

АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ (ДВУСТОРОННЯЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ)

Д.В. Роголев

Исследуется краевая задача типа [1, 2]

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= G_1(t, X, Y), \\ \frac{dY}{dt} &= G_2(t, X, Y), \end{aligned} \tag{1}$$

$$X(0) = X(\omega), \quad Y(0) = Y(\omega), \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned} G_1(t, X, Y) &= A_1(t)X + XB_1(t) + XS_1(t)X + XS_2(t)Y + YC(t)Y + F_1(t), \\ G_2(t, X, Y) &= A_2(t)Y + YB_2(t) + YP_1(t)X + YP_2(t)Y + XQ(t)X + F_2(t) \end{aligned}$$

с коэффициентами класса $\mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, $(t, X, Y) \in I \times \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n}$; $I = [0, \omega]$, $\omega > 0$.

Введены следующие обозначения:

$$D = \{(t, X, Y) : t \in I, \|X\| \leq \rho_1, \|Y\| \leq \rho_2\}, \quad M_i = \int_0^\omega A_i(\tau) d\tau, \quad N_i = - \int_0^\omega B_i(\tau) d\tau,$$

$$\gamma_i = \|\Phi_i^{-1}(\omega)\|, \quad \alpha_i = \max_{t \in I} \|A_i(t)\|, \quad \beta_i = \max_{t \in I} \|B_i(t)\|, \quad \delta_i = \max_{t \in I} \|S_i(t)\|,$$

$$\mu_i = \max_{t \in I} \|P_i(t)\|, \quad \sigma = \max_{t \in I} \|C(t)\|, \quad \nu = \max_{t \in I} \|Q(t)\|, \quad h_i = \max_{t \in I} \|F_i(t)\|,$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(\rho_1, \rho_2) &= \gamma_1 \left\{ \frac{1}{2} (\alpha_1 + \beta_1) [(\alpha_1 + \beta_1) \rho_1 + \delta_1 \rho_1^2 + \delta_2 \rho_1 \rho_2 + \sigma \rho_2^2 + h_1] \omega^2 + \right. \\ &\quad \left. + (\delta_1 \rho_1^2 + \delta_2 \rho_1 \rho_2 + \sigma \rho_2^2 + h_1) \omega \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(\rho_1, \rho_2) &= \gamma_2 \left\{ \frac{1}{2} (\alpha_2 + \beta_2) [(\alpha_2 + \beta_2) \rho_2 + \nu \rho_1^2 + \mu_1 \rho_1 \rho_2 + \mu_2 \rho_2^2 + h_2] \omega^2 + \right. \\ &\quad \left. + (\nu \rho_1^2 + \mu_1 \rho_1 \rho_2 + \mu_2 \rho_2^2 + h_2) \omega \right\}, \end{aligned}$$

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\rho) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\rho_1, \rho_2) \\ \varphi_2(\rho_1, \rho_2) \end{pmatrix}, \quad A = \varphi'(\rho),$$

где $\rho_i > 0$, Φ_i – линейные операторы, $\Phi_i Z = M_i Z - Z N_i$, $\varphi'(\rho)$ – матрица Якоби для $\varphi(\rho)$; $Z = \{X, Y\}$, $i = 1, 2$.

В настоящей работе, являющейся обобщением и развитием [1–3], на основе применения метода [4, гл. 3] получена

Теорема. Пусть выполнены следующие условия:

1) $\sigma(M_i) \cap \sigma(N_i) = \emptyset$ ($i = 1, 2$) ($\sigma(K)$ – множество характеристических чисел матрицы K);

2) $\varphi(\rho) \leq \rho$;

3) $a_{11} < 1$, $\det(E - A) > 0$, где $E = \text{diag}(1, 1)$.

Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима в области D .

Выведен алгоритм построения решения, основанный на неявной вычислительной схеме типа [4, гл. 3] и имеющий в дифференциальной форме вид

$$\frac{dX_{k+1}}{dt} = G_1(t, X_k, Y_k), \quad (3)$$

$$\frac{dY_{k+1}}{dt} = G_2(t, X_k, Y_k), \quad (4)$$

$$X_{k+1}(0) = X_{k+1}(\omega), \quad (5)$$

$$Y_{k+1}(0) = Y_{k+1}(\omega), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где в качестве начального приближения (X_0, Y_0) приняты постоянные матрицы, определяемые из условий (5), (6) для приближения $(X_1(t), Y_1(t))$ соответственно:

$$\int_0^\omega G_1(\tau, X_0, Y_0) d\tau = 0, \quad \int_0^\omega G_2(\tau, X_0, Y_0) d\tau = 0.$$

С помощью конструктивного регуляризатора [4, гл. 3] на основе (3)–(6) получено рекуррентное интегральное соотношение для вычисления функций $X_k(t)$, $Y_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} X_k(t) = & \Phi_1^{-1} \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau A_1(\sigma) d\sigma \right) G_1(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)) d\tau - \right. \\ & - \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A_1(\sigma) d\sigma \right) G_1(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)) d\tau + \\ & + \int_0^t G_1(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)) \left(\int_0^\tau B_1(\sigma) d\sigma \right) d\tau - \\ & - \int_t^\omega G_1(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)) \left(\int_\tau^\omega B_1(\sigma) d\sigma \right) d\tau - \\ & \left. - \int_0^\omega [G_1(\tau, X_k(\tau), Y_k(\tau)) - A_1(\tau)X_k(\tau) - X_k(\tau)B_1(\tau)] d\tau \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_k(t) = & \Phi_2^{-1} \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau A_2(\sigma) d\sigma \right) G_2(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)) d\tau - \right. \\
 & - \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A_2(\sigma) d\sigma \right) G_2(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)) d\tau + \\
 & + \int_0^t G_2(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)) \left(\int_0^\tau B_2(\sigma) d\sigma \right) d\tau - \\
 & - \int_t^\omega G_2(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)) \left(\int_\tau^\omega B_2(\sigma) d\sigma \right) d\tau - \\
 & \left. - \int_0^\omega [G_2(\tau, X_k(\tau), Y_k(\tau)) - A_2(\tau)Y_k(\tau) - Y_k(\tau)B_2(\tau)] d\tau \right\}.
 \end{aligned}$$

Исследованы вопросы сходимости, скорости сходимости предложенного алгоритма, при этом получены соответствующие оценки погрешностей приближённых решений.

Литература

1. Лаптинский В. Н., Роголев Д. В. *Конструктивные методы построения решения периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений типа Риккати* // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 10. С. 1412–1420.
2. Лаптинский В. Н., Роголев Д. В. *К конструктивному анализу периодической краевой задачи для системы матричных уравнений Риккати* // Третья междунар. науч. конф. «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения»: тез. докл., Брест, 17–22 сент. 2012 г. Брест: БрГУ, 2012. С. 66.
3. Роголев Д. В. *Анализ периодической краевой задачи для системы матричных уравнений типа Риккати* // Веснік Магілёўскага дзярж. ун-та імя А. А. Куляшова. Сер. В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). 2011. № 1(37). Могилёв: МГУ, 2011. С. 4–19.
4. Лаптинский В. Н. *Конструктивный анализ управляемых колебательных систем*. Мн.: ИМ НАН Беларуси, 1998.