

# ОБ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С УСЛОВИЯМИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА

**В.Н. Лаптинский**

Изучается задача отыскания  $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$  из совокупности соотношений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad (1)$$

$$\int_0^{\omega} \Psi_i(\tau)x(\tau)d\tau = \mu_i, \quad (2)$$

где  $A \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ ,  $f \in C(I, \mathbb{R}^n)$ ,  $\Psi_i \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ ,  $\mu_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = \overline{1, k}$ ;  $I = [0, \omega]$ ,  $\omega > 0$ . Соотношение (2) при  $k = \infty$  является интегральным условием типа [1, с. 264];

более широкий круг таких условий описан в [2, гл. IX, §5]. Вводятся также матрицы  $\Phi_i \in \mathbb{C}^1(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ , возможно, базисного типа [3, гл. 4], в частности,  $\Phi_i(t) = \Psi_i(t)$ .

В предлагаемой работе конструктивный метод [3, гл. 4] развит на основе [4, 5] применительно к задаче (1), (2). Сначала определяется принципиальная структура искомого решения. Пусть эта задача разрешима. Для возможных решений класса  $\mathbb{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$  системы (2) с помощью подхода [4, 5] при выполнении условия невырожденности матриц, определяемых далее по тексту, получено выражение типа [3, гл. 4]

$$x(t) = y(t) + \int_0^\omega Q(t, \tau)y(\tau) d\tau + q(t), \quad (3)$$

где  $y(t)$  – вспомогательная функция, аналогичная [3, гл. 4], вырожденное ядро  $Q(t, \tau)$  представлено через  $\Phi_i(t)$ ,  $\Psi_i(t)$  на основе алгоритма

$$Q_{j+1}(t, \tau) = Q_j(t, \tau) - \left[ \Phi_{j+1}(t) + \int_0^\omega Q_j(t, s)\Phi_{j+1}(s) ds \right] \left( \widetilde{\Psi_{j+1}R_{j+1}} \right)^{-1} \times \\ \times \left[ \Psi_{j+1}(\tau) + \int_0^\omega \Psi_{j+1}(s)Q_j(s, \tau) ds \right], \quad j = \overline{0, k-1},$$

тильдой сверху обозначен интеграл по промежутку  $I$ .

Функция  $y(t)$  поэтапно в рамках соответствующего алгоритма доопределяется с сохранением произвола при построении функций  $Q_m(t, \tau)$ ,  $q_m(t)$  так, что  $Q_0(t, \tau) = 0$ ,  $q_0(t) = 0$ ,  $Q(t, \tau) = Q_k(t, \tau)$ ,  $q(t) = q_k(t)$ ,  $y(t) = y_k(t)$ ,

$$R_{j+1}(t) = \Phi_{j+1}(t) + \int_0^\omega Q_j(t, \tau)\Phi_{j+1}(\tau) d\tau,$$

$$q_{j+1}(t) = q_j(t) + \delta_{j+1}(t) + \int_0^\omega Q_j(t, \tau)\delta_{j+1}(\tau) d\tau,$$

где

$$\delta_{j+1}(t) = \Phi_{j+1}(t) \left( \widetilde{\Psi_{j+1}R_{j+1}} \right)^{-1} \left( \mu_{j+1} - \int_0^\omega \Psi_j(\tau)q_j(\tau) d\tau \right),$$

при этом предполагается

$$\det \widetilde{\Psi_{j+1}R_{j+1}} \neq 0, \quad j = \overline{0, k-1}. \quad (4)$$

Соотношение (3) принимается за основу как представление типа [3, гл. 4] решения задачи (1), (2). С помощью [3, гл. 3] установлено, что задача (1), (2) в представлении (3) эквивалентна интегральной задаче

$$y(t) = \int_0^\omega \mathcal{K}(t, \tau)y(\tau) d\tau + p(t), \quad (5)$$

где

$$\mathcal{K}(t, \tau) = U(t)Q(0, \tau) - Q(t, \tau), \quad p(t) = U(t) \left[ y_0 + q_0 + \int_0^t U^{-1}(\tau)f(\tau) d\tau \right] - q(t);$$

$y_0 = y(0)$ ,  $q_0 = q(0)$ ,  $U(t)$  ( $U(0) = E$ ) – фундаментальная матрица однородного уравнения в (1).

Введём следующие обозначения:

$$b = \max_{t \in I} \int_0^{\omega} \|Q(t, \tau)\| d\tau, \quad a = \max_{t \in I} \int_0^{\omega} \|\mathcal{K}(t, \tau)\| d\tau, \quad h = \max_{t \in I} \|p(t)\|, \quad \sigma = \max_{t \in I} \|q(t)\|,$$

где  $\|\cdot\|$  – любая из норм, приведенных в [6, с. 21].

**Лемма.** При выполнении условия  $a < 1$  решение уравнения (5) существует и единственно, при этом справедлива оценка  $\|y(t)\| \leq \frac{h}{1-a}$ .

**Теорема.** Пусть  $a < 1$  и выполнено условие (4). Тогда решение задачи (1), (2) в представлении (3) существует и единственно, при этом справедлива оценка

$$\|x(t)\| \leq \frac{(1+b)h}{1-a} + \sigma.$$

Для построения решения используется классический метод последовательных приближений (см., например, [1, с. 605]).

**Замечание.** Применение метода Гаусса к системе (2) на основе

$$x(t) = \sum_{i=1}^k \Phi_i(t)c_i + y(t)$$

приводит к её решению типа (3) с более сложным алгоритмом построения векторов  $c_i$ .

### Литература

1. Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1977.
2. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскнер А. Г. *Функциональный анализ в полупорядоченных пространствах*. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
3. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем*. Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998.
4. Лаптинский В. Н. *К методике решения одной задачи теории гильбертовых пространств // IX Белорусская матем. конф.: тез. докл. междунар. конф. Гродно: ГрГУ, 2004. Ч. 1. С. 81–82.*
5. Лаптинский В. Н. *Об одной задаче теории векторных пространств // X Белорусская матем. конф.: тез. докл. междунар. науч. конф., Минск, 3–7 ноября 2008 г. / Нац. акад. наук Беларуси. Ин-т матем. Минск, 2008. Ч. 3. С. 65–66.*
6. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости*. М.: Наука, 1967.