ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДНОМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ СТРУКТУР В ПЛАЗМЕ

Характерным свойством космической плазмы является наличие нескольких популяций частиц – холодных и горячих электронов и ионов, пучков частиц. Популяции частиц с различной температурой, зарядом, массой часто имеют различные дрейфовые скорости вдоль магнитного поля. В такой многокомпонентной динамичной среде локальное нарушение зарядовой квазинейтральности может приводить к формированию движущихся мелкомасштабных нелинейных электростатических структур.

Присутствие таких структур в магнитосферной плазме было подтверждено экспериментально с помощью космических аппаратов S3-3, VIKING, FREJA, GEOTAIL, ИНТЕРБОЛ-2, EQUATOR-S, FAST [4-14].

Исследованию электростатических стационарных структур посвящено множество теоретических работ [1-3].

В работе [2] теоретически обосновывалось существование ионно-акустических солитонов разрежения в плазме с двумя электронными и одной ионной популяциями. Однако существование солитонов сжатия не исследовалось.

В работе [1] рассмотрена четырехкомпонентная плазма, состоящая из трех электронных популяций (включая популяции горячих и холодных электронов, а также электронный пучок) и одной ионной. Были исследованы свойства электронно-акустических солитонов в приближении малых амплитуд. В предлагаемой работе рассмотрены точные аналитические решения, справедливые для больших амплитуд.

Целью данной работы является:

- Развитие одномерной теории для описания солитонных электростатических волн.
- Исследование свойств указанных структур в рамках одномерных моделей.

В предлагаемой работе исследованы следующие модели плазмы:

• модель 1: двухкомпонентная плазма с горячим электронным фоном и популяцией холодных ионов.

- модель 2: трехкомпонентная плазма с двумя популяциями горячих электронов и популяцией холодных ионов.
- модель 3: трехкомпонентная плазма с горячим электронно-ионным фоном и популяцией холодных электронов.

Модель 1: плазма с холодными ионами

Будем считать плазму бесстолкновительной и однородной. В соответствии с [3] запишем выражения для концентраций соответствующих популяций заряженных частиц.

1. Фоновые электроны с температурой *Т_е*, подчиняются распределению Больцмана, которое в безразмерной форме имеет вид:

$$N_{eh} = \frac{n_{eh}}{n_{0eh}} = e^{\Phi}, \qquad (1.1)$$

где n_{eh} – концентрация фоновых электронов, n_{oeh} – соответствующая концентрация при отсутствии возмущения, $\Phi = e \, \varphi / T_{eh}, \, \varphi$ – потенциал, соответствующий электростатическому полю $E = -\nabla \varphi$, T_{eh} – температура в энергетических единицах.

2. Холодные ионы (протоны) с температурой $T_i = \sigma_i T_{ch}$ описываются системой квазигидродинамических уравнений, решением которой является уравнение для концентрации ионов [3]:

$$N_{i} = \left(\frac{1}{6\sigma_{i}} \left(a_{i} \pm \sqrt{a_{i}^{2} - 12\sigma_{i} M_{i}^{2}}\right)\right)^{1/2}, \qquad (1.2)$$

здесь $a_i = M_i^2 + 3\sigma_i - 2K_i \Phi$, $M_i^2 = m_i V^2 / T_{eh}$, m_i – масса протона, $\sigma_i = T_i / T_{eh} V$ – скорость нелинейной структуры, $K_i = I$. При выводе уравнения (1.2) предполагалось, что магнитное поле отсутствует, а также учтено, что для одномерной моде-

ли показатель адиабаты γ=3.

Учитывая уравнения (1.1) и (1.2), получаем уравнение Пуассона в безразмерной форме:

$$\frac{d^2\Phi}{dS^2} = e^{\Phi} - N_i, \qquad (1.3)$$

где $S = (x - Vt) / \lambda_D$, $\lambda_D = (\frac{\varepsilon_0 T_{eh}}{e^2 n_{oeh}})^{1/2}$ – длина Дебая для горячих электронов.

