МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» очной формы обучения

Могилев 2022

УДК 519.21
ББК 22.171
С49

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» 26 мая 2022 г., протокол № 9

Составитель В. Г. Замураев

Рецензент И. И. Маковецкий

Методические рекомендации содержат краткие теоретические сведения по дисциплине «Случайные процессы», основные формулы, задачи для самостоятельного решения и домашние задания.

Учебно-методическое издание

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	А. А. Подошевко
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Практическое занятие № 1. Основные понятия теории случайных процессов

Понятие случайного процесса является обобщением понятия случайной величины: *случайным процессом* $X(t)$ называется процесс, значение которого при любом фиксированном t является случайной величиной $X(t)$. Случайная величина $X(t)$, в которую обращается случайный процесс при данном t, называется *сечением* случайного процесса, соответствующим данному значению аргумента t.

Реализацией случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $x(t)$, в которую превращается случайный процесс $X(t)$ в результате опыта.

Случайный процесс $X(t)$ называется процессом *с дискретным временем*, если система, в которой он протекает, может менять свои состояния только в моменты t_1, t_2, …, t_n, …, число которых конечно или счётно. Случайный процесс $X(t)$ называется процессом *с непрерывным временем*, если переходы системы из состояния в состояние могут происходить в любой момент t наблюдаемого периода.

Одномерный случайный процесс называется процессом *с непрерывными состояниями*, если его сечение в любой момент t представляет собой не дискретную, а непрерывную (или смешанную) случайную величину и, значит, множество её значений несчётно. Аналогично многомерный случайный процесс называется процессом с непрерывными состояниями, если при любом t множество возможных значений случайного вектора, определяющего состояние системы, в которой протекает процесс, несчётно. Случайный процесс называется процессом *с дискретными состояниями*, если в любой момент t множество его состояний конечно или счётно; другими словами, если его сечение в любой момент t характеризуется дискретной $X(t)$ (в многомерном случае – несколькими дискретными случайными величинами).

Элементарной случайной функцией называется такая функция аргумента t, где зависимость от t представлена обычной, неслучайной функцией, в которую в качестве параметров входят одна или несколько обычных, не зависящих от t случайных величин.

Одномерным законом распределения случайного процесса $X(t)$ называется закон распределения сечения процесса $X(t)$ при фиксированном значении аргумента t. *Двумерный закон распределения* случайного процесса $X(t)$ может быть представлен совместной функцией распределения двух сечений случайного процесса, взятых соответственно для моментов t_1 и t_2. *Математическим ожиданием* случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $m(t)$, которая при любом значении аргумента t равна математическому ожиданию соответствующего сечения случайного процесса. *Дисперсия* $D(t)$ случайного процесса $X(t)$ при каждом t равна дисперсии соответствующего сечения случайного процесса. *Средним квадратическим отклонением* $\sigma(t)$ случайного процесса $X(t)$ называется арифметическое значение корня квадратного из дисперсии $D(t)$.

Корреляционной функцией случайного процесса $X(t)$ называется неслучайная функция $K(t,t')$ двух аргументов t и t', которая при каждой паре значений аргументов t и t' равна ковариации соответствующих сечений случайного процесса: $X(t)$ и $X(t')$. *Нормированной корреляционной функцией* случайного процесса $X(t)$ называется функция $r(t,t')$, полученная делением корреляционной функции $K(t,t')$ на произведение средних квадратических отклонений $\sigma(t)$, $\sigma(t')$.

Задачи для самостоятельной работы

1.1 Построить семейства реализаций следующих элементарных случайных функций:

а) $Y(t)=Xe^{-t}$ $(t>0)$, где X – непрерывная случайная величина, распределённая равномерно в интервале $(-1,1)$;

б) $Y(t)=e^{-tX}$ $(t>0)$, где X – случайная величина, принимающая только положительные значения;

в) $Y(t)=at+X$, где X – случайная величина, a – неслучайная величина;

г) $Y(t)=X\cos at$, где X – случайная величина, a – неслучайная величина;

д) $Y(t)=\cos Ut$, где U – случайная величина, принимающая положительные значения;

е) $Y(t)=a+Ut+Vt^2$, где (U,V) – система двух случайных величин, a – неслучайная величина.

1.2 Элементарная случайная функция $Y(t)$ имеет вид $Y(t)=Xe^{-t}$ $(t>0)$, где X – случайная величина, распределённая по нормальному закону с параметрами m и σ. Найти характеристики элементарной случайной функции $Y(t)$: математическое ожидание, дисперсию, корреляционную функцию, а также нормированную корреляционную функцию и плотность распределения.

1.3 Найти характеристики элементарной случайной функции $Y(t)$: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, корреляционную функцию, нормированную корреляционную функцию, если $Y(t)$ имеет вид:

а) $Y(t)=e^{-tX}$ $(t>0)$, где X – случайная величина, распределённая по показательному закону с плотностью $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ $(\lambda>0,\ x>0)$;

б) $Y(t)=aX+t$, где X – случайная величина, распределённая по нормальному закону с параметрами m и σ, a – неслучайная величина;

в) $Y(t)=U\cos\omega t+V\sin\omega t$, где U, V – некоррелированные случайные величины с математическим ожиданиями, равными нулю и одинаковыми дисперсиями, равными σ, ω – неслучайная величина.

1.4 Найти одномерный закон распределения элементарной случайной функции $Y(t)=Vt+a$, где V случайная величина, распределённая нормально с параметрами m и σ.

1.5 Найти одномерный закон распределения элементарной случайной функции $Y(t)=V\cos(\psi t-\Theta)$, где случайные величины V и Θ независимы; случайная величина V распределена нормально с характеристиками m и σ, ψ – неслучайный параметр, случайная величина Θ распределена равномерно в интервале $(0,2\pi)$.

Домашнее задание

1.6 Построить семейства реализаций следующих элементарных случайных функций:

а) $Y(t)=X\cdot t+a$, где X – случайная величина, a – неслучайная величина;

б) $Y(t)=\cos(\omega t+X)$, где X – случайная фаза колебаний, распределённая равномерно в интервале $(-\pi,\pi)$;

в) $Y(t)=U\cos at+V\sin at$, где (U,V) – система случайных величин, a – неслучайная величина.

1.7 Элементарная случайная функция $Y(t)$ имеет вид $Y(t)=Xt+a$, где X – случайная величина, распределённая по закону равномерной плотности на участке (α,β), a – неслучайная величина. Найти характеристики элементарной случайной функции $Y(t)$: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, корреляционную функцию, нормированную корреляционную функцию.

2 Практическое занятие № 2. Потоки событий, их свойства и классификация

Потоком событий называется последовательность однородных или неоднородных событий, появляющихся одно за другим в случайные моменты времени. В общем случае поток событий представляет собой последовательность точек Θ_1, Θ_2, …, Θ_n, … на оси времени с разделяющими их случайными интервалами $T_1=\Theta_2-\Theta_1$, $T_2=\Theta_3-\Theta_2$, …, $T_n=\Theta_{n+1}-\Theta_n$, … . С потоком однородных событий можно связать случайный процесс их накопления. Обозначим $X(t)$ число событий потока, появившихся до момента времени t.

