К АНАЛИЗУ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ЛЯПУНОВА–РИККАТИ С ПАРАМЕТРОМ

О.А. Маковецкая

В конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_{\mathbb{C}} = \max\limits_t \|X(t)\|$ исследуется краевая задача [1, 2]

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + XQ(t)X + \lambda F(t, X), \tag{1}$$

$$X(0,\lambda) = X(\omega,\lambda), \tag{2}$$

где $(t,X) \in I \times \mathbb{R}^{n\times n}$, $A,B,Q \in \mathbb{C}(I,\,\mathbb{R}^{n\times n})$, $F \in \mathbb{C}(D_{\tilde\rho},\,\mathbb{R}^{n\times n})$. Предполагается, что матрица-функция $F(t,X)$ в области $D_{\tilde\rho} = \{(t,X) : t \in I,\ \|X\| < \tilde\rho\}$, удовлетворяет относительно X условию Липшица (локально): $F(t,0) \not\equiv 0$; $I = [0,\omega]$, $\omega > 0$, $0 < \tilde\rho \leqslant \infty$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

В случае $Q = 0$, $\lambda = 1$ эта задача конструктивными методами [3] изучалась в [4 и др.], с периодическими краевыми условиями в [5]. С помощью качественных методов задача (1), (2) в области $I \times \mathbb{R}^{n\times n}$ рассматривалась в работе [6]. Предлагаемая работа является продолжением и развитием [1, 2, 7].

Введем следующие обозначения:

$$D_\rho = \{(t,X) : 0 \leqslant t \leqslant \omega,\ \ \|X\| \leqslant \rho\},\ \ M = \int\limits_0^\omega A(\tau)\,d\tau,\ \ N = -\int\limits_0^\omega B(\tau)\,d\tau,$$

$$\gamma = \|\Phi^{-1}(\omega)\|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta = \max_t \|B(t)\|, \quad \delta = \max_t \|Q(t)\|,$$

$$h = \max_t \|F(t,0)\|, \quad \varepsilon = |\lambda|,$$

$$q(\rho,\varepsilon) = q_1(\rho) + q_2(\rho)\varepsilon, \quad \varphi(\rho,\varepsilon) = \varphi_1(\rho) + \varphi_2(\rho)\varepsilon,$$

$$q_1(\rho) = \gamma\delta\omega\big[(\alpha+\beta)\omega + 2\big]\rho + \frac{1}{2}\gamma\omega^2(\alpha+\beta)^2,\ \ q_2(\rho) = \gamma\omega L\big[1 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega\big],$$

$$\varphi_1(\rho) = \gamma\delta\omega\big[1 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega\big]\rho^2 + \frac{1}{2}\gamma\omega^2(\alpha+\beta)^2\rho,\ \ \varphi_2(\rho) = \big[1 + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\omega\big](L+h)\gamma\omega,$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\rho - \varphi_1(\rho)}{\varphi_2(\rho)}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1 - q_1(\rho)}{q_2(\rho)}, \quad \varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1,\,\varepsilon_2\},$$

где $0 < \rho < \tilde\rho$, $t \in I$, $L = L(\rho) > 0$ – постоянная Липшица для $F(t,X)$ в области D_ρ, Φ – линейный матричный оператор, $\Phi Z = MZ - ZN$, $\|\cdot\|$ – подходящая норма матриц в $\mathcal{B}(n)$, например, любая из норм, приведенных в [8, с. 21].

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия: матрицы M, N не имеют общих характеристических чисел, $\varphi_1(\rho) < \rho$, $q_1(\rho) < 1$. Тогда при $|\lambda| < \varepsilon_0$ решение задачи (1), (2) в области D_ρ существует и единственно, при этом справедлива оценка $\|X\|_{\mathbb{C}} \leqslant \varphi(\rho,\varepsilon)$.*

Для построения решения задачи (1), (2) предложен алгоритм с явной вычислительной схемой

$$X_{k+1}(t,\lambda) =$$

$$= \Phi^{-1}\Big\{\int\limits_0^\omega A(\tau)d\tau\Big(\int\limits_\tau^t [A(\sigma)X_k(\sigma,\lambda) + X_k(\sigma,\lambda)B(\sigma) + X_{k-1}(\sigma,\lambda)Q(\sigma)X_{k-1}(\sigma,\lambda) +$$

$$+\lambda F(\sigma, X_{k-1}(\sigma,\lambda))]d\sigma\Big)d\tau + \int\limits_0^\omega\Big(\int\limits_\tau^t [A(\sigma)X_k(\sigma,\lambda) + X_k(\sigma,\lambda)B(\sigma) +$$

$$+X_{k-1}(\sigma,\lambda)Q(\sigma)X_{k-1}(\sigma,\lambda) + \lambda F(\sigma, X_{k-1}(\sigma,\lambda))]\,d\sigma\Big)B(\tau)\,d\tau -$$

$$-\int\limits_0^\omega [X_k(\tau,\lambda)Q(\tau)X_k(\tau,\lambda) + \lambda F(\tau, X_k(\tau,\lambda))]\,d\tau, \quad k = 1,\,2,\,\ldots, \tag{3}$$

где $X_0 = 0$, $X_1 = -\lambda\Phi^{-1}\int\limits_0^{\omega} F(\tau, 0)\,d\tau$; очевидно $\|X_1\| \leqslant \rho$ при $|\lambda| < \varepsilon_0$.

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (3), при этом получена оценка

$$\|X - X_{k+1}\|_{\mathbb{C}} \leqslant \frac{q\|x_{k+1} - X_k\|_{\mathbb{C}} + p\|X_k - X_{k-1}\|_{\mathbb{C}}}{1-q}, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots, \tag{4}$$

где

$$p = \frac{1}{2}\gamma(\alpha+\beta)^2\omega^2 + \gamma\omega(2\delta\rho + \varepsilon L).$$

Оценка (4) дополнена следующими оценками

$$\|X_1\|_{\mathbb{C}} \leqslant \varepsilon\gamma\omega h;$$

$$\|X_2 - X_1\|_{\mathbb{C}} \leqslant \frac{1}{2}\gamma(\alpha+\beta)\omega^2[(\alpha+\beta)\rho + \varepsilon h] + \gamma\omega(\delta\rho^2 + \varepsilon L\rho),$$

которые позволяют выразить оценку (4) через исходные данные задачи.

Для иллюстрации применения полученных результатов рассмотрена модельная задача при $n = 2$.

Замечание. В [6] приведен алгоритм с неявной вычислительной схемой. Он неудобен тем, что при построении приближений на каждом шаге итерации следует решать соответствующее интегральное уравнение.

Литература

1. Маковецкая О. А. // Весцi Нацыянальнай акадэмii навук Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2014. № 1. С. 43–50.

2. Лаптинский В. Н., Маковецкая О. А. // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54. № 7. С. 937–946.

3. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем.* Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998.

4. Лаптинский В. Н., Маковецкий И. И., Пугин В. В. *Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати.* Могилев: БРУ, 2012.

5. Лаптинский В. Н. // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1997. № 4. С. 14–18.

6. Murty K. N., Howell G. W., Sivasundaram S.// Journal of mathematical analysis and applications. 1992. V. 167. P. 505–515.

7. Маковецкая О. А. *К конструктивному анализу периодической краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова–Риккати с параметром* // Материалы междунар. науч. конф. «Еругинские чтения–2019». Минск, 2019. Т. 1. С. 83–84.

8. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости.* М.: Наука, 1967.