - \right. \\
 & \quad \left. - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)\| + \|F(\tau, \tilde{X}(\tau)) - F(\tau, \tilde{X}(\tau))\| \left[ \int_0^\tau \|B(\sigma)\|d\sigma \right] d\tau + \right. \\
 & \quad + \int_t^\omega (\|A(\tau)\| + \|B(\tau)\|) \|\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\| + \|\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)\| + \\
 & \quad \left. + \|F(\tau, \tilde{X}(\tau)) - F(\tau, \tilde{X}(\tau))\| \left[ \int_\tau^\omega \|B(\sigma)\|d\sigma \right] d\tau + \right. \\
 & \quad \left. + \int_0^\omega \|A(\tau)\| \|\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\| + \|\tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)Q(\tau)\tilde{X}(\tau)\| + \right. \\
 & \quad \left. + \|F(\tau, \tilde{X}(\tau)) - F(\tau, \tilde{X}(\tau))\| d\tau \right\} \leq \tilde{\gamma} \left\{ \beta(\alpha + \beta + 2\delta\rho + L) \int_0^t \|\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\|d\tau + \right. \\
 & \quad \left. + \beta(\alpha + \beta + 2\delta\rho + L) \int_t^\omega (\omega - \tau) \|\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\|d\tau + \right. \\
 & \quad \left. + (\alpha + 2\delta\rho + L) \int_0^\omega \|\tilde{X}(\tau) - \tilde{X}(\tau)\|d\tau \right\} \leq \\
 & \leq \tilde{\gamma}\omega \left[ \frac{1}{2}\beta\omega(2\delta\rho + \alpha + \beta + L) + 2\delta\rho + \alpha + L \right] \|\tilde{X} - \tilde{X}\|_c = q \|\tilde{X} - \tilde{X}\|_c.
 \end{aligned}$$

Отсюда получаем оценку

$$\|\mathcal{L}(\tilde{X}) - \mathcal{L}(\tilde{X})\|_c \leq q \|\tilde{X} - \tilde{X}\|_c. \tag{14}$$

Из анализа соотношений (13), (14) видно, что неравенства (4), (5) являются условиями принципа сжимающих отображений применительно к уравнению (11). На основании этого заключаем, что в шаре  $\|X\|_c \leq \rho$  решение уравнения (11) существует и единственно. Таким образом, задача (1), (2) однозначно разрешима в области  $D_\rho$ . При этом на основании (12) справедлива оценка  $\|X\|_c \leq \varphi(\rho)$ . Теорема полностью доказана.

Для построения решения матричного интегрального уравнения (10) воспользуемся классическим методом последовательных приближений [10, с. 605], [11, с. 53]:

$$X_{k+1}(t) = \left\{ \int_0^t A(\tau)X_k(\tau) + X_k(\tau)B(\tau) + X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +F(\tau, X_k(\tau)) \left[ \int_0^\tau B(\sigma) d\sigma \right] d\tau - \int_t^\omega [A(\tau)X_k(\tau) + X_k(\tau)B(\tau) + \\
& + X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau) + F(\tau, X_k(\tau))] \left[ \int_\tau^\omega B(\sigma) d\sigma \right] d\tau - \\
& - \int_0^\omega [A(\tau)X_k(\tau) + X_k(\tau)Q(\tau)X_k(\tau) + F(\tau, X_k(\tau))] d\tau \left\} \tilde{B}^{-1}(\omega), k=0,1,2,\dots, (15)
\end{aligned}$$

где  $X_0(t)$  – произвольная матричная функция класса  $\mathbb{C}[0, \omega]$ , принадлежащая множеству  $D$ .

Используя условие (4), нетрудно доказать индукцией по  $k$ , что все приближенные решения, полученные по алгоритму (15), принадлежат множеству  $D$ . Основой доказательства является рекуррентная оценка

$$\begin{aligned}
\|X_{k+1}\|_{\mathbb{C}} \leq \tilde{\gamma}\delta\omega \left( 1 + \frac{1}{2}\beta\omega \right) \|X_k\|_{\mathbb{C}}^2 + \tilde{\gamma}\omega \left[ \alpha + L + \frac{1}{2}\beta\omega(\alpha + \beta + L) \right] \|X_k\|_{\mathbb{C}} + \\
+ \tilde{\gamma}\omega h \left( 1 + \frac{1}{2}\beta\omega \right), k=0,1,2,\dots,
\end{aligned}$$

которую можно получить по аналогии с (12).

