МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» дневной формы обучения

Могилев 2022

УДК 517.98
ББК 22.162
Т33

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «25» ноября 2021 г., протокол № 3

Составители: канд. пед. наук, доц. Е. Л. Старовойтова;
ст. преподаватель А. Г. Козлов

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. И. И. Маковецкий

Методические рекомендации к практическим занятиям по курсу «Теория функций и функциональный анализ» предназначены для студентов направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» дневной формы обучения. Содержат необходимые для проведения практических занятий вопросы и задачи.

Учебно-методическое издание

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Ответственный за выпуск В. Г. Замураев

Корректор И. В. Голубцова

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Практическое занятие № 1. Понятие множества. Операции над множествами. Отображения. Разбиения на классы. Эквивалентность множеств. Понятие мощности множества. Упорядоченные множества. Трансфинитные числа. Системы множеств

Вопросы к практическому занятию

1 Понятие множества.
2 Операции над множествами.
3 Отображения.
4 Разбиения на классы.
5 Отображение множеств.
6 Общее понятие функции.
7 Разбиения на классы.
8 Отношения эквивалентности.
9 Эквивалентность множеств.
10 Понятие мощности множеств.
11 Конечные и бесконечные множества.
12 Счетные множества.
13 Эквивалентность множеств.
14 Несчетность множества действительных чисел.
15 Теорема Кантора – Бернштейна.
16 Упорядоченные множества.
17 Трансфинитные числа.
18 Частично упорядоченные множества.
19 Отображения, сохраняющие порядок.
20 Порядковые типы.
21 Упорядоченная сумма упорядоченных множеств.
22 Вполне упорядоченные множества.
23 Сравнение порядковых чисел.
24 Аксиома выбора, теорема Цермело и другие эквивалентные им утверждения.
25 Трансфинитная индукция.
26 Системы множеств.
27 Кольцо множеств. Полукольцо множеств. Кольцо, порожденное полукольцом.
28 σ-алгебры. Системы множеств и отображения.

Задачи для самостоятельной работы

1 Существуют ли такие множества A, B и C, что $A\bigcap B\neq\varnothing$, $A\bigcap C=\varnothing$ и $\left(A\bigcap B\right)\setminus C=\varnothing$?

2 Какие из равенств верны для любых множеств A, B, C:

а) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$; г) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
б) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$; д) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap B$;
в) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; е) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

3 Докажите, что операция «симметрическая разность» ассоциативна для любых A, B и C:

$$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C.$$

4 Сколько существует подмножеств у n-элементного множества?

5 Пусть множество A содержит n элементов, а его подмножество B содержит k элементов. Сколько существует множеств C, для которых $B \subset C \subset A$?

6 Докажите, что для произвольного множества множество всех его конечных подмножеств образует кольцо. При каком условии это кольцо будет алгеброй?

7 Пусть X – несчетное множество. Докажите, что множество всех таких подмножеств X, что либо само это подмножество, либо его дополнение до X не более чем счетно образует σ-алгебру.

8 Пусть X – фиксированное множество, $A_0 \subset X$. Через A обозначим систему таких подмножеств $A \subset X$, что $A_0 \subset A$ либо $A_0 \cap A = \varnothing$. Докажите, что A есть σ-алгебра.

9 Докажите, что последовательностей длины n, составленных из нулей и единиц, столько же, сколько подмножеств у множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

10 Докажите, что любое семейство непересекающихся интервалов на прямой конечно или счётно.

11 Укажите взаимно однозначное соответствие между множеством $[0, 1] \cup [2, 3] \cup [4, 5] \cup \ldots$ и отрезком $[0, 1]$.

12 Докажите, что множество всех прямых на плоскости равномощно множеству всех точек на плоскости.

13 Докажите, что все геометрические фигуры, содержащие хотя бы кусочек прямой или кривой, равномощны.

14 Докажите, что если квадрат разбит на два множества, то хотя бы одно из них равномощно квадрату.