Поток событий называется *регулярным*, если интервалы между событиями одинаковы и равны определённой неслучайной величине τ. Поток событий называется *ординарным*, если вероятность попадания на участок Δt двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания на него ровно одного события, т. е. при $\Delta t \to 0$ эта вероятность представляет собой бесконечно малую высшего порядка.

Для ординарного потока обозначим $X(t,\Delta t)$ случайное число событий, попадающих на элементарный участок $(t, t+\Delta t)$. *Интенсивностью* (*плотностью*) ординарного потока событий в момент t называется

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{M[X(t,\Delta t)]}{\Delta t},$$

где $M[X(t,\Delta t)]$ – математическое ожидание случайной величины $X(t,\Delta t)$, если этот предел существует.

Интенсивность потока событий – это среднее число событий, приходящееся на единицу времени, для элементарного участка Δt, примыкающего к t.

Среднее число событий ординарного потока, приходящееся на интервал времени τ, примыкающий к t, равно

$$M[X(t,\tau)] = \int_t^{t+\tau} \lambda(t)\,dt.$$

В частности, при постоянной интенсивности потока $M[X(t,\tau)] = \lambda\tau$.

Поток событий называется *потоком без последействия*, если для любых непересекающихся участков времени $\tau_1,\ \tau_2,\ \ldots,\ \tau_n$ числа событий $X_1 = X(t_1,\tau_1)$, $X_2 = X(t_2,\tau_2),\ \ldots,\ X_n = X(t_n,\tau_n)$, попадающих на эти участки, представляют собой независимые случайные величины. Ординарный поток событий, в котором отсутствует последействие, называется *пуассоновским потоком*.

Поток событий называется *стационарным*, если все его вероятностные характеристики не меняются со временем. Интенсивность стационарного потока событий постоянна. Поток событий, обладающий свойствами ординарности, стационарности и отсутствия последействия, называется *простейшим* потоком.

Поток событий называется потоком *с ограниченным последействием*, если случайные интервалы $T_1,\ T_2,\ \ldots,\ T_n,\ \ldots$ между соседними по времени событиями представляют собой независимые случайные величины. Стационарный поток с ограниченным последействием называется *потоком Пальма*. Для потока Пальма интервалы между событиями представляют собой последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин. Простейший (стационарный пуассоновский) поток является потоком Пальма.

Потоком Эрланга k-го порядка с параметром λ называется поток Пальма, у которого интервалы между событиями распределены по закону Эрланга k-го порядка ($k = 2, 3, \ldots$).

Задачи для самостоятельной работы

2.1 Производится наложение («суперпозиция») двух простейших потоков: потока 1 с интенсивностью λ_1 и потока 2 с интенсивностью λ_2. Будет ли поток 3, получившийся в результате суперпозиции, простейшим, и если да, то с какой интенсивностью?

2.2 Производится случайное прореживание простейшего потока событий с интенсивностью λ; каждое событие, независимо от других, с вероятностью p сохраняется в потоке, а с вероятностью $1-p$ – выбрасывается (такая операция часто называется p-*преобразованием* потока). Каким будет поток, получающийся в результате p-преобразования простейшего потока?

2.3 Интервал времени t между событиями в ординарном потоке имеет плотность

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(t-t_0)}, & t > t_0; \\ 0, & t < t_0. \end{cases}$$

Интервалы между событиями независимы.

Требуется:

а) построить график плотности $f(t)$;

б) определить, является ли данный поток простейшим;

в) определить, является ли данный поток потоком Пальма;

г) найти интенсивность потока;

д) найти коэффициент вариации интервала между событиями.

2.4 Поток машин, идущих по шоссе в одном направлении, представляет собой простейший поток с интенсивностью λ. Человек выходит на шоссе, чтобы остановить первую попавшуюся машину, идущую в данном направлении. Найти закон распределения времени T, которое ему придётся ждать; определить его математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

2.5 Пассажир выходит на остановку автобуса в некоторый момент времени, никак не связанный с расписанием движения. Автобусы следуют друг за другом регулярно с интервалом времени длины l. Найти закон распределения времени T, которое пассажиру придётся ждать автобуса, и выразить его характеристики m, σ через интенсивность потока автобусов λ.

2.6 Рассматривается поток Эрланга k-го порядка с плотностью распределения интервала T между событиями:

$$f_k(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \quad (t > 0).$$

Найти функцию распределения $F_k(t)$ этого интервала.

2.7 Найти закон распределения интервала T между событиями в потоке Пальма, если случайная величина T определяется из выражения $T = \sum_{k=1}^{Y} T_k$, т. е. представляет собой сумму случайного числа случайных слагаемых, где случайные величины T_k независимы и подчинены показательному закону с параметром λ, а случайная величина Y не зависит от них и имеет геометрическое распределение, начинающееся с единицы:

$$p_n = P\{Y = n\} = pq^{n-1} \ (0 < p < 1;\ n = 1,2,3,\ldots).$$

2.8 Происходит преобразование простейшего потока с интенсивностью λ, состоящее в следующем. Если расстояние между соседними событиями T оказывается меньше какого-то допустимого предела t_0 («интервала безопасности»), то событие отодвигается от предыдущего на интервал t_0; если же $T > t_0$, то событие остаётся на своём месте. Является ли преобразованный поток простейшим? Является ли он потоком Пальма?

2.9 Интервал T между последовательными сбоями ЭВМ, устраняемыми практически мгновенно с помощью программных средств, имеет распределение Эрланга 3-го порядка с параметром $\lambda = 0,5$ (1/ч). Для решения задачи требуется работа ЭВМ без сбоев в течение двух часов. Задачу начинают решать в произвольный момент времени, никак не связанный с потоком сбоев. Найти вероятность того, что задача будет решена с первого раза.

Домашнее задание

2.10 На оси Ot имеется простейший поток событий с интенсивностью λ. Из этого потока формируется другой следующим образом: интервал между каждыми двумя соседними событиями делится пополам и в точку деления вставляется ещё одно событие. Найти плотность распределения $f(t)$ интервала T между соседними событиями в новом потоке. Будет ли этот поток простейшим? Будет ли он потоком Пальма? Каков коэффициент вариации интервала T между событиями?

2.11 В условиях задачи 2.10 преобразованный поток состоит только из вставленных событий (середин интервалов). Ответить на те же вопросы, что и в задаче 2.10.

2.12 Для условий задачи 2.8 найти вероятность решения задачи с первого раза, если с момент предыдущего сбоя в ЭВМ до момента начала решения задачи прошёл 1 ч.

3 Практическое занятие № 3. Марковские процессы с дискретными состояниями. Марковские цепи

Рассмотрим физическую систему S, в которой протекает случайный процесс с дискретными состояниями s_1, s_2, …, s_l, …, число которых конечно или счётно. Пусть G – ориентированный граф, вершины которого соответствуют состояниям системы S; возможность перехода системы S из состояния s_i в состояние s_j непосредственно, минуя другие состояния, обозначим стрелкой, ведущая из вершины s_i в вершину s_j.