Изучим вопрос о сходимости полученной последовательности. Следуя известному приему [11, с. 54], этот вопрос заменим эквивалентным вопросом о сходимости ряда

$$X_0(t) + (X_1(t) - X_0(t)) + (X_2(t) - X_1(t)) + \dots + (X_k(t) - X_{k-1}(t)) + \dots \quad (16)$$

Докажем равномерную по  $t \in [0, \omega]$  сходимость ряда (16). Для этого построим сходящийся числовой ряд, который мажорирует на  $[0, \omega]$  матричный функциональный ряд (16). Оценим  $\|X_{m+1}(t) - X_m(t)\|$ , учитывая, что

$$X_{m+1}(t) - X_m(t) = \mathcal{L}(X_m(t)) - \mathcal{L}(X_{m-1}(t)), m=1,2,\dots \quad (17)$$

Выполнив оценки в (17), получим на основании (14)

$$\|X_{m+1}(t) - X_m(t)\| = \|\mathcal{L}(X_m(t)) - \mathcal{L}(X_{m-1}(t))\| \leq q \|X_m - X_{m-1}\|_{\mathbb{C}},$$

т.е.

$$\|X_{m+1} - X_m\|_{\mathbb{C}} \leq q \|X_m - X_{m-1}\|_{\mathbb{C}}, m=1,2,\dots \quad (18)$$

На основе (18) получим явную формулу

$$\|X_{m+1} - X_m\|_{\mathbb{C}} \leq q^m \|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}, m=1,2,\dots, \quad (19)$$

при этом  $\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}} = \|\mathcal{L}(X_0) - X_0\|_{\mathbb{C}}$ .

Используя оценку (18), нетрудно доказать с помощью известных приемов [10, с. 605], [11, с. 54], что последовательность  $\{X_k(t)\}_0^\infty$  сходит-



ся равномерно по  $t \in I$  к решению интегрального уравнения (10), при этом справедливы конструктивные оценки

$$\|X - X_k\|_{\mathbb{C}} \leq \frac{q^k}{1-q} \|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (20)$$

$$\|X\|_{\mathbb{C}} \leq \|X_0\|_{\mathbb{C}} + \frac{\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}}{1-q}. \quad (21)$$

**Замечание.** Приближенные решения, построенные по алгоритму (15) не обязаны удовлетворять краевому условию (2). В связи с этим следует получить соответствующую оценку для  $\|X_{k+1}(\omega) - X_{k+1}(0)\|$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . На основании (15) имеем

$$dX_{k+1}(t) = [A(t)X_k(t) + X_k(t)B(t) + X_k(t)Q(t)X_k(t) + F(t, X_k(t))]dt. \quad (22)$$

Подставляя (22) в правую часть (15) и выполняя затем интегрирование по частям, получим

$$\left\{ X_{k+1}(\omega) - X_{k+1}(0) + \int_0^{\omega} [X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)]B(\tau)d\tau \right\} \tilde{B}^{-1}(\omega) = 0.$$

Отсюда имеем соотношение

$$\Delta_{k+1} \equiv X_{k+1}(\omega) - X_{k+1}(0) = - \int_0^{\omega} [X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)]B(\tau)d\tau. \quad (23)$$

Выполнив оценки по норме в (23), получим

$$\begin{aligned} \|\Delta_{k+1}\| &\leq \int_0^{\omega} \|[X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)]B(\tau)\|d\tau \leq \int_0^{\omega} B(\tau) \|X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)\|d\tau \leq \\ &\leq \beta \int_0^{\omega} \|X_{k+1}(\tau) - X_k(\tau)\|d\tau \leq \beta\omega \|X_{k+1} - X_k\|_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

Отсюда на основании (19) имеем оценку

$$\|X_{k+1}(\omega) - X_{k+1}(0)\| \leq \beta\omega q^k \|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

Оценки (20), (21), (24) следует дополнить формулой для  $\|X_1 - X_0\|_{\mathbb{C}}$ .

