УДК 517.927.4

В.Н.ЛАПТИНСКИЙ, И.И.МАКОВЕЦКИЙ

О ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА

Рассмотрим двухточечную краевую задачу

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F(t, X), \quad X \in \mathfrak{R}^{n\times n}, \tag{1}$$

где $A, B \in C(I, \mathfrak{R}^{n\times n})$, $F\in C(D\rho, \mathfrak{R}^{n\times n})$, $I=[0, \omega]$, $D\rho=\{(t, X): t\in I, \|X\|\le\rho\}$; ω, $\rho>0$. Предполагаем, что функция $F(t, X)$ удовлетворяет в D_ρ относительно X условию Липшица с постоянной $L>0$. Это уравнение является обобщением хорошо известных в теории и приложениях дифференциальных уравнений Ляпунова и Риккати (см., например, [1-4]).

Будем исследовать двухточечную краевую задачу для (1) с условием

$$MX(0) + NX(\omega) = 0, \tag{2}$$

где M, N – вещественные (n×n) – матрицы.

Задача (1), (2) еще мало изучена. Качественными методами она рассматривалась в [5]. С помощью конструктивных методов [6, гл.2, гл.4] периодическая краевая задача для уравнений типа (1) рассматривалась в [7, 8].

В данной работе задача (1), (2) исследуется на основе конструктивного метода [6, гл. 1].

В случае задача (1), (2) рассматривалась в [9]; этот случай не охватывает периодическую краевую задачу. Рассмотрим случай, допускающий ситуацию с периодическим краевым условием.

Примем следующие обозначения:

$$\gamma = \left\|\Phi^{-1}\right\|, m = \left\|N^{-1}(M+N)\right\|,$$

$$\alpha = \max_t\|A(t)\|, \beta = \max_t\|B(t)\|, h = \max_t\|F(t,0)\|,$$

$$q = \gamma\omega\left[(\alpha+\beta+L)\left(m+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega\right)+L\right], p = \gamma\omega h\left(m+\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega+1\right),$$

$$\widetilde{H}(\omega) \equiv \int_0^\omega H(\tau)d\tau,$$

$$P = N^{-1}(M+N+N\widetilde{A}(\omega)), Q = -\widetilde{B}(\omega),$$

$$\|X\|_C = \max_t\|X(t)\|,$$

где $t \in I$, Φ – линейный оператор, $\Phi X = PX - XQ$, $H \in C(I, \Re^{n\times n})$, $\|\cdot\|$ – мультипликативная норма матриц, например, любая из норм, приведенных в [10, с. 21], $C = C(I, \Re^{n\times n})$ – банахово пространство непрерывных (n×n)-матриц.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\det N \neq 0$,

2) *матрицы* P, Q *не имеют общих характеристических чисел,*

3) $q < 1$,

4) $\dfrac{p}{1-q} \leq \rho$.

Тогда в области D_ρ *решение задачи (1), (2) существует и единственно.*

Доказательство. Пусть $X = X(t)$ – решение задачи (1), (2). Тогда из (2) имеем:

$$X(0) = X(t) - \int_0^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))]d\tau, \tag{3}$$

$$X(\omega) = X(t) + \int_t^\omega [A(\tau)X(\tau) + B(\tau)X(\tau) + F(\tau, X(\tau))]d\tau. \tag{4}$$

Подставляя (3), (4) в (2), получим:

$$(M+N)X(t) - M\int_0^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))]d\tau +$$

$$+ N\int_t^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))]d\tau = 0.$$

Отсюда имеем:

$$(M+N)X(t) =$$

$$= (M+N)\int_0^t [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))]d\tau -$$

$$- N\int_0^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))]d\tau. \tag{5}$$

Далее воспользуемся формулами

$$\int_0^\omega A(\tau)X(\tau)d\tau = \widetilde{A}(\omega)X(t) - \int_0^t \left(\int_0^\tau A(\sigma)d\sigma\right)\dot{X}(\tau)d\tau + \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma\right)\dot{X}(\tau)d\tau,$$

$$\int_0^\omega X(\tau)B(\tau)d\tau = X(t)\widetilde{B}(\omega) - \int_0^t \dot{X}(\tau)\left(\int_0^\tau A(\sigma)d\sigma\right)d\tau + \int_t^\omega \dot{X}(\tau)\left(\int_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma\right)d\tau.$$