Состояние s_i называется *источником*, если система S может выйти из этого состояния, но попасть в него обратно уже не может. Состояние s_i называется *концевым* или *поглощающим*, если система S может попасть в это состояние, но выйти из него уже не может. Если система S может непосредственно перейти из состояния s_i в состояние s_j, то состояние s_j называется *соседним* по отношению к состоянию s_i. Если система S может непосредственно перейти из состояния s_i в состояние s_j и из состояния s_j в состояние s_i, то состояния s_i и s_j называются *соседними*. Состояние s_i называется транзитивным, если система S может войти в это состояние и выйти из него.

Пусть V – некоторое подмножество множества всех состояний системы S. Множество V называется *замкнутым* или *концевым*, если система S, попав в одно (или находясь в одном) из состояний $s_i \in V$, не может выйти из этого подмножества состояний. Множество V называется *связным* или *эргодическим*, если из любого состояния, входящего в него, можно попасть в любое другое состояние, принадлежащее этому множеству. Множество V называется *транзитивным*, если система S может войти в это подмножество и выйти из него. Случайный процесс, протекающий в системе, можно трактовать как процесс блуждания системы по множеству всех состояний.

Случайный процесс называется *процессом гибели и размножения*, если состояния системы образуют цепь, в которой каждое состояние s_i, кроме двух крайних s_0 и s_n, связано прямой и обратной связью с двумя соседними, а каждое из двух крайних связано прямой и обратной связью только с одним соседним. Процесс гибели и размножения может в некоторых случаях иметь не конечное, а бесконечно счётное число состояний.

Обозначим $S(t)$ состояние системы S в момент t. Вероятностью *i*-го состояния в момент t называется вероятность $p_i(t)$ события, состоящего в том, что в момент t система S будет в состоянии s_i.

Случайный процесс, протекающий в системе S с дискретными состояниями s_1, s_2, …, s_l, …, называется *марковским*, если для любого момента времени t_0 вероятность каждого из состояний системы в будущем (при $t > t_0$) зависит только от её состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и как она пришла в это состояние, т. е. не зависит от её поведения в прошлом (при $t < t_0$).

Пусть имеется система S с дискретными состояниями s_1, s_2, …, s_n. Предположим, что случайные переходы системы из состояния в состояние могут происходить только в определённые моменты времени t_0, t_1, t_2, … . Эти моменты называют *шагами* процесса, $t_0 = 0$ – его *началом*. Сам процесс представляет собой случайное блуждание системы S по состояниям.

Пусть случайный процесс представляет собой последовательность или *цепь* событий вида $\{S(k) = s_i\}$, $i = 1,2,...,n$, $k = 0,1,2,...$. Марковский случайный процесс, протекающий в такой системе, называется *марковской цепью*.

Переходными вероятностями марковской цепи на k-м шаге называются условные вероятности $p_{ij}(k)$ перехода системы S на k-м шаге в состояние s_j, если известно, что на предыдущем $(k-1)$-м шаге она была в состоянии s_i. Переходные вероятности можно записать в виде квадратной *стохастической* матрицы $(p_{ij}(k))$ размерности $n \times n$. Для любой строки стохастической матрицы сумма стоящих в ней вероятностей равна единице.

Цепь Маркова называется *однородной*, если переходные вероятности $(p_{ij}(k))$ не зависят от номера шага k: $p_{ij}(k) = p_{ij}$.

Для однородной цепи Маркова вероятность $p_j(k)$ нахождения системы S на k-м шаге в состоянии s_j может быть найдена по рекуррентной формуле

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^{n} p_i(k-1) p_{ij} \;\; (j = 1,2,\ ...,n,\ k = 0,1,2,\ ...\ ).$$

Задачи для самостоятельной работы

3.1 Система S представляет собой техническое устройство, а его возможные состояния: s_1 – устройство работает исправно, s_2 – устройство неисправно, но это не обнаружено, s_3 – неисправность обнаружена, ведётся поиск её источника, s_4 – источник неисправности найден, ведётся ремонт устройства, s_5 – проводится послеремонтный осмотр (после этого осмотра, если устройство восстановлено в прежнем виде, оно возвращается в состояние s_1, если нет – признаётся негодным и списывается), s_6 – устройство списано за негодностью, s_7 – ведётся профилактический осмотр устройства (если обнаружена неисправность, устройство направляется в ремонт). Построить граф состояний системы S.

3.2 Техническое устройство состоит из n одинаковых узлов. Каждый из узлов может в момент t быть исправным или неисправным; если узел неисправен, его ремонтируют. Состояния s_i системы S занумерованы по числу неисправных узлов. Перескок системы S из состояния s_i не в соседнее с ним состояние практически невозможен. Построить граф состояний системы S. Организованы ли состояния системы по схеме гибели и размножения?

3.3 Система S представляет собой техническое устройство, которое осматривается в определённые моменты времени (скажем, через сутки), и её состояние регистрируется в отчётной ведомости. Каждый осмотр с регистрацией представляет собой шаг процесса. Возможные состояния устройства следующие: s_1 – устройство полностью исправно; s_2 – устройство частично неисправно, требует наладки; s_3 – обнаружена серьёзная неисправность. Устройство требует ремонта, s_4 – устройство признано непригодным, списано. Как наладка, так и ремонт продолжаются менее суток и после их выполнения техническое устройство возвращается в состояние s_1 (полностью исправно) или списывается.

Требуется:

а) построить граф состояний технического устройства;

б) привести пример реализации случайного блуждания системы по состояниям.

3.4 В условиях задачи 3.3 задана матрица переходных вероятностей

$$\left(p_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & 0 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В начальный момент ($t_0=0$) техническое устройство находится в состоянии s_1 (исправно).

Требуется:

а) построить размеченный граф состояний технического устройства, соответствующий заданной матрице переходных вероятностей;

б) найти распределение вероятностей состояний технического устройства для первых четырёх шагов ($k=1,2,3,4$);

в) убедиться, что вероятность поглощающего состояния $p_4(k)$ с увеличением k растёт.

3.5 При некоторых условиях в цепи Маркова с возрастанием k (номера шага) устанавливается стационарный режим, в котором система S продолжает блуждать по состояниям, но вероятности этих состояний уже от номера шага не зависят. Такие вероятности называются *предельными* (или *финальными*) вероятностями цепи Маркова. Рассматривается ЭВМ в двух состояниях: s_1 – ЭВМ исправна; s_2 – ЭВМ неисправна.

Требуется:

а) построить размеченный граф рассматриваемой системы;

б) указать динамику изменения вероятностей при начальных условиях $p_1(0)=1$, $p_2(0)=0$.

Домашнее задание

3.6 Уравнения для финальных вероятностей записываются, исходя из следующего правила: для стационарного режима суммарный поток вероятности, переводящий систему S в состояние s_j из других состояний, равен суммарному потоку вероятности, выводящему систему из состояния s_j.

Рассматривается система S – станок с числовым программным управлением (ЧПУ), который может быть в следующих состояниях: s_1 – исправен и работает; s_2 – неисправен, неисправность не обнаружена; s_3 – неисправен, проводится средний ремонт; s_4 – не работает, находится на профилактике, s_5 – неисправен, проводится капитальный ремонт.

Требуется:

а) построить размеченный граф состояний станка с ЧПУ;

б) составить уравнения и найти предельные вероятности состояний станка с ЧПУ.