15 Установите явное соответствие между последовательностями натуральных чисел и иррациональными числами на отрезке (0, 1), используя цепные дроби, т. е. дроби вида $1/(n_0 + 1/(n_1 + 1/(n_2 + \ldots)))$.

16 Дано бесконечное частично упорядоченное множество X. Докажите, что в нём всегда найдётся либо бесконечное подмножество попарно несравнимых элементов, либо бесконечное подмножество, на котором индуцированный порядок линеен.

Домашнее задание

1 Множество U содержит $2n$ элементов. В нём выделено k подмножеств, причём ни одно из них не является подмножеством другого. Каково может быть максимальное значение числа k?

2 Докажите, что последовательностей нулей и единиц длины *n*, в которых число единиц равно *k*, равно числу *k*-элементных подмножеств *n*-элементного множества.

3 Докажите, что множество точек строгого локального максимума любой функции действительного аргумента конечно или счётно.

4 Докажите, что множество точек разрыва неубывающей функции действительного аргумента конечно или счётно.

5 Докажите, что полуплоскость (точки плоскости, лежащие по одну сторону от некоторой прямой) равномощна плоскости.

6 Докажите, что если отрезок разбит на две части, то хотя бы одна из них равномощна отрезку.

7 Какова мощность множества всех монотонных функций с действительными аргументами и значениями?

8 Докажите, что полукольцо множеств S будет кольцом, если объединение любых двух множеств из S будет принадлежать S.

9 Докажите, что если A – алгебра множеств, такая что пересечение каждой последовательности ее элементов принадлежит этой алгебре, то A есть σ-алгебра.

2 Практическое занятие № 2. Понятие метрического пространства. Сходимость. Открытые и замкнутые множества. Полные метрические пространства. Принцип сжимающих отображений и его применение

Вопросы к практическому занятию

1 Понятие метрического пространства.
2 Определение и примеры метрических пространств.
3 Непрерывные отображения метрических пространств.
4 Изометрия. Сходимость. Открытые и замкнутые множества.
5 Предельные точки, замыкание.
6 Плотные подмножества.
7 Открытые и замкнутые множества.
8 Открытые и замкнутые множества на прямой.
9 Полные метрические пространства.
10 Определение и примеры полных метрических пространств.
11 Теорема о вложенных шарах.
12 Теорема Бэра.
13 Пополнение пространства.
14 Принцип сжимающих отображений и его применение.
15 Простейшие применения принципа сжимающих отображений.
16 Теоремы существования и единственности для дифференциальных уравнений.
17 Применение принципа сжимающих отображений к интеграль-

ным уравнениям.

Задачи для самостоятельной работы

1 Являются ли метриками на числовой прямой следующие функции:

а) $\rho(x,y)=\|x|-|y\|$; г) $\rho(x,y)=\left|x^{10}-y^{10}\right|$;

б) $\rho(x,y)=\sqrt[3]{|x-y|}$; д) $\rho(x,y)=|\cos x-\cos y|$;

в) $\rho(x,y)=|\operatorname{tg}(x-y)|$; е) $\rho(x,y)=|\arcsin x-\arcsin y|$.

2 Пусть функция $f(x)$ с областью определения $R_+=[0,+\infty)$ удовлетворяет условиям:

а) $f(0)=0$;

б) $f(x)$ возрастает на R_+;

в) $f(x+y)\le f(x)+f(y)$ (полуаддитивна) $\forall x,y\in R$.

Докажите, что если $\rho(x,y)$ – метрика на множестве X, то функция $f(\rho(x,y))$ также является метрикой на X.

3 Являются ли метриками на множестве точек плоскости $x=(x_1;x_2)$ и $y=(y_1;y_2)$ следующие функции:

а) $\rho(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$;

б) $\rho(x,y)=\left(\sqrt{|x_1-y_1|}+\sqrt{|x_2-y_2|}\right)^2$;

в) $\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$.

