УДК 517.927.4

В.Н. ЛАПТИНСКИЙ, И.И. МАКОВЕЦКИЙ

К ВОПРОСУ О РАЗРЕШИМОСТИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА

Рассмотрим нелинейное уравнение Ляпунова вида

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F(t, X), \quad X \in \Re^{nxn}, \tag{1}$$

где $A, B \in C(I, \Re^{nxn})$, $F \in C(D\rho, \Re^{nxn})$, $I=[0, \omega]$, $D\rho=\{(t, X): t \in I, \|X\| \leq \rho\}$; $\omega, \rho>0$. Предполагаем, что функция $F(t, X)$ удовлетворяет в D_ρ относительно X условию Липшица с постоянной $L>0$. Это уравнение является обобщением хорошо известных дифференциальных уравнений Ляпунова, Риккати (см., например, [1–4]).

Будем исследовать двухточечную краевую задачу для (1) с условием

$$MX(0) + NX(\omega) = 0, \tag{2}$$

где M, N – вещественные (n×n) – матрицы.

Задача (1), (2) мало изучена. Качественными методами она рассматривалась в [5]. С помощью конструктивных методов [6, гл.2, гл.4] периодическая краевая задача для уравнений типа (1) рассматривалась в [7, 8].

В данной работе задача (1), (2) исследуется на основе конструктивного метода [6, гл. 1].

Примем следующие обозначения:

$$\alpha = \max_t \|A(t)\|, \ \beta = \max_t \|B(t)\|, \ h = \max_t \|F(t,0)\|,$$

$$\mu = \max\{\|M\|, \|N\|\}, \ \gamma = \|(M+N)^{-1}\|, \ q = \gamma\mu(\alpha+\beta+L)\omega,$$

$$\|X\|_C = \max_t \|X(t)\|,$$

где $t\in I$, $\|\cdot\|$ – мультипликативная норма матриц, например, любая из норм, приведенных в [9, с.21], $C = C(\mathrm{I}, \Re^{n\times n})$ – банахово пространство непрерывных (n×n) – матриц.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:* $\det(M+N)\neq 0$, $q<1$, $\gamma\mu\omega h/(1-q)\leq\rho$. *Тогда в области* D_ρ *решение задачи* (1), (2) *существует, единственно и представимо как равномерный предел последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением.*

Доказательство. Пусть $X=X(t)$ – решение задачи (1), (2). Тогда из (1) имеем:

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))]\, d\tau, \tag{3}$$

где $t_0\in I$.

Запишем (3) в следующем виде:

$$X(t_0) = X(t) - \int_{t_0}^{t} [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))]\, d\tau. \tag{4}$$

Используя (4), получим из (2):

$$(M+N)X(t) = M\int_0^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))]\, d\tau -$$
$$- N\int_t^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))]\, d\tau.$$

Отсюда имеем матричное интегральное уравнение

$$X(t) = (M+N)^{-1}\left\{ M\int_0^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))]\, d\tau - \right.$$
$$\left. - N\int_t^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))]\, d\tau \right\}. \tag{5}$$

Верно и обратное: всякое непрерывное решение уравнения (5) является решением задачи (1), (2). Это нетрудно показать с помощью приёмов, используемых в [6].

Для исследования разрешимости уравнения (5) воспользуемся принципом Банаха – Каччиопполи [10] сжимающих отображений. Запишем уравнение (5) в операторном виде

$$X = \mathcal{L}(X), \tag{6}$$

где через $\mathcal{L}$ обозначен соответствующий *интегральный* оператор в (5).