Для нахождения солитонных решений будем использовать пседвопотенциальный метод [2, 3]. Уравнение (1.3) проинтегрируем один раз, вводя классический потенциал *U*(Ф).

$$\left(\frac{d\Phi}{dS}\right)^2 = -2U(\Phi), \qquad (1.4)$$

$$U(\Phi) = \left(1 - e^{\Phi}\right) - \left(\left(3\sigma_i M_i^{6}\right)^{\frac{1}{4}} \left(e^{\frac{y_i}{2}} + \frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}y_i}\right) + C_i\right)$$
(1.5)

где

$$y_i = \operatorname{Arch}\left(\frac{a_i}{\sqrt{12\sigma_i M_i^2}}\right)$$

постоянная интегрирования C_i выбрана из условия $U\!(\Phi)\!=\!0$ при $\Phi\!=\!0$.

Солитонные решения уравнения (1.3) существуют при выполнении условий [2]:

$$U(0) = \frac{\partial U(0)}{\partial \Phi} = 0, \quad \frac{\partial^2 U(0)}{\partial \Phi^2} < 0, \quad (1.6a)$$

 $U(\Phi_{_{0}}) = 0$, где $|\Phi_{_{0}}|$ – амплитуда солитонного решения, (1.6b)

$$U(\Phi) < 0$$
 для $0 < |\Phi| < |\Phi_0|$. (1.6c)

Таким образом, корни уравнения $U(\Phi)=0$ (где $U(\Phi)$ определяется уравнениями (1.5)), удовлетворяющие условиям (1.6), соответствуют амплитудам солитонных решений. Причем положительным корням будут соответствовать солитоны сжатия, отрицательным – солитоны разрежения.

Уравнения *U*(Ф)=0 является алгебраическим, но в общем случае требует численного решения.

На рис.1 показан вид функции $U(\Phi)$, заданной выражением (1.5) для разных значений параметров M; σ .



Рис. 1. Функция U(Ф) для разных значений параметров M, и о,

Как видно из рис. 1, уравнение $U(\Phi)=0$ может иметь положительные решения, удовлетворяющие условиям (1.6).

Все возможные солитонные решения представлены на рис. 2 в диапазоне $\sigma \in [0.1; 1]$.

В данной модели могут существовать солитоны сжатия с амплитудой Φ до 0.27. С ростом σ_i амплитуда солитонов уменьшается (от 0.27 при σ_i =0.1 до 0.06 при σ_i =1). При этом решения сдвигаются в область бо́льших M_i . При σ_i =0.1 имеем M_i =1.2, при σ_i =1 имеем M_i =2.1. В данной модели солитоны сжатия существуют только при M_i >1 (рис. 2).

Важной характеристикой солитонов является их ширина, которая является экспериментально-измеримой величиной наряду с амплитудой, полярностью, скоростью движения и др. В настоящей работе для поиска ширины солитонных решений численно решалось уравнение Пуассона.









Сравнивая рис. 2 и 3, можно сделать вывод, что ширина солитонов уменьшается с ростом амплитуды (т.е. решения являются классическими солитонами).

Модель 2: плазма с холодными ионами и с двумя электронными популяциям

1. Фоновые электроны с температурой $T_{_{el}}$ подчиняются распределению Больциана:

$$N_{e1} = \frac{n_{e1}}{n_{0e1}} = e^{\frac{e\varphi}{T_{e1}}} = e^{\Phi \frac{T_{eff}}{T_{e1}}} = e^{\Phi \frac{\Phi}{T_{e1}}}, \qquad (2.1)$$

где n_{el} – концентрация фоновых электронов первой популяции, n_{bel} – соответствующая концентрация при отсутствии возмущения, $\Phi = e \varphi T_{eff} T_{eff} = \frac{T_{el} T_{e2}}{\delta T_{e2} + (1 - \delta) T_{el}}$, $\delta = n_{0el} / n_{0}$, $(1 - \delta) = n_{0el} / n_0$, $n_0 = n_{0el} + n_{0e2}$, n_{0e2} будет определено ниже, $\beta = T_{el} / T_{e2}$ (положим $\beta < 1$).