4 Практическое занятие № 4. Марковские процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем

Случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем называется *марковским*, если для любого момента времени t условные вероятности всех состояний системы S в будущем (при $t > t_0$) зависят только от того, в каком состоянии s_j находится система S в настоящем (при $t = t_0$), но не зависят от того, когда и каким образом она пришла в это состояние (т. е. каковы были состояния системы в прошлом (при $t < t_0$)).

Теория марковских случайных процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем обычно излагается в предположении, что переходы из состояния в состояние происходят под воздействием пуассоновских потоков событий (не обязательно стационарных). Будем считать, что переход системы из состояния s_∂ а состояние s_j осуществляется под воздействием пуассоновского потока событий с интенсивностью $\lambda_{ij}(t)$. Переход из s_i в s_j происходит в момент, когда наступает первое событие потока.

Вероятность перехода системы S из состояния s_i, в котором она находилась в момент t, в состояние s_j за элементарный промежуток времени Δt, непосредственно примыкающий к t, приближённо равна $\lambda_{ij}(t)\Delta t$, где $\lambda_{ij}(t)$ – интенсивность пуассоновского потока событий, переводящего систему из s_i

в s_j. Если все потоки событий, переводящие систему из состояния в состояние, – пуассоновские и независимые, то процесс, протекающий в системе S, будет марковским.

Система обыкновенных дифференциальных *уравнений Колмогорова* для вероятностей состояний имеет вид:

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_j(t)\lambda_{ji}(t) - p_i(t)\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}(t) \ (i = 1, 2, \ ..., n).$$

Систему уравнений Колмогорова решают при начальных условиях. задающих вероятности состояний в начальный момент при $t = 0$ $p_1(0)$, $p_2(0)$, …, $p_n(0)$, причём для любого момента времени t выполняется нормировочное условие $\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1$ $(t \geq 0)$.

Потоком вероятности, переводящим систему из состояния s_i в состояние s_j, называется произведение вероятности $p_i(t)$ состояния s_i на интенсивность $\lambda_{ij}(t)$ потока событий, переводящего систему в состояние s_j. В соответствии с уравнениями Колмогорова, производная вероятности любого состояния равна сумме потоков вероятности. переводящих систему в это состояние, минус сумма всех потоков вероятности, выводящих систему из этого состояния.

Все интенсивности в системе уравнений Колмогорова можно записать в виде квадратной *матрицы интенсивностей* $(\lambda_{ij}(t))$ размерности $n \times n$, по главной диагонали которой стоят нули ($\lambda_{ii} = 0$).

Если все интенсивности потоков не зависят от аргумента t $(\lambda_{ij}(t) = \lambda_{ij})$, то марковский процесс называется *однородным*. Системы, в которых происходит однородный марковский случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем, называются *простейшими системами*. Для простейшей системы вероятности состояний определяются уравнениями Колмогорова с постоянными коэффициентами. Для решения этих уравнений в инженерной практике широко применяется преобразование Лапласа.

Пусть всё множество состояний процесса, протекающего в системе S, является эргодическим, т. е. если из любого состояния s_i можно перейти в любое другое состояние s_j. Если число состояний системы S конечно, то для любой пары состояний s_i и s_j $(i, j = 1, 2, \ ..., n)$ найдётся такое $\tau > 0$, при котором выполняется неравенство

$$p_{i,j}(t_0, \tau) = P\{S(t_0 + \tau) = s_j \,|\, S(t_0) = s_i\} > 0.$$

Процесс, протекающий в системе S, называется *эргодическим*, если существует предел

$$\lim_{\tau\to\infty} p_{ij}(t_0,\tau) = p_j = P\{S = s_j\} > 0 \ (i,j = 1,2,\ \dots,\ n).$$

Для эргодического процесса по истечении достаточно большого промежутка времени τ вероятность того, что система S будет в состоянии s_j. Не зависит от того, в каком состоянии s_i система была в начальный момент $t_0 = 0$ и не зависит от величины τ. Любой транзитивный (т. е. такой, что существует «маршрут» между двумя любыми состояниями системы) однородный марковский процесс с конечным числом состояний обладает эргодическим свойством.

Системы, в которых протекает эргодический марковский случайный процесс, называются *простейшими эргодическими системами*. Время функционирования такой системы можно разбить условно на два интервала $(0,t_T)$, $(t_T,+\infty)$, называемых соответственно участком *переходного* и участком *стационарного режима* функционирования системы. Если простейшая эргодическая система находится в стационарном режиме, то сумма всех потоков вероятности, переводящих систему S из других состояний в состояние s_i, равна сумме всех потоком вероятности, переводящих систему S из состояния s_i в другие.

Задачи для самостоятельной работы

4.1 Система S представляет собой техническое устройство, которое может находиться в одном из двух состояний: s_1 – техническое устройство исправно (работает), s_2 – техническое устройство неисправно (находится в ремонте). На техническое устройство, находящееся в состоянии s_1, действует поток отказов с интенсивностью $\lambda(t)$, переводящий устройство в состояние s_2. На техническое устройство, находящееся в состоянии s_2, действует поток восстановлений с интенсивностью $\mu(t)$; оба потока – пуассоновские, независимые. Написать уравнения Колмогорова для вероятностей состояний и решить их, считая, что в начальный момент при $t = 0$ техническое устройство исправно.

4.2 Техническая система S – вычислительный центр (ВЦ), состоящий из трёх ЭВМ: 1, 2 и 3. Каждая из ЭВМ выходит из строя (отказывает) независимо от других. Потоки отказов ЭВМ – пуассоновские, с переменными интенсивностями, равными $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$. После отказа каждая ЭВМ восстанавливается; потоки восстановлений – пуассоновские с интенсивностями $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $\mu_3(t)$; потоки восстановлений тоже независимы. Рассматриваются следующие состояния системы: s_1 – все ЭВМ исправны; s_2 – ЭВМ 1 отказала, ЭВМ 2
и ЭВМ 3 исправны; s_3 – ЭВМ 2 отказала, ЭВМ 1 и ЭВМ 3 исправны; s_4 – ЭВМ 3 отказала, ЭВМ 1 и ЭВМ 2 исправны; s_5 – ЭВМ 1 и ЭВМ 2 отказали, ЭВМ 3 исправна; s_6 – ЭВМ 1 и ЭВМ 3 отказали, ЭВМ 2 исправна; s_7 – ЭВМ 2 и ЭВМ 3 отказали, ЭВМ 1 исправна; s_8 – все ЭВМ отказали.

Требуется:

а) построить размеченный граф состояний ВЦ;

б) составить уравнения Колмогорова для вероятностей состояний;

в) записать нормировочное условие, позволяющее указать, при каких начальных условиях надо решать систему дифференциальных уравнений Колмогорова, если известно, что в начальный момент $t=0$ все ЭВМ исправны.

4.3 Сформулировать правило перехода от марковского процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем к марковской цепи.

4.4 В автохозяйстве имеется n автомашин. Каждая из этих автомашин (независимо от других) может выходить из строя; интенсивность простейшего потока отказов автомашины равна λ. Отказавшая автомашина становится на стоянку и ожидает начала ремонта. Время ожидания начала ремонта автомашины распределено по показательному закону с параметром γ. Время ремонта автомашины распределено по показательному закону с параметром μ. Определить вероятности состояний автомашины, если в начальный момент она была исправна.