Для произвольной матрицы $X(t)$, принадлежащей шару $\|X\|_C \le \rho$, имеем:

$$\|\mathcal{L}X\| \le \left\|(M+N)^{-1}\right\| \left\| M\int_0^t [A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))]\,d\tau - \right.$$

$$\left. - N\int_t^\omega [A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))]\,d\tau \right\| \le$$

$$\le \gamma\left\{ \|M\| \int_0^t \|A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))\|\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \|N\| \int_t^\omega \|A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))\|\,d\tau \right\} \le$$

$$\le \gamma\mu \int_0^\omega \|A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))\|\,d\tau \le$$

$$\le \gamma\mu \int_0^\omega [\alpha\|X(\tau)\|+\beta\|X(\tau)\|+L\|X(\tau)\|+h]\,d\tau \le$$

$$\le \gamma\mu(\alpha+\beta+L)\omega\|X\|_C + \gamma\mu\omega h \le q\rho + \gamma\mu\omega h \le$$

$$\le q\rho + (1-q)\rho = \rho.$$

Отсюда следует

$$\|\mathcal{L}X\|_C \le \rho. \tag{7}$$

Далее выясним вопрос о сжимаемости оператора $\mathcal{L}$ на шаре $\|X\|_C \le \rho$. Из (6) имеем для всех X, Y таких, что $\|X\|_C \le \rho$, $\|Y\|_C \le \rho$:

$$\mathcal{L}X - \mathcal{L}Y =$$

$$= (M+N)^{-1}\left\{ M\int_0^t [A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))]\,d\tau - \right.$$

$$\left. - N\int_t^\omega [A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))]\,d\tau \right\} -$$

$$-(M+N)^{-1}\left\{ M\int_0^t [A(\tau)Y(\tau)+Y(\tau)B(\tau)+F(\tau,Y(\tau))]\,d\tau - \right.$$

$$-N\int_t^{\omega}[A(\tau)Y(\tau)+Y(\tau)B(\tau)+F(\tau,Y(\tau))]d\tau\Bigg\}=$$

$$=(M+N)^{-1}\Bigg\{M\int_0^t[A(\tau)(X(\tau)-Y(\tau))+(X(\tau)-Y(\tau))B(\tau)+$$

$$+(F(\tau,X(\tau))-F(\tau,Y(\tau)))]d\tau-$$

$$-N\int_t^{\omega}[A(\tau)(X(\tau)-Y(\tau))+(X(\tau)-Y(\tau))B(\tau)+$$

$$+(F(\tau,X(\tau))-F(\tau,Y(\tau)))]d\tau\Bigg\}. \qquad (8)$$

Выполнив оценки по норме в (8), получим

$$\|\mathcal{L}X-\mathcal{L}Y\|\le\|(M+N)^{-1}\|\Bigg\|M\int_0^t[A(\tau)(X(\tau)-Y(\tau))+(X(\tau)-Y(\tau))B(\tau)+$$

$$+(F(\tau,X(\tau))-F(\tau,Y(\tau)))]d\tau-$$

$$-N\int_t^{\omega}[A(\tau)(X(\tau)-Y(\tau))+(X(\tau)-Y(\tau))B(\tau)+$$

$$+(F(\tau,X(\tau))-F(\tau,Y(\tau)))]\ d\tau\Bigg\|\le$$

$$\le\gamma\Bigg[\|M\|\int_0^t\|A(\tau)(X(\tau)-Y(\tau))+(X(\tau)-Y(\tau))B(\tau)+$$

$$+(F(\tau,X(\tau))-F(\tau,Y(\tau))\|d\tau+$$

$$+\|N\|\int_t^{\omega}\|A(\tau)(X(\tau)-Y(\tau))+(X(\tau)-Y(\tau))B(\tau)+$$

$$+(F(\tau,X(\tau))-F(\tau,Y(\tau)))\|\ d\tau\Bigg]\le$$

$$\le\gamma\mu\int_0^{\omega}\|A(\tau)(X(\tau)-Y(\tau))+(X(\tau)-Y(\tau))B(\tau)+$$

$$+(F(\tau,X(\tau))-F(\tau,Y(\tau)))\|d\tau\le$$

$$\le\gamma\mu\int_0^{\omega}[(\alpha+\beta+L)\|X(\tau)-Y(\tau)\|]d\tau\le$$

$$\le\gamma\mu(\alpha+\beta+L)\omega\|X-Y\|_C=q\|X-Y\|_C.$$

Отсюда имеем

$$\|\mathcal{L}X - \mathcal{L}Y\|_C \le q\|X - Y\|_C. \tag{9}$$

Соотношения (7), (9) являются условиями принципа Банаха – Каччиопполи применительно к (6). На основании этого принципа заключаем: уравнение (5) однозначно разрешимо в области D_ρ. Стало быть, решение задачи (1), (2) существует и единственно в указанной области.