2. Фоновые электроны с температурой T_{e2} также подчиняются распределению Больцмана:

$$N_{e2} = \frac{n_{e2}}{n_{0e2}} = e^{\frac{e\varphi}{T_{e2}}} = e^{\Phi \frac{T_{eff}}{T_{e2}}} = e^{\frac{\beta\Phi}{(\delta + (1-\delta)\beta)}},$$
(2.2)

где n_{e2} – концентрация фоновых электронов второй популяции, n_{0e2} – соответствующая концентрация при отсутствии возмущения.

3. Холодные ионы (протоны) с температурой $T_i = \sigma_i T_{eff}$ которые описываются уравнением (1.2), с учетом $a_i = M_i^2 + 3\sigma_i - 2K_i \Phi$, $M_i^2 = m_i V^2 / T_{eff}$, m_i – масса протона.

Уравнения (2.1), (2.2), (1.2) свяжем безразмерным уравнением Пуассона:

$$\frac{d^2\Phi}{dS^2} = \delta N_{e1} + (1-\delta)N_{e2} - N_i, \qquad (2.4)$$

где $S = (x - Vt)/\lambda_D$, где $\lambda_D = \left(\frac{\varepsilon_0 T_{eff}}{e^2 n_0}\right)^{1/2}$ - эффективная электронная длина Дебая.

Данная модель применима для плазмы авроральной области в магнитосфере Земли, а также для плазмы солнечной короны и др.

Псевдопотенциал Сагдеева для модели 2 примет вид:

$$U(\Phi) = \delta \left[\delta + (1-\delta)\beta \left(1 - e^{\frac{\Phi}{(\delta+(1-\delta)\beta)}} \right) + \frac{(1-\delta)}{\beta} \left[\delta + (1-d)\beta \left(1 - e^{\frac{\beta\Phi}{(\delta+(1-\delta)\beta)}} \right) - \left((3\sigma_i M_i^{-6})^{\frac{1}{4}} \left(e^{\frac{\gamma_i}{2}} + \frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\gamma_i} \right) + C_i \right) \right]$$

$$(2.5)$$

где
$$y_i = \operatorname{Arch}\left(\frac{a_i}{\sqrt{12\sigma_i M_i^2}}\right)$$
, а постоянная интегрирования C_i выбрана из условия

U(Ф)=0 при Ф=0.

Модель 2 отличается от модели 1 наличием дополнительной фоновой электронной популяции. Можно предположить, что влияние дополнительной электронной популяции будет расти с ростом разницы температур T_{e_l} и T_{e_2} . При $T_{e_l} = T_{e_2}$, как видно из (2.5), мы получаем модель, аналогичную модели 1.

На рис.4 изображена функция *U*(Φ), определенная соотношением (2.5) для разных значений параметров *M_i*; *σ_i*; *δ*; *β*.



Рис. 4. Функция $U(\Phi)$ для разных значений параметров $M_{i_{b}}$ $\sigma_{i_{b}}$ $\delta_{i_{b}}$ β

Как видно из рис. 4, уравнение $U(\Phi)$ может иметь солитонные решения как положительной, так и отрицательной полярности (в работе [2] были исследованы только солитоны с отрицательной полярностью). Следовательно, дополнительная электронная популяция делает возможным существование солитонов разрежения наряду с солитонами сжатия.

На рис.5 показана область существования солитонов сжатия.





Как видно из рис.5, с ростом δ амплитуда солитонов сжатия сначала уменьшается, а затем снова начинает расти. Отметим, что при δ =0 и δ =1 трехкомпонентная модель становится двухкомпонентной. Влияние параметра δ зависит от значения параметра β . Так, уменьшение β (т.е. увеличение разности температур электронных популяций) ведет к увеличению влияния параметра δ (на рисунках не показано). При β =1 трехкомпонентная модель также становится двухкомпонентной.

Солитоны разрежения в данной модели могут существовать при 0 < δ < 1, это видно из рис. 6 (рассмотрены амплитуды $|\Phi|$ <1).



