УДК 517.927.4

И.И. МАКОВЕЦКИЙ

К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + F(t,X), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{1}$$

где $A, B \in C(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $F \in C(D_\rho, \mathbb{R}^{n\times n})$, $I = [0,\omega]$, $D_\rho = \{(t,X): t \in I, \|X\| \le \rho\}$;

$\omega,\rho>0$. Предполагаем, что функция $F(t,X)$ удовлетворяет в D_ρ относительно X условию Липшица с постоянной $L>0$; $F(t,0)\not\equiv 0$. Это уравнение является обобщением уравнений Ляпунова и Риккати (см., например, [1-4]).

Будем исследовать двухточечную краевую задачу для (1) с условием

$$MX(0)+NX(\omega)=0, \tag{2}$$

где M,N – вещественные $(n\times n)$-матрицы.

Задача (1), (2) мало изучена; в области $D=\{(t,X):t\in I, X\in \mathbb{R}^{n\times n}\}$ качественными методами она исследовалась в [5]. С помощью конструктивных методов [6, гл.2, гл.4] периодическая краевая задача для уравнений типа (1) рассматривалась в [7, 8]. В данной работе задача (1), (2) исследуется на основе конструктивного метода [6, гл.1].

Примем следующие обозначения:

$$\lambda_1=\max_t\|U(t)\|,\ \lambda_2=\max_t\left\|U^{-1}(t)\right\|,\ P=U^{-1}(\omega)N^{-1}M,\ T=P+E,$$

$$\beta=\max_t\|B(t)\|,\ \gamma=\left\|T^{-1}\right\|,\ m=\max\{\|P\|,1\},\ h=\max_t\|F(t,0)\|,$$

$$q=\gamma\lambda m\omega(\beta+L),\ p=\gamma\lambda m\omega h,\ \|X\|_C=\max_t\|X(t)\|,$$

где $\lambda=\lambda_1\lambda_2$, $t\in I$, $\|\cdot\|$ – мультипликативная норма матриц, например, любая из норм, приведенных в [9, с. 21], $C=C\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$ – банахово пространство непрерывных $(n\times n)$-матричных функций, E – единичная матрица.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

1) $\det N\neq 0$,
2) $\det T\neq 0$,
3) $q<1$,
4) $p/(1-q)\leq\rho$.

Тогда в области D_ρ решение задачи (1), (2) существует и единственно; это решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением.

Доказательство. Пусть $X=X(t)$ – решение задачи (1), (2). Тогда из (1) имеем:

$$X(t)=U(t)X(0)+U(t)\int_0^t U^{-1}(\tau)\big(X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))\big)d\tau, \tag{3}$$

где $U(t), U(0)=E$ – решение матричного уравнения

$$\frac{dU}{dt}=A(t)U.$$

Из (3) имеем следующие соотношения:

$$X(0)=U^{-1}(t)X(t)-\int_0^t U^{-1}(\tau)\big(X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))\big)d\tau, \tag{4}$$

$$X(\omega)=U(\omega)U^{-1}(t)X(t)+U(\omega)\int_t^\omega U^{-1}(\tau)\big(X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))\big)d\tau. \tag{5}$$

Подставляя (4), (5) в левую часть (2), получим

$$MX(0)+NX(\omega)=MU^{-1}(t)X(t)-M\int_0^t U^{-1}(\tau)\big(X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))\big)d\tau+$$

$$+NU(\omega)U^{-1}(t)X(t)+NU(\omega)\int_t^\omega U^{-1}(\tau)\big(X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))\big)d\tau.$$

Отсюда согласно (2) имеем

$$MU^{-1}(t)X(t)+NU(\omega)U^{-1}(t)X(t)=$$

$$=M\int_0^t U^{-1}(\tau)\big(X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))\big)d\tau-$$

$$-NU(\omega)\int_t^\omega U^{-1}(\tau)\big(X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))\big)d\tau,$$