4 При каких значениях a и b последовательности непрерывных функций $x_n(t)$ сходятся: а) в каждой точке отрезка $[a;b]$ (поточечно); б) почти везде на отрезке $[a;b]$; в) равномерно на отрезке $[a;b]$ (в пространстве); г) по метрике пространства $L_1[a;b]$, д) по метрике пространства $L_2[a;b]$, если:

1) $x_n(t)=\dfrac{tn}{t+n}$; 3) $x_n(t)=\sin^{2n}t+\dfrac{1}{n}$.

2) $x_n(t)=t^n-t^{n+1}+t$;

5 Докажите замкнутость множества

$$M=\left\{x\in C^1[0;1]:x'\left(\frac{1}{2}\right)=2\right\}$$

в пространстве $C^1[0;1]$.

6 Докажите, что множество

$$M=\{x\in C[a;b]:3\le x(t)<5\}$$

не открыто и не замкнуто в пространстве $C[a,b]$.

Домашнее задание

1 Являются ли метриками на числовой прямой следующие функции:

а) $\rho(x,y)=\left(x^4+y^4\right)|x-y|$; в) $\rho(x,y)=|x-y+\mathrm{sign}x-\mathrm{sign}y|$;

б) $\rho(x,y)=\left|10^x-10^y\right|$; г) $\rho(x,y)=\ln\left(1+|x-y|\right)$.

2 Пусть функция $f(x)$ с областью определения $R_+=[0,+\infty)$ удовлетворяет условиям:

а) $f(0)=0$;

б) $f(x)$ возрастает на R_+;

в) $f(x)$ имеет на $(0,+\infty)$ вторую производную, причем $f''(x)<0$ $\forall x\in(0,+\infty)$.

Докажите, что если $\rho(x,y)$ – метрика на множестве X, то функция $f(\rho(x,y))$ также является метрикой на X.

3 Являются ли метриками на множестве точек плоскости $x=(x_1;x_2)$ и $y=(y_1;y_2)$ следующие функции:

а) $\rho(x,y)=\sqrt[4]{(x_1-y_1)^4+(x_2-y_2)^4}$;

б) $\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\left(x_2^4-y_2^4\right)^2}$.

4 При каких значениях a и b последовательности непрерывных функций $x_n(t)$ сходятся: а) в каждой точке отрезка $[a;b]$ (поточечно); б) почти везде на отрезке $[a;b]$; в) равномерно на отрезке $[a;b]$ (в пространстве); г) по метрике пространства $L_1[a;b]$, д) по метрике пространства $L_2[a;b]$, если:

1) $x_n(t)=\left(1-t^2\right)^n$; 3) $x_n(t)=\dfrac{1}{t^2-nt+1}$.

2) $x_n(t)=nt^4e^{-nt^2}$;

5 Докажите, что множество

$$M=\left\{x\in l_1:\xi_k>-1\right\}$$

открыто в пространстве l_1 над полем R.

3 Практическое занятие № 3. Топологические пространства. Компактность. Компактность в метрических пространствах. Непрерывные кривые в метрических пространствах

Вопросы к практическому занятию

1 Топологические пространства.

2 Определение и примеры топологических пространств.

3 Сравнение топологий.
4 Определяющие системы окрестностей. База.
5 Аксиомы счетности.
6 Сходящиеся последовательности в T.
7 Непрерывные отображения.
8 Гомеоморфизм.
9 Аксиомы отделимости.
10 Различные способы задания топологии в пространстве.
11 Метризуемость. Понятие компактности.
12 Непрерывные отображения компактных пространств.
13 Непрерывные и полунепрерывные функции на компактных пространствах.
14 Счетная компактность.
15 Предкомпактные множества.
16 Полная ограниченность.
17 Предкомпактные подмножества в метрических пространствах.
18 Теорема Арцела. Теорема Пеано.
19 Равномерная непрерывность.
20 Непрерывные отображения метрических компактов.
21 Обобщенная теорема Арцела.
22 Непрерывные кривые в метрических пространствах.

