

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА С ПАРАМЕТРОМ

А.Н. Бондарев

Исследуется задача

$$\frac{dX}{dt} = \lambda A(t)XC_1(t) + XB_1(t) + \lambda^2 C_2(t)XB_2(t) + F(t), \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^k M_i X(t_i, \lambda) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \dots < t_k = \omega, \quad (2)$$

где $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$, A , B_j , C_j , F – непрерывные по $t \in I$ матрицы-функции соответствующих размерностей, M_i – заданные постоянные ($n \times n$)-матрицы; $\lambda \in \mathbb{R}$, $I = [0, \omega]$, $\omega > 0$, $j = 1, 2$.

В предлагаемой работе, являющейся обобщением и развитием [1, 2], по методу [3, гл. I] получены коэффициентные достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2), алгоритм построения решения и дана оценка области его возможного расположения. Исследование задачи (1), (2) выполнено в конечномерной банаховой алгебре $\mathfrak{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_C = \max_{t \in I} \|X(t, \lambda)\|$, где $\|\cdot\|$ – определенная норма матрицы в этой алгебре.

Примем следующие обозначения:

$$\varepsilon = |\lambda|, \quad m_i = \|M_i\|, \quad v_i = \|V_i\|, \quad \gamma = \|\Phi^{-1}\|, \quad \alpha = \max_{t \in I} \|A(t)\|, \quad \beta_2 = \max_{t \in I} \|B_2(t)\|,$$

$$c_j = \max_{t \in I} \|C_j(t)\|, \quad h = \max_{t \in I} \|F(t)\|, \quad \mu_1 = \max_{t \in I} \|V(t)\|, \quad \mu_2 = \max_{t \in I} \|V^{-1}(t)\|,$$

$$q(\varepsilon) = q_1 \varepsilon^2 + q_2 \varepsilon, \quad N = \gamma \mu_1 \mu_2 \omega h \sum_{i=1}^k m_i v_i,$$

где $q_1 = \gamma \mu_1 \mu_2 \beta_2 c_2 \omega \sum_{i=1}^k m_i v_i$, $q_2 = \gamma \mu_1 \mu_2 \alpha c_1 \omega \sum_{i=1}^k m_i v_i$, Φ – линейный матричный оператор типа [4], $\Phi Y \equiv \sum_{i=1}^k M_i Y V_i$; $V_i = V(t_i)$, $V(t)$ – фундаментальная матрица уравнения $dV/dt = VB_1(t)$.

Теорема. Пусть оператор Φ однозначно обратим, при этом $q(\varepsilon) < 1$. Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима; ее решение $X(t, \lambda)$ представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию (2), при этом справедлива оценка $\|X\|_C \leq N/(1 - q(\varepsilon))$.

Вместо задачи (1), (2) рассмотрено эквивалентное ей интегральное уравнение

$$X(t, \lambda) = \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t [\lambda A(\tau) X(\tau) C_1(\tau) + \lambda^2 C_2(\tau) X(\tau) B_2(\tau) + F(\tau)] V^{-1}(\tau) d\tau V_i \right\} \right) V(t), \quad (3)$$

исследование разрешимости которого выполнено с помощью принципа сжимающих отображений (см., например, [5, с. 605]).

Для построения решения предложен алгоритм

$$X_p(t, \lambda) = \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t [\lambda A(\tau) X_{p-1}(\tau, \lambda) C_1(\tau) + \lambda^2 C_2(\tau) X_{p-1}(\tau, \lambda) B_2(\tau) + F(\tau)] V^{-1}(\tau) d\tau V_i \right\} \right) V(t), \quad p = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где $X_0(t, \lambda)$ – произвольная непрерывная матричная функция.

Доказано, что последовательность $\{X_s(t, \lambda)\}_0^\infty$, построенная по алгоритму (4), сходится равномерно по $t \in I$ к решению интегрального уравнения (3), при этом получены оценки

$$\|X - X_s\|_C \leq \frac{q(\varepsilon)^s}{1 - q(\varepsilon)} \|X_1 - X_0\|_C, \quad s = 0, 1, 2, \dots; \quad \|X\|_C \leq \|X_0\|_C + \frac{\|X_1 - X_0\|_C}{1 - q(\varepsilon)}.$$

Из оценки для $\|X\|_C$ при $X_0 = 0$ следует оценка из теоремы.

Решение интегрального уравнения (3) построено также на основе метода малого параметра Пуанкаре–Ляпунова в виде ряда

$$X(t, \lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} \lambda^s X_s(t), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} X_0(t) &= \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t F(\tau) V^{-1}(\tau) d\tau V_i \right\} \right) V(t), \\ X_1(t) &= \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t A(\tau) X_0(\tau) C_1(\tau) V^{-1}(\tau) d\tau V_i \right\} \right) V(t), \\ X_{p+1}(t) &= \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k M_i \int_{t_i}^t [A(\tau) X_p(\tau) C_1(\tau) + C_2(\tau) X_{p-1}(\tau) B_2(\tau)] V^{-1}(\tau) d\tau V_i \right\} \right) V(t), \\ & \quad p = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Установлено, что ряд (5) сходится равномерно по $t \in I$ при $|\lambda| < 2/(q_2 + \sqrt{q_2^2 + 4q_1})$.

Литература

1. Бондарев А. Н., Лаптинский В. Н. *Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае сильного вырождения краевых условий* // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 6. С. 776–784.
2. Бондарев А. Н., Лаптинский В. Н. *Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае слабого вырождения краевых условий* // Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 55. № 3. С. 423–427.
3. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем*. Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998.
4. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S. *Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness* // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1992. V. 167. P. 505–515.
5. Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1977.