4.5 Определить, является ли система, рассмотренная в задаче 4.4, простейшей эргодической системой. Если является, то найти предельные вероятности состояний этой системы при $\mu=\gamma=1$, $\lambda=5$.

4.6 Интенсивность пуассоновского потока событий, выводящего систему из состояния s_i, $\lambda_i(t)=at+b$; найти закон распределения случайной величины T_i – времени однократного пребывания системы в состоянии s_i ($a>0$, $b>0$).

4.7 Интенсивность пуассоновского потока событий, выводящего систему из состояния s_i, равна $\lambda_i(t)$. Найти закон распределения случайной величины T_i – времени однократного пребывания системы в состоянии s_i, при условии, что система попала в состояние s_i в момент времени $\tau>0$.

Домашнее задание

4.8 Пусть $\overline{t_i}$ – математическое ожидание времени однократного пребывания системы S в состоянии s_i, $\overline{\theta_i}$ – математическое ожидание времени однократного пребывания системы S вне состояния s_i. Для условий задачи 4.5 при $\gamma=\mu=1$ (1/сут), $\lambda=5$ (1/сут) найти величины $\overline{t_i}$ и $\overline{\theta_i}$.

4.9 Какова должна быть интенсивность пуассоновского потока событий $\lambda_i(t)$, если случайная величина T_i – время однократного пребывания системы в состоянии s_i, распределена по закону Эрланга 2-го порядка, а система S в момент времени $t=0$ находилась в состоянии s_i? Построить график функции $\lambda_i(t)$.

5 Практическое занятие № 5. Марковские процессы гибели и размножения с непрерывным временем

Напомним, что случайный процесс называется *процессом гибели и размножения*, если состояния системы образуют цепь, в которой каждое состояние s_i, кроме двух крайних s_0 и s_n, связано прямой и обратной связью с двумя соседними, а каждое из двух крайних связано прямой и обратной связью только с одним соседним. Марковским процессом гибели и размножения с непрерывным временем называется такой случайный процесс. который может принимать только целые неотрицательные значения и изменения которого могут происходить в любой момент времени t, при этом в любой момент времени он может либо увеличиться на единицу, либо уменьшиться на единицу, либо остаться неизменным. Коротко такие процессы будем называть процессами гибели и размножения.

Пусть $X(t)$ – случайная величина, связанная с функционированием рассматриваемой системы. Пуассоновские потоки событий, ведущие к увеличению функции $X(t)$ («размножению») называются *потоками размножения*. Интенсивности потоков размножения обозначим через $\lambda_i(t)$, где индекс i соответствует индексу состояния s_i. Аналогично потоки событий, ведущие к уменьшению функции $X(t)$ («гибели») называются *потоками гибели*. Интенсивности потоков гибели обозначим через $\mu_i(t)$.

Одномерный закон распределения процесса гибели и размножения $X(t)$ можно определить с помощью следующей системы уравнений Колмогорова:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \mu_1(t)p_1(t) - \lambda_0(t)p_0(t),$$

$$\ldots$$

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \lambda_{i-1}(t)p_{i-1}(t) + \mu_{i+1}(t)p_{i+1}(t) - (\lambda_i(t) + \mu_i(t))p_i(t) \ (i = 1,2,3,\ ...),$$

где $p_i(t) = P\{S(t) = s_i\} = P\{X(t) = i\}$ $(i = 0,1,2,\ ...)$.

Данную систему уравнений следует решать при начальных условиях $p_i(0) \geq 0$ $(i = 0,1,2,\ ...)$, при этом $\sum_i p_i(0) = 1$.

В случае процесса гибели и размножения с ограниченным числом состояний, когда $0 \leq X(t) \leq n$, система уравнений Колмогорова имеет вид:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \mu_1(t)p_1(t) - \lambda_0(t)p_0(t),$$

$$\ldots$$

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \lambda_{i-1}(t)\,p_{i-1}(t) + \mu_{i+1}(t)\,p_{i+1}(t) - (\lambda_i(t) + \mu_i(t))\,p_i(t)(i = 1,2,\ ...,\ n-1),$$

$$\ldots$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda_{n-1}(t)\,p_{n-1}(t) - \mu_n(t)\,p_n(t).$$

Процессом чистого размножения называется такой процесс гибели и размножения, у которого интенсивности всех потоков гибели равны нулю. Аналогично вводится понятие *процесса чистой гибели*.

Система S с конечным числом состояний, в которой протекает процесс гибели и размножения с постоянными интенсивностями потоков гибели и размножения, является простейшей эргодической системой. Для простейшей схемы гибели и размножения, находящейся в стационарном режиме, потоки вероятности между двумя любыми соседними состояниями равны.

Задачи для самостоятельной работы

5.1 Рассматривается производство автомашин на автозаводе. Поток производимых автомашин является пуассоновским с интенсивностью $\lambda(t)$. Случайный процесс $X(t)$ – число выпущенных машин к моменту времени t, выпуск автомашин начат в момент $t = 0$.

Требуется:

а) построить граф состояний процесса $X(t)$;

б) записать систему уравнений Колмогорова для определения одномерного закона распределения процесса $X(t)$;

в) найти одномерный закон распределения процесса $X(t)$;

г) найти математическое ожидание и дисперсию $X(t)$.

5.2 Процесс, рассмотренный в задаче 5.1, является примером *неоднородного процесса Пуассона*. Если интенсивность потока $\lambda(t) = \lambda$ постоянна, то получаем *однородный процесс Пуассона* (или просто процесс Пуассона). Для однородного процесса Пуассона найти вероятность $P\{X(t) = i\}$, а также его характеристики.

5.3 В условиях задачи 5.1 производство автомашин длится лишь до тех пор, пока их не будет произведено n штук, после чего завод переходит на производство других автомашин. Определить закон распределения случайного процесса $X(t)$ – числа выпущенных машин на момент времени t, если выпуск автомашин начат в момент времени $t = 0$. Найти математическое ожидание и дисперсию $X(t)$.

5.4 Рассматривается процесс эксплуатации однотипных автомашин в большом автохозяйстве. На момент времени $t = 0$ в автохозяйстве имелось n таких автомашин, новых машин в автохозяйство не поступает. Интенсивность потока списания (снятия с эксплуатации) каждой автомашины данного типа постоянна и равна μ. Это значит, что срок службы каждой автомашины есть случайная величина, распределённая по показательному закону с параметром μ. Рассматривается случайный процесс $X(t)$ – число однотипных автомашин, находящихся в эксплуатации. Найти одномерный закон распределения этого процесса, если автохозяйство не пополняется данным типом автомашин. Найти математическое ожидание и дисперсию $X(t)$.

Домашнее задание

5.5 Рассматривается эксплуатация однотипных автомашин в большом автохозяйстве. Интенсивность поступления таких автомашин в автохозяйство равна $\lambda(t)$. Каждая поступившая в автохозяйство автомашина списывается (снимается с эксплуатации) через случайное время T, распределённое по показательному закону с параметром μ. Рассматривается случайный процесс $X(t)$ – число автомашин данного типа, находящихся в эксплуатации в момент времени t.

