РАЗРЕШИМОСТЬ И ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ВАЛЛЕ–ПУССЕНА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.И. Кашпар

Рассмотрим краевую задачу [1–3]

$$\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} = \mathbf{C}_1(t)\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{C}_2(t) + \mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt} + \frac{d\mathbf{X}}{dt}\mathbf{B}(t) + \mathbf{F}\left(t, \mathbf{X}, \frac{d\mathbf{X}}{dt}\right), \tag{1}$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{M}, \quad \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{N}, \tag{2}$$

где

$$(t, \mathbf{X}) \in I \times \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C}_i \in \mathbb{C}\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right), \quad \mathbf{F} \in \mathbb{C}\left(D, \mathbb{R}^{n\times n}\right),$$

$$D = \{(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) : t \in I,\ \|\mathbf{X}\| < \tilde{\rho}_1,\ \|\mathbf{Y}\| < \tilde{\rho}_2\},$$

$$\mathbf{Y} = d\mathbf{X}/dt, \quad I \in [0,\omega], \quad 0 < \tilde{\rho}_i \leqslant \infty \ (i = 1,2),$$

$\mathbf{M}, \mathbf{N}$ —заданные вещественные матрицы. Предположим также, что функция $\mathbf{F}(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ удовлетворяет относительно $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ в области D условию Липшица (локально).

В предлагаемой работе, являющейся обобщением и развитием [1–3], на основе применения метода [4] получены конструктивные достаточные условия однозначной разрешимости и алгоритм построения решения задачи (1), (2).

Введем следующие обозначения:

$$\widetilde{\mathbf{F}}(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{C}_1(t)\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{C}_2(t) + \mathbf{F}\big(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}\big),$$

$$\gamma = \left\|\Phi^{-1}\right\|, \quad \widetilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{UV}} = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}} + \mathcal{L}_1(0,0), \quad \widetilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{UV}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}} + \mathcal{L}_2(0,0),$$

$$c_i = \max_t \|\mathbf{C}_i(t)\|, \quad h_1 = \max_t \left\|\widetilde{\mathbf{P}}_{\mathbf{UV}}(t)\right\|, \quad h_2 = \max_t \left\|\widetilde{\mathbf{Q}}_{\mathbf{UV}}(t)\right\|,$$

$$\lambda_U = \max_{0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant \omega} \left\|\mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s)\right\|, \quad \lambda_V = \max_{0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant \omega} \left\|\mathbf{V}(s)\mathbf{V}^{-1}(\tau)\right\|,$$

$$G = \left\{(t,\ \mathbf{X},\ \mathbf{Y}) : t \in I,\ \|\mathbf{X}\| \leqslant \rho_1,\ \|\mathbf{Y}\| \leqslant \rho_2\right\},$$

$$p_1 = \frac{1}{3}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\,\omega^3(L_1 + c_1 + c_2), \quad p_2 = \frac{1}{2}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\,\omega^2(L_1 + c_1 + c_2),$$

$$q_1 = \frac{1}{3}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\,\omega^3 L_2, \quad q_2 = \frac{1}{2}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\,\omega^2 L_2,$$

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{X}\|_C \\ \|\mathbf{Y}\|_C \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix},$$

где $t \in I,\ 0 < \rho_i < \tilde{\rho}_i\ (i = 1,2)$; $\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{V}(t)$ – интегральные матрицы уравнений

$$d\mathbf{U}/dt = \mathbf{A}(t)\mathbf{U} \ \ (\mathbf{U}(0) = \mathbf{E}_n), \quad d\mathbf{V}/dt = \mathbf{V}\mathbf{B}(t) \ \ (\mathbf{V}(0) = \mathbf{E}_m),$$

$\mathbf{E}_k$ – единичная матрица порядка k;

$$\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) = \int\limits_0^t \mathbf{U}(\tau)\big(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{M})\big)\mathbf{V}(\tau)\mathbf{d}\tau, \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) = \mathbf{U}(t)\big(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N} - \mathbf{M})\big)\mathbf{V}(t);$$

$\mathbf{\Phi}$ – линейный оператор [1–3],

$$\mathbf{\Phi}\mathbf{Z}(t) = \int\limits_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\mathbf{Z}(t)\mathbf{V}(\tau)d\tau, \quad \mathbf{Z}(t) = \mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t)\mathbf{V}^{-1}(t);$$

$L_i = L_i(\rho_1, \rho_2)$ – постоянные Липшица для $\mathbf{F}\big(t, \mathbf{X}, \mathbf{Y}\big)$ в области G; $\|\mathbf{X}\|_C = \max\limits_t \|\mathbf{X}(t)\|$ – норма непрерывной матричной функции в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$, $\|\cdot\|$ – определенная норма матрицы в этой алгебре, например, любая из норм, приведенных в [5, с. 21]; $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ – интегральные операторы, определяемые на основе интегральной задачи, эквивалентной (1),

$$\mathbf{X} = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_1(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \qquad \mathbf{Y} = \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}). \tag{3}$$