Задачи для самостоятельной работы

1 Докажите, что любое вполне ограниченное множество в метрическом пространстве является ограниченным.

2 Докажите, что любое компактное множество в метрическом пространстве является ограниченным.

3 Как следует из задачи 2, любое компактное множество в метрическом пространстве является замкнутым и ограниченным:

а) докажите, что в R^n эти два условия вместе достаточны для компактности множества;

б) сформулируйте достаточное условие предкомпактности в R^n;

в) приведите пример, показывающий, что в общем случае этих двух условий недостаточно для компактности.

4 С помощью «ε/3-приёма» докажите полноту пространства $C(M_1, M_2)$ ограниченных непрерывных функций, действующих из метрического пространства M_1 в полное метрическое пространство M_2.

5 Пусть X – банахово пространство, причём X^* сепарабельно. Как с помощью диагональной процедуры извлечь из ограниченной последовательности $\{x_n\} \subset X$ слабо сходящуюся?

6 Пусть M – равномерно ограниченное множество функций в $C[a; b]$. Докажите, что множество функций

$$\left\{ \int_0^t x(\tau)\,d\tau \;\middle|\; x(t) \in M \right\}$$

предкомпактно в $C[a; b]$.

7 Докажите, что множество непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$ на $[a; b]$ таких, что

$$\int_a^b \left(\left(x(t) \right)^2 + \left(x'(t) \right)^2 \right) dt < k$$

при некотором фиксированном k, предкомпактно в $C[a; b]$.

8 Докажите, что соотношение эквивалентности для норм, заданных на линейном пространстве, действительно является отношением эквивалентности.

9 Докажите, что любое конечномерное нормированное пространство полно и банахово.

Домашнее задание

1 Будет ли вполне ограниченное множество ограниченным в метрическом пространстве?

2 Верно ли утверждение, что любое компактное множество ограниченно в метрическом пространстве?

3 Пусть компактное множество в метрическом пространстве является замкнутым и ограниченным:

а) докажите, что в R^3 эти условия вместе достаточны для компактности множества;

б) сформулируйте достаточное условие предкомпактности в R^3.

4 С помощью «ε/3-приёма» докажите полноту пространства $C(M_1, M_2)$ ограниченных кусочно-непрерывных функций, действующих из метрического пространства M_1 в полное метрическое пространство M_2.

4 Практическое занятие № 4. Линейные пространства. Линейная зависимость. Подпространства. Фактор-пространства. Линейные функционалы, их геометрический смысл

Вопросы к практическому занятию

1 Определение и примеры линейных пространств.
2 Линейная зависимость.
3 Подпространства.
4 Фактор-пространства.
5 Линейные функционалы, их геометрический смысл.

Задачи для самостоятельной работы

1 Образует ли линейное пространство заданное множество всех сходящихся последовательностей $\vec{a} = \{u_n\}$, $\vec{b} = \{v_n\}$ и сумма $\{u_n + v_n\}$, произведение $\{\alpha\, u_n\}$?

2 Покажите, что система столбцов $e_1 = (1,0,...,0)^T$, $e_2 = (0,1,...,0)^T$, ... , $e_m = (0,0,...,1)^T$ пространства $P_{1,n}$ линейно независима.

3 Покажите, что система $e_1 = (1,0,...,0)^T$, $e_2 = (0,1,...,0)^T$, ... , $e_m = (0,0,...,1)^T$ в пространстве $P_{1,n}$ образует базис.

4 Пусть V – линейное пространство над полем P, $\bar{a} \in V$, i = 1, 2, ... Является ли линейная оболочка $L\left\langle \overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_k}, \right\rangle$ линейным подпространством пространства V?

5 Пусть $P_n(x)$ – пространство многочленов степени не выше n. Является ли $P_k(x)$ является подпространством пространства $P_n(x)$, если $k \le n$?