Найти одномерный закон распределения случайного процесса $X(t)$, если:

а) нет ограничений на число эксплуатируемых машин;

б) в автохозяйстве может эксплуатироваться не более n автомашин.

5.6 Рассматривается процесс чистого размножения, у которого интенсивность $\lambda_i = a^i\lambda$, где a – безразмерная величина. Определить условия, при которых будет наблюдаться явление «взрыва».

6 Практическое занятие № 6. Дифференциальные уравнения для характеристик марковского процесса гибели и размножения

В инженерной практике исследователя часто интересует не только и не столько закон распределения случайного процесса $X(t)$ – число «живых» единиц, сколько характеристики этого процесса: математическое ожидание $m(t)$, дисперсия $D(t)$, а также корреляционная функция $K(t,t')$.

Рассмотрим марковский процесс гибели и размножения без ограничения на число состояний. Дифференциальные уравнения для характеристик этого процесса имеют вид:

$$\frac{dm(t)}{dt} = \sum_{i=0}^{\infty}(\lambda_i(t) - \mu_i(t))p_i(t);$$

$$\frac{dD(t)}{dt} = \sum_{i=0}^{\infty}[\lambda_i(t) + \mu_i(t) + 2(i - m(t))(\lambda_i(t) - \mu_i(t))]p_i(t);$$

$$K(t,t')=\sum_{i=0}^{\infty} ip_i(t)\left(\sum_{j=0}^{\infty} jp_{j|i}(t',t)\right)-m(t)m(t'),$$

где условная вероятность $p_{j|i}(t',t)=P\{X(t'=j)|X(t)=i\}$.

При ограниченном числе состояний, когда случайный процесс $X(t)$ не может превышать значения n, уравнение для математического ожидания $m(t)$ имеет вид:

$$\frac{dm(t)}{dt}=\sum_{i=0}^{n}(\lambda_i(t)-\mu_i(t))p_i(t).$$

В этом выражении $\lambda_n(t)=\mu_0(t)\equiv 0$.

Дифференциальное уравнение для дисперсии случайного процесса $X(t)$ имеет вид:

$$\frac{dD(t)}{dt}=\sum_{i=0}^{n}[\lambda_i(t)+\mu_i(t)+2(i-m(t))(\lambda_i(t)-\mu_i(t))]p_i(t).$$

При решении этого уравнения также следует учитывать ограничения

$$\lambda_n(t)=\mu_0(t)\equiv 0.$$

Корреляционная функция также находится по формулам, аналогичным формулам для нахождения $K(t,t')$ в случае отсутствия ограничения на число состояний, в которых верхний предел сумм нужно брать равным n.

Задачи для самостоятельной работы

6.1 Рассматривается процесс эксплуатации одинаковых технических устройств на предприятии. Пуассоновский поток поступлений устройств на предприятие имеет интенсивность $\lambda(t)$, пуассоновский поток списаний каждого устройства – интенсивность $\mu(t)$. Случайный процесс $X(t)$ – число технических устройств, эксплуатируемых на предприятии в момент времени t. Практических ограничений на число технических устройств на предприятии нет и в начальный момент $X(0)=0$.

Требуется:

а) построить размеченный граф состояний случайного процесса;

б) записать дифференциальное уравнение для математического ожидания $m(t)$ процесса $X(t)$ и найти его решение;

в) записать уравнение для дисперсии $D(t)$ процесса $X(t)$ и найти дисперсию;

г) найти математическое ожидание и дисперсию процесса $X(t)$ в случае, если λ и μ постоянны и при начальных условиях $m(0)=D(0)=0$;

д) доказать, что в условиях п. г) одномерный закон распределения случайного процесса $X(t)$ является законом Пуассона с параметром $m(t)$;

е) в условиях п. г) найти корреляционную функцию $K(t,t')$ процесса $X(t)$.

6.2 Рассматривается процесс эксплуатации нефтяных скважин. Интенсивность ввода нефтяных скважин в эксплуатацию $\lambda(t)=at$. Интенсивность потоков выхода из строя каждой скважины $\mu=\text{const}$. Найти характеристики случайного процесса $X(t)$ – числа нефтяных скважин, находящихся в эксплуатации на момент времени t, если $X(0)=0$.

6.3 В условиях задачи 6.2 известно, что на начало года (на момент $t_1>0$) в эксплуатации было n_1 нефтяных скважин. По плану к концу года на момент t_2 $(t_2>t_1)$ в эксплуатации должно быть $n_{\partial 2}$ нефтяных скважин. Определить вероятность выполнения плана.

6.4 Рассматривается производство и эксплуатация однотипных ЭВМ. Интенсивность пуассоновского потока производимых ЭВМ имеет вид:

$$\lambda(t)=\begin{cases} at, & 0\le t\le t_1; \\ at_1, & t_1<t\le t_2; \\ 0, & t>t_2. \end{cases}$$

На участке $(0,t_1)$ происходит развёртывание производства ЭВМ, на участке (t_1,t_2) ЭВМ производятся с постоянной интенсивностью, а в момент t_2 снимаются с производства. Каждая произведённая ЭВМ эксплуатируется в течение случайного времени T, распределённого по показательному закону с параметром μ. Определить математическое ожидание $m(t)$ и дисперсию $D(t)$ числа ЭВМ, находящихся в эксплуатации, если на момент начала производства $t=0$ данного типа ЭВМ в эксплуатации не было ($m(0)=D(0)=0$).

6.5 Рассматривается эксплуатация n одинаковых станков на машиностроительном заводе. Интенсивность пуассоновского потока отказов каждого станка $\mu=\text{const}$; интенсивность пуассоновского потока восстановлений каждого станка $\lambda=\text{const}$. В начальный момент времени $t=0$ все станки были исправны ($m(0)=n$, $D(0)=0$, $\pi_1(0)=1$). Определить характеристики случайного процесса $X(t)$ – числа исправных станков.

Домашнее задание

6.6 В условиях задачи 6.4 определить вероятность того, что за 6 лет будет произведено не менее 13200 ЭВМ.

6.7 Цех, работающий круглосуточно (в три смены), имеет 100 одинаковых станков с числовым программным управлением. Среднее время безотказной работы каждого станка 10 сут, среднее время ремонта станка $0,5$ сут. Определить характеристики случайного процесса $X(t)$ – числа исправных станков в стационарном режиме, считая, что потоки отказов и восстановлений каждого станка – простейшие и все станки работают независимо друг от друга.

7 Практическое занятие № 7. Преобразования случайных процессов

Элементарным случайным процессом называется называется произведение центрированной случайной величины V на неслучайную функцию $\varphi(t)$:

$$X(t) = V\varphi(t).$$

Основные характеристики элементарного случайного процесса $X(t)$: математическое ожидание $M[X(t)] = 0$, дисперсия $D[X(t)] = \varphi^2(t)D[V]$, корреляционная функция $K(t,t') = \varphi(t)\varphi(t')D[V]$, нормированная корреляционная функция $r(t,t') \equiv 1$.