Интегральная задача (3) в явном виде дается соотношениями

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{M} + \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}} \mathbf{U}(\tau)\mathbf{\Phi}^{\mathbf{-1}}\big((\mathbf{N} - \mathbf{M})\big)\mathbf{V}(\tau)\mathbf{d}\tau +$$

$$+\int\limits_0^t \mathbf{U}(\varphi)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int\limits_0^\omega\left(\int\limits_\tau^\varphi \mathbf{K_U}(\tau,s)\widetilde{\mathbf{F}}\big(s,\mathbf{X}(s),\mathbf{Y}(s)\big)\mathbf{K_V}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi, \qquad (4)$$

$$\mathbf{Y}(t)=\mathbf{U}(t)\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\right)\mathbf{V}(t)+$$

$$+\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int\limits_0^\omega\left(\int\limits_\tau^t \mathbf{K_U}(\tau,s)\widetilde{\mathbf{F}}\big(s,\mathbf{X}(s),\mathbf{Y}(s)\big)\mathbf{K_V}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(t). \qquad (5)$$

Теорема. *Пусть оператор* $\mathbf{\Phi}$ *однозначно обратим и выполнены неравенства*

$$p_1\rho_1+q_1\rho_2+h_1\leqslant\rho_1,\quad p_2\rho_1+q_2\rho_2+h_2\leqslant\rho_2,\quad p_1+q_2<1.$$

Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима в области G*, при этом справедлива оценка* $\mathbf{Z}\leqslant(\mathbf{E}-\mathbf{P})^{-1}\mathbf{H}$.

Замечание. В случае, когда $\mathbf{A}(t)\equiv 0$, $\mathbf{B}(t)\equiv 0$, $\mathbf{C}_i(t)\equiv 0$, имеет место следствие данной теоремы, из которого при $\rho_2=4\rho_1/\omega$ вытекает теорема 4.1 [6, с. 497]. В [1] дано применение полученных результатов к стационарной задаче об определении распределения температуры в круговой (продольно неограниченной) цилиндрической оболочке (стенке).

Для построения решения задачи (1), (2) разработан алгоритм классического типа (см., например, [7, с. 605]), который применительно к операторной системе (3) имеет вид

$$\mathbf{X}_{k+1}=\mathbf{M}+\mathbf{P_{UV}}(t)+\mathcal{L}_1(\mathbf{X}_k,\mathbf{Y}_k),\quad \mathbf{Y}_{k+1}=\mathbf{Q_{UV}}(t)+\mathcal{L}_2(\mathbf{X}_k,\mathbf{Y}_k),\quad k=0,\,1,\,2,\,\ldots, \qquad (6)$$

где $\mathbf{X_0}(t),\mathbf{Y}_0(t)$ – произвольные матрицы класса $\mathbb{C}\,(I,\,\mathbb{R}^{n\times n})$, принадлежащие множеству $G=\{(\mathbf{X}(t),\,\mathbf{Y}(t)):\|\mathbf{X}\|_C\leqslant\rho_1,\|\mathbf{Y}\|_C\leqslant\rho_2\}$.

Алгоритм (6) для интегральной задачи (4), (5) имеет вид

$$\mathbf{X}_{k+1}(t)=\mathbf{M}+\mathbf{P_{UV}}(t)+$$

$$+\int\limits_0^t\mathbf{U}(\varphi)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int\limits_0^\omega\left(\int\limits_\tau^\varphi \mathbf{K_U}(\tau,s)\widetilde{\mathbf{F}}\big(s,\mathbf{X}_k(s),\mathbf{Y}_k(s)\big)\mathbf{K_V}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi,\ k=0,1,2,\ldots,$$

$$\mathbf{Y}_{k+1}(t)=\mathbf{Q_{UV}}(t)+\mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}\left(\int\limits_0^\omega\left(\int\limits_\tau^t \mathbf{K_U}(\tau,s)\widetilde{\mathbf{F}}\big(s,\mathbf{X}_k(s),\mathbf{Y}_k(s)\big)\mathbf{K_V}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(t).$$

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости данного алгоритма, а также получены соответствующие оценки.

Литература

1. Лаптинский В. Н., Кашпар А. И. *Конструктивный анализ краевой задачи Валле-Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка.* Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2016. (Препринт / Ин-т технол. металлов Беларуси; № 40).

2. Кашпар А. И., Лаптинский В. Н. *О разрешимости задачи Валле-Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // XII Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Междунар. науч. конф. Минск, 5—10 сентября 2016 г. Ч. 2. Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2016. С. 32–33.

3. Кашпар А. И., Лаптинский В. Н. *Разрешимость и построение решения краевой задачи Валле-Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка* // Дифференцальные уравнения. 2020. Т. 56. № 5. С. 570—583.

4. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Мн.: Ин-т математики НАН Беларуси, 1998.

5. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.

6. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М.: Мир, 1970.

7. Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977.