и далее на основании условия 1)

$$U^{-1}(\omega)N^{-1}MU^{-1}(t)X(t)+U^{-1}(t)X(t)=$$

$$=U^{-1}(\omega)N^{-1}M\int_0^t U^{-1}(\tau)\big(X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))\big)d\tau- \tag{6}$$

$$-\int_t^\omega U^{-1}(\tau)\big(X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))\big)d\tau.$$

С учетом принятых обозначений из (6) имеем

$$\begin{aligned}TU^{-1}(t)X(t)=P\int_0^t U^{-1}(\tau)\big(X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))\big)d\tau-\\ -\int_t^\omega U^{-1}(\tau)\big(X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))\big)d\tau.\end{aligned} \tag{7}$$

На основании обратимости матрицы T (см. условие 2) данной теоремы) от уравнения (7) придем к следующему интегральному уравнению:

$$X(t)=U(t)T^{-1}\left[P\int_0^t U^{-1}(\tau)\big(X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))\big)d\tau-\right.$$
$$\left.-\int_t^\omega U^{-1}(\tau)\big(X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))\big)d\tau\right]. \tag{8}$$

Покажем обратное: всякое непрерывное решение интегрального уравнения (8) является решением задачи (1), (2). Дифференцируя по t обе части (8), получим

$$\frac{dX}{dt}=\frac{dU(t)}{dt}T^{-1}\left[P\int_0^t U^{-1}(\tau)\big(X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))\big)d\tau-\right.$$
$$\left.-\int_t^\omega U^{-1}(\tau)\big(X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))\big)d\tau\right]+$$
$$+U(t)T^{-1}\Big[PU^{-1}(t)\big(X(t)B(t)+F(t,X(t))\big)+U^{-1}(t)\big(X(t)B(t)+F(t,X(t))\big)\Big]=$$
$$=A(t)U(t)T^{-1}\left[P\int_0^t U^{-1}(\tau)\big(X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))\big)d\tau-\right.$$
$$\left.-\int_t^\omega U^{-1}(\tau)\big(X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))\big)d\tau\right]+$$
$$+U(t)T^{-1}TU^{-1}(t)\big(X(t)B(t)+F(t,X(t))\big),$$

откуда с учетом (8) получим тождество

$$\frac{dX}{dt}=A(t)X(t)+X(t)B(t)+F(t,X(t)).$$

Покажем, что решение уравнения (8) удовлетворяет краевому условию (2). Для этого вместо (8) рассмотрим эквивалентное ему уравнение, полученное из (7) с учетом последнего тождества

$$TU^{-1}(t)X(t)=P\left[\int_0^t U^{-1}(\tau)dX(\tau)-\int_0^t U^{-1}(\tau)A(\tau)X(\tau)d\tau\right]-$$
$$-\left[\int_t^\omega U^{-1}(\tau)dX(\tau)-\int_t^\omega U^{-1}(\tau)A(\tau)X(\tau)d\tau\right]. \tag{9}$$

Выполнив в (9) интегрирование по частям, получим

$$TU^{-1}(t)X(t)=$$
$$=P\left[U^{-1}(t)X(t)-X(0)-\int_0^t \dot{U}(\tau)X(\tau)d\tau-\int_0^t U^{-1}(\tau)A(\tau)X(\tau)d\tau\right]-$$
$$-\left[U^{-1}(\omega)X(\omega)-U^{-1}(t)X(t)-\int_t^\omega \dot{U}^{-1}(\tau)X(\tau)d\tau-\int_t^\omega U^{-1}(\tau)A(\tau)X(\tau)d\tau\right],$$

где $\dot{U}^{-1}(\tau) \equiv dU^{-1}(\tau)/d\tau = -U^{-1}(\tau)A(\tau)$. Отсюда имеем следующее соотношение:

$$PX(0) + U^{-1}(\omega)X(\omega) = 0. \tag{10}$$

Из (10) нетрудно получить (2).