Для построения решения $X(t)$ этой задачи воспользуемся следующим методом последовательных приближений:

$$X_{k+1}(t) = (M+N)^{-1}\left\{N\int_0^t [A(\tau)X_k(\tau) + X_k(\tau)B(\tau) + F(\tau, X_k(\tau))]d\tau - \right.$$

$$\left. - N\int_t^\omega [A(\tau)X_k(t) + X_k(t)B(\tau) + F(\tau, X_k(\tau))]d\tau\right\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

где $X_0=0$.

Индукцией по k нетрудно показать, что $\|X_k\|_C \le \rho,\ k = 1, 2, \ldots$

Получим оценку, характеризующую скорость сходимости алгоритма (10):

$$X_{k+1}(t) - X_k(t) =$$

$$= (M+N)^{-1}\left\{M\int_0^t [A(\tau)(X_k(\tau) - X_{k-1}(\tau)) + (X_k(\tau) - X_{k-1}(\tau))B(\tau) + \right.$$

$$+ F(\tau, X_k(\tau)) - F(\tau, X_{k-1}(\tau))]d\tau -$$

$$- N\int_t^\omega [A(\tau)(X_k(\tau) - X_{k-1}(\tau)) + (X_k(\tau) - X_{k-1}(\tau))B(\tau) +$$

$$\left. + F(\tau, X_k(\tau)) - F(\tau, X_{k-1}(\tau))]\ d\tau\right\},$$

$$k = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Выполнив оценки по норме в (11), получим рекуррентную оценку

$$\|X_{k+1} - X_k\|_C \le q\|X_k - X_{k-1}\|_C, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

Используя оценку (12), имеем

$$\|X - X_k\|_C \le \frac{q^k}{1-q}\|X_1\|_C, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

В заключение отметим, что используемый в работе [5] подход к задаче (1), (2) приводит к системе двух матричных уравнений относительно $\mathrm{X}(t)$, $\mathrm{X}(0)$ и таким же алгоритмам построения решения. Подход из [6], как видим, даёт одно соотношение вида (10).

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Зубов В.И.*** Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 496 с.
2. ***Параев Ю.И.*** Уравнения Ляпунова и Риккати. – Томск: Томский государственный университет, 1989. – 166 с.
3. ***Розо М.*** Нелинейные колебания и теория устойчивости. – М.:Наука, 1971. – 288 с.

4. ***Ройтенберг Я.Н.*** Автоматическое управление. – М.:Наука, 1970. – 552с.
5. ***Murty K.N., Howell G.W., Sivasundaram S.*** // Journal of mathematical analysis and applications. 1992. 167. P. 505–515.
6. ***Лаптинский В.Н.*** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. – Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300с.
7. ***Елисеенко М.Н., Лаптинский В.Н., Подолян С.В.*** // Труды третьей международной конференции «Дифференциальные уравнения и применения». Болгария, Руссе, 1987. – Ч.1. – С. 121-126.
8. ***Лаптинский В.Н.*** // Весці АН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. 1997. – № 4. – С. 14-18.
9. ***Демидович Б.П.*** Лекции по математической теории устойчивости. – М.:Наука, 1967. – 472 с.
10. ***Канторович Л.В., Акилов Г.П.*** Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.

SUMMARY

Constructive sufficient conditions of an univalent resolvability of a two-point boundary value problem for nonlinear Lyapunov equation are obtained.