Из (5) в силу (1) получим

$$\left[M + N + N\widetilde{A}(\omega)\right]X(t) + NX(t)\widetilde{B}(\omega) =$$

$$= (M+N)\int_0^t \left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))\right]d\tau +$$

$$+ N\int_0^t \{A_1(\tau)\left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))\right] +$$

$$+ \left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))\right]B_1(\tau)\}d\tau -$$

$$- N\int_t^\omega \{A_2(\tau)\left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))\right] +$$

$$+ \left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))\right]B_2(\tau)\}d\tau - N\int_0^\omega F(\tau, X(\tau))d\tau, \qquad (6)$$

где

$$H_1(\tau) \equiv \int_0^\tau H(\sigma)d\sigma, \quad H_2(\tau) \equiv \int_\tau^\omega H(\sigma)d\sigma.$$

Умножая на N^{-1} слева обе части (6), получим матричное интегральное уравнение

$$N^{-1}\left[M + N + N\widetilde{A}(\omega)\right]X(t) + X(t)\widetilde{B}(\omega) =$$

$$= N^{-1}(M+N)\int_0^t \left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))\right]d\tau +$$

$$+ \int_0^t \{A_1(\tau)\left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))\right] +$$

$$+ \left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))\right]B_1(\tau)\}d\tau -$$

$$- \int_t^\omega \{A_2(\tau)\left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))\right] +$$

$$+ \left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))\right]B_2(\tau)\}d\tau - \int_0^\omega F(\tau, X(\tau))d\tau. \qquad (7)$$

Уравнение (7) запишем в следующем виде:

$$N^{-1}\left[M + N + N\widetilde{A}(\omega)\right]X(t) + X(t)\widetilde{B}(\omega) =$$

$$= N^{-1}(M+N)\int_0^t \left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))\right]d\tau +$$

$$+ \int_0^\omega \{K_A(t,\tau)\left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))\right] +$$

$$+ \left[A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))\right]K_B(t,\tau)\}d\tau - \int_0^\omega F(\tau, X(\tau))d\tau,$$

где

$$K_H(t,\tau)=\begin{cases} H_1(\tau), & 0\le\tau\le t\le\omega,\\ -H_2(\tau), & 0\le t<\tau\le\omega.\end{cases}$$

Так как матрицы P, Q не имеют общих характеристических чисел, то, согласно [11, с. 207], оператор Φ обратим, при этом оператор Φ^{-1} линеен и ограничен. На основании обратимости оператора Φ от уравнения (8) придем к следующему уравнению:

$$X(t)=\Phi^{-1}\left\{N^{-1}(M+N)\int_0^t(A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau)))d\tau\right\}+$$
$$+\Phi^{-1}\left\{\int_0^{\omega}[K_A(t,\tau)\big(A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))\big)+\right.$$
$$\left.+\big(A(\tau)X(\tau)+X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))\big)K_B(t,\tau)\big]d\tau-\int_0^{\omega}F(\tau,X(\tau))d\tau\right\}. \qquad (9)$$

Покажем обратное: всякое непрерывное решение интегрального уравнения (9) является решением задачи (1), (2). Дифференцируя по t обе части (9), получим с учетом того, что оператор дифференцирования и оператор Φ^{-1} перестановочны,

$$\frac{dX}{dt}=\Phi^{-1}\{N^{-1}(M+N)(A(t)X(t)+X(t)B(t)+F(t,X(t)))+$$
$$+\big(A_1(t)+A_2(t)\big)[A(t)X(t)+X(t)B(t)+F(t,X(t))]+$$
$$+[A(t)X(t)+X(t)B(t)+F(t,X(t))]\big(B_1(t)+B_2(t)\big)\}=$$
$$=\Phi^{-1}N^{-1}\{(M+N)[A(t)X(t)+X(t)B(t)+F(t,X(t))]+$$
$$+N\widetilde{A}(\omega)[A(t)X(t)+X(t)B(t)+F(t,X(t))]\}+$$
$$+\Phi^{-1}[A(t)X(t)+X(t)B(t)+F(t,X(t))]\widetilde{B}(\omega)=$$
$$=\Phi^{-1}\{N^{-1}\big(M+N+N\widetilde{A}(\omega)\big)[A(t)X(t)+X(t)B(t)+F(t,X(t))]+$$
$$+[A(t)X(t)+X(t)B(t)+F(t,X(t))]\widetilde{B}(\omega)\}=$$
$$=\Phi^{-1}\Phi(A(t)X(t)+X(t)B(t)+F(t,X(t))).$$