Для исследования разрешимости уравнения (8) воспользуемся принципом Банаха-Каччиопполи [10, с. 605] сжимающих отображений с учетом условий 3), 4). Запишем уравнение (8) в операторном виде

$$X = \mathcal{L}(X), \tag{11}$$

где через $\mathcal{L}$ обозначен соответствующий интегральный оператор в (8). Для произвольной матрицы $X(t)$, принадлежащей шару $\|X\|_C \le \rho$, имеем

$$\begin{gathered}\|\mathcal{L}(X)\| \le \|U(t)\|\|T^{-1}\|\left[\|P\|\int_0^t\left\|U^{-1}(\tau)\left(X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))\right)\right\|d\tau+\right.\\ \left.+\int_t^\omega\left\|U^{-1}(\tau)\left(X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))\right)\right\|d\tau\right] \le\\ \le \lambda_1\gamma m\int_0^\omega\left\|U^{-1}(\tau)\left(X(\tau)B(\tau)+F(\tau,X(\tau))\right)\right\|d\tau.\end{gathered} \tag{12}$$

Поскольку $\|F(t,X)\| \le L\|X\| + h$, то, продолжая оценки в (12), получим с учетом принятых обозначений

$$\begin{gathered}\|\mathcal{L}(X)\| \le \lambda_1\gamma m\omega\lambda_2\left[(\beta+L)\|X\|_C + h\right] \le \gamma\lambda m\omega\left[(\beta+L)\|X\|_C + h\right] \le\\ \le q\rho + p \le q\rho + (1-q)\rho = \rho.\end{gathered} \tag{13}$$

Отсюда следует оценка

$$\|\mathcal{L}(X)\|_C \le \rho. \tag{14}$$

Далее выясним вопрос о сжимаемости оператора $\mathcal{L}$ на шаре $\|X\|_C \le \rho$. Из (8) имеем для всех X, Y таких, что $\|X\|_C \le \rho$, $\|Y\|_C \le \rho$:

$$\begin{gathered}\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y) =\\ = U(t)T^{-1}\left\{P\int_0^t U^{-1}(\tau)\left[\left(X(\tau)-Y(\tau)\right)B(\tau) + F(\tau,X(\tau)) - F(\tau,Y(\tau))\right]d\tau -\right.\\ \left.-\int_t^\omega U^{-1}(\tau)\left[\left(X(\tau)-Y(\tau)\right)B(\tau) + F(\tau,X(\tau)) - F(\tau,Y(\tau))\right]d\tau\right\}\end{gathered} \tag{15}$$

Выполнив оценки по норме в (15), получим

$$\|\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y)\| \le \gamma\lambda m\omega(\beta+L)\|X-Y\|_C = q\|X-Y\|_C.$$

Отсюда имеем соотношение

$$\|\mathcal{L}(X)-\mathcal{L}(Y)\|_C \le q\|X-Y\|_C. \tag{16}$$

Соотношения (14), (16) являются условиями принципа Банаха-Каччиопполи применительно к (11). На основании этого принципа заключаем: уравнение (8) однозначно разрешимо в области D_ρ. Стало быть, решение задачи (1), (2) существует и единственно в указанной области.

Для построения решения уравнения (8) воспользуемся классическим методом последовательных приближений (см., например, [10, с. 605]). Применительно к (8) имеем

$$X_{k+1}(t)=U(t)T^{-1}\Bigg[P\int_0^t U^{-1}(\tau)\big(X_k(\tau)B(\tau)+F(\tau,X_k(\tau))\big)d\tau-$$
$$-\int_t^\omega U^{-1}(\tau)\big(X_k(\tau)B(\tau)+F(\tau,X_k(\tau))\big)d\tau\Bigg], \tag{17}$$
$$k=0,1,2,\ldots,$$

где $X_0(t)$ – произвольная матричная функция класса $C(I,\mathbb{R}^{n\times n})$, принадлежащая шару $\|X_0\|_C \le \rho$. Тогда, очевидно $\|X_i\|_C \le \rho$, $(i=1,2,\ldots)$. Это несложно получить индукцией по k, используя условие 4). С помощью несложных выкладок можно показать (не используя свойств функций Грина), что все приближения, построенные согласно алгоритму (17), удовлетворяют краевому условию (2). Используя (16), получим рекуррентную оценку

$$\|X_{m+1}-X_m\|_C \le q\|X_m-X_{m-1}\|_C,\quad m=1,2,\ldots \tag{18}$$

На основании условий 3), 4) последовательность $\{X_k\}_0^\infty$ сходится равномерно по $t\in I$ к решению $X(t)\in D_\rho$ уравнения (8).