6 Является ли множество матриц вида $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$, $a_{ij} \in R$ линейным подпространством пространства матриц $M_{3\times 2}$ над полем R.

7 Докажите утверждение, что для того чтобы пространство V разлагалось в прямую сумму подпространств U_1 и U_2, необходимо и достаточно, чтобы подпространства U_1 и U_2 имели только один общий нулевой вектор $U_1 \bigcap U_2 = \{\varnothing\}$.

Домашнее задание

1 Является ли сумма и пересечение подпространств линейного пространства его подпространствами?

2 Верно ли утверждение, что размерность суммы двух конечномерных подпространств линейного пространства равна сумме их размерностей минус размерность пересечения?

3 Покажите, что система $e_1 = (1,0,0)^T$, $e_2 = (0,1,0)^T$, $e_3 = (0,0,1)^T$ в пространстве $P_{1,3}$ образует базис.

4 Является ли множество матриц вида $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $a_{ij} \in R$ линейным подпространством пространства матриц $M_{2\times 2}$ над полем R?

5 Пусть $P_5(x)$ – пространство многочленов степени не выше 5. Является ли $P_k(x)$ подпространством пространства $P_n(x)$, если $k \le 5$?

5 Практическое занятие № 5. Нормированные пространства. Подпространства нормированного пространства. Фактор-пространства нормированного пространства

Вопросы к практическому занятию

1 Нормированные пространства.
2 Определение и примеры нормированных пространств.
3 Подпространства нормированного пространства.
4 Фактор-пространства нормированного пространства.

Задачи для самостоятельной работы

1 Известно, что норма – это частный случай метрики, т. е. функция $\rho(x,y) = \|x-y\|$ есть метрика. Покажите, что метрика на линейном пространстве порождается нормой тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим дополнительным свойствам, связанным с линейной структурой

$$\rho(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\rho(x, y),$$
$$\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y).$$

2 Покажите, что в нормированном пространстве шар большего радиуса никак не может быть подмножеством шара меньшего радиуса. Покажите, что в абстрактных метрических пространствах может быть не так. Покажите, что в ультраметрических пространствах непустое пересечение шаров обязательно является шаром меньшего радиуса.

3 Проверьте свойства нормы на R^n, $n \in N$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ 1 \le p < \infty,$$
$$\|x\|_\infty = \max_{1\le k\le n} |x_k|.$$

4 Докажите, что (R^n, $\|\cdot\|_1$) банахово.

5 Докажите эквивалентность норм $\|\cdot\|_p$, $1 \le p \le \infty$ в R^n.

6 Пусть на нормированном пространстве заданы две эквивалентные нормы. Докажите, что банаховость относительно одной нормы влечет банаховость относительно и другой. Верно ли, что банаховость относительно обоих норм влечет их эквивалентность?

7 Докажите эквивалентность всех норм в R^n.

Домашнее задание

В следующих линейных пространствах проверьте аксиомы нормированного пространства и докажите их банаховость.

1 Линейное пространство bv всех числовых последовательностей

$x = (x_1, x_2, \ldots,)$, для которых норма

$$\|x\| = \|x_1\| + \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k|$$

конечна.

2 Линейное пространство bv_0 всех числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots,)$, для которых $\lim\limits_{k\to\infty} x_n = 0$ и норма

$$\|x\| = \|x_1\| + \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1} - x_k|$$

конечна.

3 Линейное пространство bs всех числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots,)$, для которых норма

$$\|x\| = \sup_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \right|$$

конечна.

6 Практическое занятие № 6. Непрерывные линейные функционалы

Вопросы к практическому занятию

1 Непрерывные линейные функционалы в топологических линейных пространствах.

2 Линейные функционалы на нормированных пространствах.

3 Теорема Хана – Банаха в нормированном пространстве.

4 Линейные функционалы в счетно-нормированном пространстве.

Задачи для самостоятельной работы

1 Пусть f – ненулевой линейный функционал на X. Докажите, что codim ker $f = 1$. Покажите, что $f \in X'$ тогда и только тогда, когда ker f замкнуто.