Рис. 6. Область существования солитонов разрежения в параметрическом пространстве M_i и δ (рассмотрены амплитуды $|\Phi| < 1$); а) $\beta = 1/40$; b) $\beta = 1/30$ (нижние панели – амплитуда Φ солитонов разрежения)

Как видно, скорость солитонов разрежения относительно фоновой плазмы в модели 2 имеет порядок $C_s = (T_{ef}/m_i)^{1/2}$ (т.е. $M_i \sim 1$). Подобные структуры, рассмотренные работе [2], назывались ионно-акустическими солитонами разрежения.

Как видно из рис.6, с ростом β (что соответствует стремлению T_{e_i} к T_{e_2}) область существования солитонов разрежения уменьшается. Рост σ_i также ведет к уменьшению области существования солитонов разрежения.

Зависимость ширины солитонных структур, обнаруженных в модели 2, от параметров плазмы представлена на рис. 7, 8 для солитонов сжатия и солитонов разрежения соответственно.



Рис. 7. Ширина солитонов сжатия как функция параметров M_i и σ_i ; β =1/40; δ =0.25 (нижняя панель – ширина солитонов сжатия)



Из рис. 7 и рис.5с видно, что с ростом амплитуды ширина солитонов сжатия уменьшается. Таким образом, свойства солитонов сжатия в моделях 1 и 2 совпадают.



На рис.8 представлена зависимость ширины солитонов разрежения от параметров δ , M_i . Рассмотрен случай σ_i =0.1. Сопоставляя рис.6 и рис.8, можно сделать вывод, что ширина солитонов разрежения сначала уменьшается с ростом амплитуды, но затем начинает расти (результаты полностью согласуются с результатами, полученными в работе [2]).

Модель 3: плазма с горячим электронно-ионным фоном и популяцией холодных электронов

 Фоновые электроны с температурой T_{eh} подчиняются распределению Больцмана, которое в безразмерной форме имеет вид:

$$N_{eh} = \frac{n_{eh}}{n_{0eh}} = e^{\Phi}.$$
 (3.1)

2. Фоновые ионы (протоны) с температурой $T_{ih} = T_{eh}/\beta$ также подчиняются распределению Больцмана:

$$N_{ih} = \frac{n_{ih}}{n_{0ih}} = e^{-\beta \Phi}, \qquad (3.2)$$

где n_{eh} , n_{ih} – концентрации фоновых электронов и ионов, n_{oeh} , n_{oih} – соответствующие концентрации при отсутствии возмущения, $\Phi = e\phi/T_{eh}$, ϕ – потенциал, соответствующий электростатическому полю $E = -\nabla \phi$.

3. Холодные электроны с температурой $T_e = \sigma_e \cdot T_{eh}$, которые описываются уравнением (1.2) с учетом $a_e = M_e^2 + 3\sigma_e - 2K_e \Phi$, $M_e^2 = m_e V^2 / T_{eh}$, $V - скорость нелинейной структуры, <math>K_e = 1$.

Уравнение Пуассона с учетом квазинейтральности для модели 3 примет вид:

$$\frac{d^2\Phi}{dS^2} = (1-\delta)e^{\Phi} - e^{-\beta\Phi} + \delta N_{be}.$$
(3.3)

Псевдопотенциал Сагдеева для модели 3 запишется в форме:

$$U(\Phi) = (1 - \delta)(1 - e^{\Phi}) + \frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta\Phi}) - \delta\left[(3\sigma_e M_e^{-6})^{\frac{1}{4}}\left(e^{\frac{y_e}{2}} + \frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}y_e}\right) + C_e\right], \quad (3.4)$$

где $y_e = \operatorname{Arch}\left(a_e / \sqrt{12\sigma_e M_e^2}\right)$, постоянная интегрирования C_e выбрана из условия $U(\Phi)=0$ при $\Phi=0$. Графически функция $U(\Phi)$ для разных значений парамет-

ров плазмы представлена на рис. 9.