На основании оценки (18) нетрудно получить оценку, характеризующую скорость сходимости алгоритма (17):

$$\|X_k-X\|_C \le q^k\frac{\|X_1-X_0\|_C}{1-q},\quad k=0,1,2,\ldots \tag{19}$$

Из (19) при $k=0, X_0=0$ имеем оценку

$$\|X\|_C \le \frac{\|X_1\|_C}{1-q}. \tag{20}$$

Выведем оценку для $\|X_1\|_C$. При $k=0, X_0=0$ из (17) имеем

$$X_1(t)=U(t)T^{-1}\left[P\int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau,0)d\tau-\int_t^\omega U^{-1}(\tau)F(\tau,0)d\tau\right]. \tag{21}$$

Выполнив последовательно оценки по норме в (21), получим

$$\|X_1(t)\| \le \|U(t)\| \|T^{-1}\| \left[\|P\| \int_0^t \|U^{-1}(\tau)\| \|F(\tau,0)\| d\tau + \int_t^{\omega} U^{-1}(\tau) F(\tau,0) d\tau \right] \le$$

$$\le \lambda_1 \gamma m \int_0^{\omega} \|U^{-1}(\tau)\| \|F(\tau,0)\| d\tau \le \gamma \lambda m \omega h = p .$$

Отсюда следует оценка

$$\|X_1\|_C \le p. \tag{22}$$

На основании (22) имеем из (20)

$$\|X\|_C \le \frac{\|X_1\|_C}{1-q} \le \frac{p}{1-q}. \tag{23}$$

Далее получим оценку для $\|X\|_C$ на основе уравнения (8), рассматривая его как тождество при $X = X(t)$. Производя оценки по норме в (8), получим последовательно с учетом (13)

$$\|X\|_C \le q\|X\|_C + p .$$

Отсюда, на основании условия 3), имеем

$$\|X\|_C \le \frac{p}{1-q}. \tag{24}$$

Очевидно, что оценка (23) предпочтительнее оценки (24).

Замечание. При дополнительных предположениях о характеристических числах матриц P, Q для оператора Φ^{-1} имеют место различные явные представления (см., например [11, 12]), на основе которых для $\|\Phi^{-1}\|$ можно получить конструктивные оценки.

ЛИТЕРАТУРА

1. ***Зубов В.И.*** Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 496 с.
2. ***Параев Ю.И.*** Уравнения Ляпунова и Риккати. – Томск: Томский государственный университет, 1989. – 166 с.
3. ***Розо М.*** Нелинейные колебания и теория устойчивости. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
4. ***Ройтенберг Я.Н.*** Автоматическое управление. – М.: Наука, 1970. – 552 с.
5. ***Murty K.N., Howell G.W., Sivasundaram S.*** // Journal of mathematical analysis and applications. 1992. Vol. 167. P. 505-515.
6. ***Лаптинский В.Н.*** Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
7. ***Елисеенко М.Н., Лаптинский В.Н., Подолян С.В.*** О периодических решениях линейного матричного дифференциального уравнения // Труды третьей конференции «Дифференциальные уравнения и применения». Болгария, Руссе, 1987. Ч.1 – С. 123-126.
8. ***Лаптинский В.Н.*** О периодических решениях нелинейных матричных дифференциальных уравнений // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1997. – № 4. – С. 14-18.
9. ***Демидович Б.П.*** Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука. – 472 с.
10. ***Канторович Л.В., Акилов Г.П.*** Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.

11. ***Абдикасова П.А., Валеев К.Г.*** Математическая физика. 1976. – Вып. 19. – С. 3-10.
12. ***Беллман Р.*** Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1969. – 368 с.

SUMMARY

Constructive sufficient conditions of a univalent resolvability of a two-point boundary value problem for nonlinear Lyapunov equation are obtained.