В случае  $X_0 = 0$  эту формулу можно получить в конструктивном виде.

В самом деле из (15) при  $k = 0$  имеем

$$X_1(t) = \int_0^{\omega} F(\tau, 0)K(t, \tau)d\tau - \int_0^{\omega} F(\tau, 0)d\tau B^{-1}(\omega). \quad (25)$$

Выполнив оценки по норме в (25), получим

$$\|X_1(t)\| \leq \int_0^{\omega} \|F(\tau, 0)K(t, \tau)\|d\tau + \int_0^{\omega} \|F(\tau, 0)\|d\tau \|B^{-1}(\omega)\| \leq$$

$$\leq h \int_0^{\omega} \|K(t, \tau)\| d\tau + \tilde{\gamma}\omega h \leq \tilde{\gamma}\omega h \left( \frac{1}{2}\beta\omega + 1 \right). \quad (26)$$

Используя (26), получим из (21)

$$\|X\|_c \leq \frac{\tilde{\gamma}\omega h(\beta\omega + 2)}{2(1-q)}. \quad (27)$$

Очевидно, оценка (27) будет эффективной, если

$$\frac{\tilde{\gamma}\omega h(\beta\omega + 2)}{2(1-q)} \leq \rho.$$

Легко видеть, что это соотношение выполняется при достаточно малых значениях  $h$ .

Итак, доказана

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия (3)–(5). Тогда в области  $D_\rho$  решение задачи (1), (2) существует и единственно. Это решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением (15).

### Заключение

Основные результаты данной работы заключаются в следующем:

- в невырожденном случае с правосторонней регуляризацией получено эквивалентное интегральное уравнение для периодической краевой задачи уравнения Ляпунова – Риккати;
  - получены эффективно проверяемые достаточные условия однозначной разрешимости указанного уравнения;
  - разработан алгоритм построения приближенных решений с вычислительной схемой классического метода последовательных приближений;
  - выведены конструктивные оценки области локализации решения.
- Эти результаты обобщают и развивают соответствующие результаты, изложенные в работах [3, 8].

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Murty, K.N.** Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems existence and uniqueness / K.N. Murty, G.W. Howell, S. Sivasundaram // Journ. Mathem. Anal. and Appl., 1992. – V. 167. – P. 505–515.
2. **Лаптинский, В.Н.** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В.Н. Лаптинский. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
3. **Laptinsky, V.N.** On the Two-Point Boundary-Value Problem for the Riccati Matrix Differential Equations / V.N. Laptinsky, I.I. Makovetsky // Central European Science Journal, 2005. – V. 3(1). – P. 143–154.
4. **Лаптинский, В.Н.** К конструктивному анализу двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова / В.Н. Лаптинский, И.И. Маковецкий // Дифференц. Уравнения. – 2005. – Т. 41. – № 7. – С. 994–996.

5. **Лаптинский, В.Н.** О разрешимости двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова / В.Н. Лаптинский, И.И. Маковецкий // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2006. – № 3. – С. 218–223.
6. **Лаптинский, В.Н.** О периодических решениях нелинейных матричных дифференциальных уравнений / В.Н. Лаптинский // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1997. – № 4. – С. 14–18.
7. **Лаптинский, В.Н.** Конструктивный анализ периодической краевой задачи для нелинейного матричного дифференциального уравнения Ляпунова / В.Н. Лаптинский. – Могилев : Белорусско-Российский университет, 2007. – 26 с. – (Препринт / ИТМ НАН Беларусі; № 7).
8. **Подолян, С.В.** Периодические решения нелинейных матричных дифференциальных уравнений / С.В. Подолян // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1988. – № 6. – С. 31–34.
9. **Демидович, Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1967. – 472 с.
10. **Канторович, Л.В.** Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М. : Наука, 1977. – 744 с.
11. **Бибииков, Ю.Н.** Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Н. Бибииков. – М. : Высшая школа, 1991. – 303 с.