Рис. 9. Функция U(Ф) для разных значений параметров Me, σe δ, β

В модели 3 могут существовать только солитоны разрежения, области существования которых представлены на рис. 10, 11.



Рис. 10. Область существования солитонов разрежения в параметрическом пространстве *M* и δ для разных значений σ; β =1 (нижняя панель – амплитуда Φ солитонов разрежения)

Солитоны разрежения в рассматриваемой модели имеют скорость порядка $(T_{eh}/m_e)^{1/2}$ (таким образом, $M_e \sim 1$), т.е. распространяются значительно быстрее ионно-акустических структур, описанных в модели 2. Электронно-акустические солитоны существуют при $\delta > 0$ (т.е. при наличии холодной электронной популяции), это видно из рис. 10.



Рис. 11. Область существования солитонов разрежения в параметрическом пространстве M_{ϵ} и β для разных значений $\sigma_{\epsilon}; \delta$ =0.5 (нижняя панель – амплитуда Ф солитонов разрежения)

Увеличение температуры фоновых ионов (что соответствует уменьшению параметра β) приводит к росту амплитуд электронно-акустических солитонов разрежения и смещению области их существования в сторону больших M_{\star} (рис. 11).

На рис. 12 представлена зависимость ширины исследуемых солитонных структур от параметров плазмы.



Рис. 12. Ширина солитонов разрежения в параметрическом пространстве *M*_e и δ для разных значений σ_e; β=1 (нижняя панель – ширина солитонов разрежения)

Как видно из рис. 12, ширина солитонов разрежения в модели 3 уменьшается с ростом амплитуд во всей области определения, что наряду с большей скоростью движения является отличительной чертой электронно-акустических солитонов разрежения по отношению к ионно-акустическим, рассмотренным в модели 2.

Общие выводы

В работе рассмотрены три одномерные модели плазмы. Показано, что в простейшей двухкомпонентной модели, состоящей из горячих электронов и холодных ионов, могут существовать ионно-акустические солитоны сжатия с амплитудами до 0.3 и скоростями *М*_i∈1.2-2. Ширина структур уменьшается с ростом амплитуды, т.е. полученные решения соответствуют классическим солитонам.

В модели, состоящей из двух электронных и одной ионной популяций (модель 2), могут существовать как ионно-акустические солитоны разрежения с большими амплитудами [2], так и ионно-акустические солитоны сжатия с амплитудами до 0.3. Ширина солитонов разрежения сначала уменьшается с ростом амплитуды, а затем начинает расти (рис.8) (результаты согласуются с результатами, полученными в работе [2]). Ширина солитонов сжатия уменьшается с ростом амплитуды во всей области определения.

В модели 3 возможно формирование электронно-акустических солитонов. Они могут существовать в плазме, содержащей две электронные популяции (горячую и холодную) и одну ионную [1]. Скорость электронно-акустических структур имеет порядок M_e ($M_e^{>>}M$). В модели 3 могут существовать электронно-акустические солитоны разрежения с амплитудами до 0.3. Ширина солитонов уменьшается с ростом амплитуды во всей области определения.

В результате проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

- Наличие холодных частиц в плазме является одним из условий формирования солитонных электростатических структур.
- Для существования ионно-акустических структур необходимо наличие популяции холодных ионов (модель 1, 2).
- Для существования ионно-акустических солитонов разрежения необходимо наличие двух электронных популяций с различной температурой и популяции холодных ионов (модель 2).
- Электронно-акустические структуры существуют при наличии холодных электронов (модель 3).
- 5. Свойства солитонных структур определяются параметрами плазмы.

Результаты теоретического исследования условий формирования электростатических структур и их параметров могут использоваться в экспериментальной диагностике космической и лабораторной плазмы.