Таким образом, получили тождество

$$\frac{dX}{dt}\equiv A(t)X(t)+X(t)B(t)+F(t,X(t)).$$

Покажем, что решение уравнения (9) удовлетворяет краевому условию (2). Для этого вместо (9) рассмотрим эквивалентное ему уравнение (8) с учетом полученного тождества

$$\Phi X(t) = N^{-1}\left\{(M+N)\int_0^t dX + N\int_0^t\left(\int_0^\tau A(\sigma)d\sigma\right)dX + N\int_0^t dX\left(\int_0^\tau B(\sigma)d\sigma\right) - \right.$$

$$\left. - N\int_t^\omega\left(\int_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma\right)dX - N\int_t^\omega dX\left(\int_\tau^\omega B(\sigma)d\sigma\right) - N\int_0^\omega F(\tau, X(\tau))d\tau\right\}. \qquad (10)$$

Выполнив в (10) интегрирование по частям, получим:

$$\Phi X(t) = N^{-1}\left\{(M+N)(X(t)-X(0)) + N\left(\int_0^t A(\sigma)d\sigma\right)X(t) - N\int_0^t A(\tau)X(\tau)d\tau + \right.$$

$$+ NX(t)\int_0^t B(\sigma)d\sigma - N\int_0^t X(\tau)B(\tau)d\tau + N\left(\int_t^\omega A(\sigma)d\sigma\right)X(t) - N\int_t^\omega A(\tau)X(\tau)d\tau +$$

$$\left. + NX(t)\int_t^\omega B(\sigma)d\sigma - N\int_t^\omega X(\tau)B(\tau)d\tau - N\int_0^\omega F(\tau, X(\tau))d\tau\right\} =$$

$$= N^{-1}\left\{(M+N)(X(t)-X(0)) + N\widetilde{A}(\omega)X(t) + NX(t)\widetilde{B}(\omega) - \right.$$

$$\left. - N\int_0^\omega [A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))]d\tau\right\}.$$

Отсюда имеем

$$\Phi X(t) = \Phi X(t) - N^{-1}[MX(0) + NX(\omega)].$$

Из (11) легко получить (2).

Для исследования разрешимости уравнения (9) воспользуемся принципом Банаха-Каччиопполи [11, с. 605] сжимающих отображений. Запишем уравнение (9) в операторном виде

$$X = \mathcal{L}(X), \qquad (12)$$

где через $\mathcal{L}$ обозначен соответствующий интегральный оператор в (9).

Для произвольной матрицы $X(t)$, принадлежащей шару $\|X\|_C \le \rho$, имеем

$$\|\mathcal{L}(X)\| \le \|\Phi^{-1}\| \, \|N^{-1}(M+N)\| \int_0^t \|A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))\| d\tau +$$

$$+ \|\Phi^{-1}\| \left\{ \int_0^\omega [\|K_A(t,\tau)\| + \|K_B(t,\tau)\|] \, \|A(\tau)X(\tau) + X(\tau)B(\tau) + F(\tau, X(\tau))\| d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_0^\omega \|F(\tau, X(\tau))\| d\tau \right\}. \qquad (13)$$

Поскольку

$$\|H_1(\tau)\| \le \delta\tau, \quad \|H_2(\tau)\| \le \delta(\omega - \tau), \quad \|F(t, X)\| \le L\|X\| + h,$$

где $\delta = \max\limits_{[0,\omega]}\|H(t)\|$, то, продолжая оценки в (13), получим с учетом принятых обозначений:

$$\|\mathcal{L}(X)\| \le \gamma mt\left[(\alpha+\beta+L)\|X\|_C + h\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\gamma(\alpha+\beta)\left[t^2+(\omega-t)^2\right]\left[(\alpha+\beta+L)\|X\|_C + h\right] + \gamma\omega\left(L\|X\|_C + h\right) \le$$

$$\le q\rho + p \le q\rho + (1-q)\rho = \rho.$$

Отсюда следует:

$$\|\mathcal{L}(X)\|_C \le \rho. \tag{14}$$

Далее выясним вопрос о сжимаемости оператора $\mathcal{L}$ на шаре $\|X\|_C \le \rho$. Из (9) имеем для всех X, Y таких, что $\|X\|_C \le \rho, \|Y\|_C \le \rho$:

$$\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y) =$$

$$= \Phi^{-1}N^{-1}(M+N)\int_0^t \big(A(\tau)(X(\tau)-Y(\tau)) + (X(\tau)-Y(\tau))B(\tau) +$$

$$+ F(\tau, X(\tau)) - Y(\tau, Y(\tau))\big)d\tau +$$

$$+ \Phi^{-1}\int_0^\omega \big[K_A(t,\tau)\big(A(\tau)(X(\tau)-Y(\tau)) + (X(\tau)-Y(\tau))B(\tau) +$$

$$+ F(\tau, X(\tau)) - F(\tau, Y(\tau))\big) +$$

$$+ \big(A(\tau)(X(\tau)-Y(\tau)) + (X(\tau)-Y(\tau))B(\tau) +$$

$$+ F(\tau, X(\tau)) - F(\tau, Y(\tau))\big)K_B(t,\tau)\big]d\tau - \Phi^{-1}\int_0^\omega \big(F(\tau, X(\tau)) - F(\tau, Y(\tau))\big)d\tau. \tag{15}$$

Выполнив оценки по норме в (15), получим:

$$\|\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y)\| \le$$

$$\le \gamma m(\alpha+\beta+L)t\|\mathbf{X}-\mathbf{Y}\|_C +$$

$$+\gamma\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\left[t^2+(\omega-t)^2\right](\alpha+\beta+L)\|X-Y\|_C + \gamma\omega L\|X-Y\|_C \le$$

$$\le \gamma m(\alpha+\beta+L)\omega\|X-Y\|_C + \frac{1}{2}\gamma(\alpha+\beta+L)\omega^2(\alpha+\beta)\|X-Y\|_C + \gamma\omega L\|X-Y\|_C =$$

$$= \gamma\omega\left[m(\alpha+\beta+L) + \frac{1}{2}\omega(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+L) + L\right]\|X-Y\|_C = q\|X-Y\|_C.$$

Отсюда имеем:

$$\|\mathcal{L}(X)-\mathcal{L}(Y)\|_C \le q\|X-Y\|_C. \tag{16}$$

Соотношения (14), (16) являются условиями принципа Банаха-Каччиопполи применительно к (12). На основании этого принципа заключаем: уравнение (9) однозначно разрешимо в области D_ρ. Стало быть, решение задачи (1), (2) существует и единственно в указанной области.

Замечание. Для построения решения уравнения (9) формально применим классический метод последовательных приближений (см., например, [11, с. 605]). Однако нетрудно показать, что приближенные решения, вообще говоря, не удовлетворяют условию (2). В связи с этим актуальной является разработка алгоритма без этого недостатка.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Зубов В.И.*** Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 496 с.
2. ***Параев Ю.И.*** Уравнения Ляпунова и Риккати. – Томск: Томский государственный университет, 1989. – 166 с.
3. ***Розо М.*** Нелинейные колебания и теория устойчивости. – М.:Наука, 1971. – 288 с.
4. ***Ройтенберг Я.Н.*** Автоматическое управление. – М.: Наука, 1970. – 552 с.
5. ***Murty K.N., Howell G.W., Sivasundaram S.*** // Journal of mathematical analysis and applications. 1992. vol. 167. P. 505-515.
6. ***Лаптинский В.Н.*** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. – Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
7. ***Елисеенко М.Н., Лаптинский В.Н., Подолян С.В.*** // Труды третьей международной конференции "Дифференциальные уравнения и применения". – Болгария: Руссе, 1987. – Ч.1. – С. 121-126.
8. ***Лаптинский В.Н.*** // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1997. – № 4. – С. 14-18.
9. ***Лаптинский В.Н., Маковецкий И.И.*** О двухточечной краевой задаче для нелинейного уравнения Ляпунова // Тез. докл. международной математической конференции "Еругинские чтения VIII". – Брест, 2002. – С. 103-104.
10. ***Демидович Б.П.*** Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
11. ***Канторович Л.В., Акилов Г.П.*** Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.

SUMMARY

Constructive sufficient conditions of an univalent resolvability of a two-point boundary value problem for nonlinear Lyapunov equation are obtained.