Каноническим разложением случайного процесса $X(t)$ называется выражение вида $X(t) = m(t) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} V_k\varphi_k(t)$. В этом разложении m – математическое ожидание случайного процесса $X(t)$, V_1, V_2, …, V_k, … – некоррелированные центрированные случайные величины с дисперсиями D_1, D_2, …, D_k, ...; $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, …, $\varphi_k(t)$, … – неслучайные функции аргумента t. Случайные величины V_1, V_2, …, V_k, … называются *коэффициентами* канонического разложения, а неслучайные функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, …, $\varphi_k(t)$, … – *координатными функциями* канонического разложения. Каноническое разложение может содержать как конечное, так и бесконечное (счётное) число членов.

Корреляционная функция случайного процесса $X(t)$, заданного своим каноническим разложением, имеет вид $K(t,t') = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t)\varphi_k(t')D_k$. Данное выражение называется *каноническим разложением* корреляционной функции случайного процесса $X(t)$. Дисперсия случайного процесса $X(t)$, заданного своим каноническим разложением, равна $D[X(t)] = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2(t)D_k$ – каноническое разложение дисперсии.

В инженерной практике часто возникает следующая задача: на вход системы S подаётся случайный процесс $X(t)$ – *входной сигнал*. Система S осуществляет преобразование сигнала $X(t)$, в результате чего на выходе системы S получается случайный процесс $Y(t)$ – *реакция системы* S или *выходной сигнал*. Символически преобразование входного сигнала $X(t)$ в выходной сигнал $Y(t)$ можно записать в виде $Y(t) = A\{X(t)\}$, где A – оператор системы. В прикладных задачах рассматриваются различные операторы: оператор интегрирования, оператор решения дифференциальных уравнений, оператор возведения в квадрат, оператор суммирования, оператор умножения и др. Если оператор системы линейный, то система называется *линейной*, в противном случае система *нелинейная*.

Если случайный процесс, заданный своим каноническим разложением

$$X(t) = m(t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \varphi_k(t),$$

подвергнут линейному неоднородному преобразованию L, то получится случайный процесс тоже в виде канонического разложения

$$Y(t) = m_Y(t) + \sum_{k=1}^{\infty} V_k \psi_k(t),$$

где $m_Y(t) = L\{m(t)\}$;

$\psi_k(t) = L_0\{\varphi_k(t)\}$;

L_0 – линейное однородное преобразование, соответствующее линейному преобразованию L.

Корреляционную функцию $K_Y(t,t')$ случайного процесса $Y(t)$ можно найти в результате соответствующего двойного линейного однородного преобразования корреляционной функции $K(t,t')$ случайного процесса $X(t)$, взятого сначала по аргументу t, а затем – по t' (или наоборот). Дисперсия случайного процесса $Y(t)$ получается в результате двукратного применения соответствующего однородного преобразования к корреляционной функции $K(t,t')$ и затем нахождения предела полученного выражения при $t \to t'$.

Задачи для самостоятельной работы

7.1 Рассматриваются элементарные случайные процессы:

$$Y(t) = Va,\ Z(t) = V\cos^2 t,\ U(t) = Vt^2,$$

где V – нормально распределённая случайная величина с характеристиками $m = 0$, σ;

a – неслучайная величина.

Найти характеристики (математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию) каждого из этих процессов и построить для каждого из них семейство реализаций.

7.2 Случайный процесс $X(t)$ задан своим каноническим разложением

$$X(t)=m(t)+\sum_{k=1}^{\infty}V_k\varphi_k(t),$$

где случайные величины V_k распределены нормально с характеристиками $M[V_k]=0$, $D[V_k]=D_k$ ($k=1,2,\ ...,\ n$), $M[V_kV_m]=0$ ($k\neq m$), случайные величины V_1, V_2, …, V_n некоррелированы. Найти одномерный. Двумерный и l-мерный законы распределения случайного процесса $X(t)$.

7.3 Даны характеристики случайного процесса $X(t)$: $m(t)$ и $K(t,t')$. Случайный процесс $X(t)$ подвергается дифференцированию: $Y(t)=\dfrac{d}{dt}X(t)$. Найти характеристики процесса $Y(t)$.

7.4 Найти характеристики производной случайного процесса $X(t)=We^{-Vt}$, где случайная величина W распределена нормально с параметрами m и σ, а случайная величина V распределена равномерно в интервале $(0,a)$; $t>0$, $a>0$, случайные величины W и V независимы.

7.5 Даны характеристики случайного процесса $X(t)$: $m(t)$ и $K(t,t')$. Случайный процесс $Y(t)$ получается в результате интегрирования случайного процесса $X(t)$: $Y(t)=\int\limits_0^t X(\tau)d\tau$. Требуется найти характеристики случайного процесса $Y(t)$.

7.6 Случайный процесс $X(t)$ задан в виде своего канонического разложения: $X(t)=t^2+\sum\limits_{k=1}^{n}V_k e^{-\alpha_k t}$ ($t>0$), где V_k – центрированные некоррелированные случайные величины с дисперсиями D_k ($k=1,2,\ ...,\ n$), $\alpha_k>0$ ($k=1,2,\ ...,\ n$), случайный процесс $Y(t)=\int\limits_0^t X(\tau)d\tau$. Определить характеристики случайного процесса $Y(t)$.

Домашнее задание

7.7 Найти производную случайного процесса $X(\pi t)=Y\cos(\psi t+\Theta)$, где случайная величина Y распределена по закону Рэлея с параметром σ, а случайная величина Θ распределена равномерно в интервале $(0,2\pi)$, ψ – неслучайный параметр, случайные величины Y и Θ независимы.

7.8 Даны характеристики случайного процесса $X(t)$: $m(t)$ и $K(t,t')$. Случайный процесс $Y(t)$ получается квадратичным преобразованием процесса $X(t)$: $Y(t)=(X(t))^2$. Требуется найти характеристики случайного процесса $Y(t)$.

8 Практическое занятие № 8. Стационарные случайные процессы

Рассмотрим общие свойства случайных процессов, протекающих однородно во времени, когда наступает стационарный режим функционирования системы – *стационарных* случайных процессов.

Случайный процесс $X(t)$ называется *стационарным в узком смысле*, если n-мерная плотность распределения не изменяется при сдвиге всех его временных аргументов на одинаковую произвольную величину τ. Корреляционная функция стационарного случайного процесса есть чётная функция сдвига τ между двумя сечениями этого процесса.

Случайный процесс $X(t)$ называется *стационарным в широком смысле*, если его математическое ожидание постоянно, а корреляционная функция есть функция сдвига между аргументами: $K(t_1,t_2)=k(t_2-t_1)=k(\tau)$. Если случайный процесс является стационарным в узком смысле, то он является стационарным и в широком смысле. Обратное же утверждение не всегда может быть справедливым.

Корреляционная функция стационарного случайного процесса обладает следующими свойствами: $k(\tau)=k(-\tau)$; $k(0)=D$; $k(0)\ge 0$. Кроме этих свойств, корреляционная функция стационарного случайного процесса должна обладать свойством $|k(\tau)|\le k(0)$ и свойством положительной определённости: $\int\limits_B\int\limits_B k(t-t')\varphi(t)\varphi(t')dtdt'$. Здесь $\varphi(t)$ – любая функция аргумента t, а область B – любая область изменения аргумента t.

Нормированной корреляционной функцией стационарного случайного процесса называется функция $r(\tau)=k(\tau)/D=k(\tau)/k(0)$. Для функции $r(\tau)$ выполняется неравенство $|r(\tau)|\le 1$.