ЛИТЕРАТУРА

- Berthomier M., Pottelette R, Malingare M, Khotyaintsev Yu., Electron-acoustic solitons in an electron-beam plasma system. J. Physics of Plasmas 7 (7)., p. 2987-2994, 2000.
- 2. Ghosh S.S., Ghosh K.K. and Sekar Lyender A.N., Large Mach number ion acoustic rarefactive solitary waves for a two electron temperature warm ion plasma. J. Phys. Plasmas 3 (11)., p. 3939-3946, 1996.
- 3. Galperin Yu. I. and A.V. Volosevich, The nonlinear located electrostatic structures and their experimental diagnostics in magnetospherical plasma, Space researches Vol. 40, N 4, p. 1-10, 2002.
- Boehm, M.H., C.W. Carlson, J.P. McFadden and F.S. Mozer, Observations of double layer-like and soliton-like structures in the ionosphere, Geophys.Res.Lett., 11, p. 511-514, 1984.
- 5. *Redsun MS, Temerin M, Mozer FS*. Classification of auroral electrostatic shocks by their ion and electron associations. J.Geophys. Res., 90: p. 9615-9633, 1985.

- Koskinen H, Malkki A. Auroral weak double layers: A critical assessment. In: Auroral Plasma Dynamics, ed. by R.L.Lysak, Washington, DC; AGU, Geophys. Monograph 80, p.97-104, 1993.
- Malkki A, Eriksson AI, Dovner PO, Bostrom R, Holback B, Holmgren G, Koskinen H. A statistical survey of auroral solitary waves and weak double layers, 1. Occurrence and net voltage, J.Geophys.Res., 98, p. 15521-15530, 1994.
- Eriksson,A.I., B. Holback, P.O. Dovner, R. Bostrom, G. Holmgren, M. Andre, L. Eliasson and P.M. Kintner, Freja observations of correlated small-scale density depletions and enhanced lower hybrid waves, Geophys. Res. Lett., 21, p. 1843-1846, 1994.
- Matsumoto,H., H. Kojima, S. Miyataki, Y. Omura, M. Okada, I. Nagano and T. Tsutui, Electrostatic solitary waves (ESW) in the magnetotail: BEN wave forms observed by GEOTAIL, Geophys.Res.Lett., 21, p. 2915-2918, 1994.
- Lefeuvre, F., M. Parrot, J.L. Rauch, B. Poirier, A. Masson and M.M. Mogilevsky, Preliminary results from the MEMO multicomponent measurements on-board INTERBALL-2, Ann.Geophys., 16, p. 1117-1136, 1998.
- Baumjohann, W., G.R. Haerendel, R.A. Treumann, T.M. Bauer, J. Rustenbach, E. Georgescu, U. Auster, K.H. Fornacon, K.-H. Glassmeier, H. Luhr, J. Buchner, B. Nikutowski, A. Balogh and S.W.H. Cowley, First ELF wave measurements with the EQUATOR-S magnetometer, Adv.Space Res., 24, N1, p. 77-80, 1999.
- Ergun R.E., C.W.Carlson, J.P. McFadden, F.S. Mozer, G.T. Delory, W. Peria, C. Chaston, M. Temerin, R.C. Elphic, R. Strangeway, R.F. Pfaff, C.A. Cattell, D.M. Klumpar, E.G. Shelley, W.K. Peterson, E. Moebius, L. Kistler, FAST satellite observations of electric field structures in the auroral zone. Geophys. Res. Lett., 25, p. 2025-2028, 1998.
- Ergun,R.E., C.W. Carlson, J.P. McFadden, F.S. Mozer, G.T. Delory, W. Peria, C. Chaston, M. Temerin, I. Roth, L. Muschietti, R.C. Elphic, R. Strangeway, R.F. Pfaff, C.A. Cattell, D.M. Klumpar, E.G. Shelley, W.K. Peterson, E. Moebius and L. Kistler, FAST satellite observations of large-amplitude solitary structures, Geophys.Res.Lett., 25, p. 2041-2044, 1998.
- 14. Peterson, W.K., E. Moebius and L. Kistler, FAST satellite observations of largeamplitude solitary structures, Geophys.Res.Lett., 25, p. 2041-2044, 1998.

SUMMARY

The properties of the solitary electrostatic waves are studied, pseudopotential method being used. Three 1D plasma models are considered in the article.