Стационарные случайные процессы могут обладать или не обладать эргодическим свойством. Для эргодического стационарного случайного процесса $X(t)$ математическое ожидание может быть определено из выражения

$$m=M[X(t)]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt.$$

Достаточным условием выполнения последнего равенства – эргодичности стационарного случайного процесса $X(t)$ по математическому ожиданию – является условие $\lim\limits_{\tau\to\infty} k(\tau)=0$. Дисперсия эргодического стационарного случайного процесса может быть найдена по формуле

$$D = D[X(t)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(X(t)-m)^2\,dt\ .$$

Достаточным условием эргодичности стационарного случайного процесса по дисперсии является условие $\lim\limits_{\tau\to\infty} k_Y(\tau)=0$, где $k_Y(\tau)$ – корреляционная функция стационарного случайного процесса $Y(t)=(X(t))^2$.

Корреляционная функция эргодического стационарного случайного процесса может быть определена по формуле

$$k(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(X(t)-m)(X(t-\tau)-m)\,dt\,.$$

Достаточным условием эргодичности стационарного случайного процесса по корреляционной функции является равенство $\lim\limits_{\tau\to\infty} k_Z(\tau)=0$, где $k_Z(\tau)$ – корреляционная функция случайного процесса $Z(t,\theta)=X(t)X(t+\theta)$.

Обычно стационарный случайный процесс бывает неэргодическим, когда он протекает неоднородно.

Пусть стационарный случайный процесс $X(t)$ представлен каноническим разложением вида

$$X(t) = m + \sum_{k=0}^{\infty}(V_k\cos\omega_k t + U_k\sin\omega_k t),$$

а его корреляционная функция – каноническим разложением корреляционной функции

$$K(t,t') = \sum_{k=0}^{\infty} D_k\cos\omega_k(t-t') = \sum_{k=0}^{\infty} D_k\cos\omega_k\tau = k(\tau),$$

где $M[V_k]=M[U_k]=M[V_kU_k]=0$;

$M\left[V_iU_j\right]\neq 0\ (i\neq j)$;

$D[V_k]=D[U_k]=D_k$;

$\tau = t-t'$.

Каноническое разложение указанного вида называется *спектральным разложением* стационарного случайного процесса. Спектральное разложение может быть представлено в виде

$$X(t)=m+\sum_{k=0}^{\infty} Z_k \cos(\omega_k t-\Theta_{\partial k}),$$

где Θ_k – фаза гармонического колебания элементарного стационарного случайного процесса – случайная величина, распределённая равномерно в интервале $(0,2\pi)$;

Z_k – амплитуда гармонического колебания элементарного стационарного случайного процесса – случайная величина.

Случайные величины Z_0, Z_1, …, Z_k, …, Θ_0, Θ_1, …, Θ_k, … зависимы. Между случайными величинами Z_k, Θ_k и V_k, U_k имеют место соотношения

$$Z_k \cos\Theta_k = V_k;\ Z_k \sin\Theta_k = U_k.$$

Спектральной плотностью стационарного случайного процесса $X(t)$ называется функция $S(\omega)=\lim\limits_{\Delta\omega\to 0} D_k/\Delta\omega$, где D_k – дисперсия k-й гармоники спектрального разложения случайного процесса $X(t)$. Корреляционная функция и спектральная плотность стационарного случайного процесса связаны между собой косинус-преобразованием Фурье:

$$S(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} k(\tau)\cos\omega\tau d\tau.$$

Задачи для самостоятельной работы

8.1 Рассматривается неслучайная величина a как частный случай случайного процесса: $X(t)=a$; найти её характеристики; определить, является ли этот процесс стационарным и обладает ли он свойством эргодичности.

8.2 Рассматривается случайная величина V как частный случай случайного процесса: $X(t)=V$; найти её характеристики; определить, является ли этот процесс стационарным и обладает ли он свойством эргодичности.

8.3 Случайный процесс $X(t)$ – *случайная телеграфная волна* – возникает следующим образом. На оси Ot имеется простейший поток событий с интенсивностью λ. Случайный процесс $X(t)$ попеременно принимает значения a и $-a$; при наступлении очередного события в простейшем потоке случайный процесс $X(t)$ скачком меняет своё состояние с a на $-a$ или наоборот. Найти характеристики случайного процесса $X(t)$.

8.4 *Обобщённая случайная телеграфная волна*. Как и в задаче 8.3, на оси Ot имеется простейший поток событий с интенсивностью λ. В момент наступления i-го события случайный процесс $X(t)$ принимает случайное значение X_i ($i=0,2,\ \dots$), сохраняя его до следующего события в потоке. В начальный момент времени $t=0$ $X(0)=X_0$. Случайные величины X_0, X_1, …, X_i, … независимы и распределены одинаково с плотностью $f(x)$. Найти характеристики случайного процесса $X(t)$.

8.5 Рассматривается случайный процесс $X(t)$, описанный в задаче 8.4, при неограниченном увеличении интенсивности простейшего потока ($\lambda \to \infty$). Найти характеристики такого предельного процесса $Y(t)=\lim\limits_{\lambda\to\infty} X(t)$, считая, что этот предел существует.

8.6 Найти спектральную плотность $S_{X_k}(\omega)$ элементарного стационарного случайного процесса $X_k(t)=V_k\cos\omega_k t+U_k\sin\omega_k t$.

8.7 Найти спектральную плотность стационарного случайного процесса, заданного своим спектральным разложением

$$X(t)=m+\sum_{k=0}^{\infty}(V_k\cos\omega_k t+U_k\sin\omega_k t).$$

8.8 Найти спектральную плотность вырожденного стационарного случайного процесса $X(t)$ (когда $X(t)=V$, где V – случайная величина (см. задачу 8.2)), у которого $k(\tau)=D[V]=D$.

Домашнее задание

8.9 *Стационарный белый шум*. Исследовать предельное поведение случайного процесса $X(t)$, рассмотренного в задаче 8.4, при условии, что интенсивность простейшего потока λ неограниченно увеличивается ($\lambda\to\infty$), дисперсия сечения этого процесса тоже неограниченно увеличивается ($D\to\infty$), но при этом отношение D/λ остаётся постоянным: $\lim\limits_{\substack{D\to\infty\\ \lambda\to\infty}} D/\lambda = C$. Найти характеристики предельного случайного процесса $Z(t)$.

8.10 Показать, что стационарный белый шум $X(t)$ имеет постоянную спектральную плотность.

Список литературы

1 **Вентцель, Е. С.** Прикладные задачи теории вероятностей / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – Москва : Радио и связь, 1983. – 416 с.

2 **Вентцель, Е. С.** Теория вероятностей и её инженерные приложения : учебное пособие для втузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 2-е изд., стер. – Москва : Высшая школа, 2000. – 480 с.

3 **Вентцель, Е. С.** Теория случайных процессов и её инженерные приложения : учебное пособие для втузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 2-е изд., стер. – Москва : Высшая школа, 2000. – 383 с.

4 **Миллер, Б. М.** Теория случайных процессов в примерах и задачах / Б. М. Миллер, А. Р. Панков. – Москва : Физматлит, 2002. – 320 с.