2 Докажите, что отображение F: $l_1 \to c_0'$, определенное равенством

$$F(y)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} y^k x^k,\ x = \left(x^1, x^2, \ldots\right) \in c_0,\ y = \left(y^1, y^2, \ldots\right) \in l_1,$$

осуществляет изоморфизм между c_0' и l_1.

3 Используя предыдущую задачу, покажите, что c_0' и l_1.

4 Пусть нормированные пространства X и Y изоморфны. Покажите, что изоморфны и их сопряженные пространства X' и Y'.

5 Проверьте, что функционал f является линейным и непрерывным, и найдите его норму:

а) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x_{2n}}{2^n}$, $x\in c_0$;

б) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, $x\in c$;

в) $f(x)=\sum\limits_{n=2000}^{3000}nx_n$, $x\in l_\infty$;

г) $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n}$, $x\in l_p$, $p\in[1,\infty)$;

д) $f(x)=\int\limits_0^1\sin(\pi t)x(t)\,dt$, $x\in L_p[0,1]$;

е) $f(x)=x(0)+\int\limits_0^1 \mathrm{t}\,x(t)\,dt$, $x\in C[0,1]$.

6 Найдите элементы пространства $BV_0[0, 1]$, соответствующие следующим непрерывным функционалам на $C[0, 1]$:

а) $f(x)=x(0)$, $x\in c_0$;

б) $f(x)=\int\limits_0^1 x\left(\sqrt{t}\right)dt$, $x\in L_p[0,1]$;

в) $f(x)=\lim\limits_{m\to\infty}\int\limits_0^1 x\left(t^n\right)dt$, $x\in C[0,1]$.

Домашнее задание

1 Пусть f_1, f_2, …, f_n – линейные функционалы. Покажите, что если codim ($\bigcap_{k=1}^{n}$ ker f_k) < n, то эти функционалы линейно зависимы.

2 Покажите, что X' конечномерно тогда и только тогда, когда X конечномерно. Указание. Рассмотрите координатные функционалы.

3 Докажите, что если X' сепарабельно, то X также будет сепарабельным. Верно ли обратное? Верно ли обратное, если X рефлексивно?

4 Докажите, что пространство $\left(C[0,1]\right)'$ не является сепарабельным. Указание. Рассмотрите функционалы Дирака δ_t для всех $t \in [0, 1]$.

5 Пусть f – положительный линейный функционал, определенный на вещественном пространстве $C[0, 1]$. Покажите, что $f\in \left(C[0,1]\right)'$ и $\|f\| = f(1)$.

7 Практическое занятие № 7. Сопряженное пространство. Слабая топология и слабая сходимость

Вопросы к практическому занятию

1 Определение сопряженного пространства.

2 Сильная топология в сопряженном пространстве.

3 Примеры сопряженных пространств.

4 Второе сопряженное пространство.

5 Слабая топология и слабая сходимость в линейном топологическом пространстве.

6 Слабая сходимость в нормированных пространствах.

7 Слабая топология и слабая сходимость в сопряженном пространстве.

8 Ограниченные множества в сопряженном пространстве.

Задачи для самостоятельной работы

1 Покажите, что из сходимости по норме следует слабая (*-слабая) сходимость, а из слабой сходимости в X' следует *-слабая сходимость. Приведите пример, что обратные утверждения не верны. Указание. Рассмотрите орты в l_p, $1 < p < \infty$.

2 Покажите, что слабая ограниченность эквивалентна ограниченности по норме. Указание. Рассмотрите отображение π и используйте принцип равномерной ограниченности.

3 Покажите, что в принципе равномерной ограниченности нельзя избавиться от банаховости пространства X.

4 Докажите, что общий критерий слабой сходимости в нормированном пространстве: $x_n \in X$ слабо сходится к $x \in X$ тогда и только тогда, когда:

а) x_n ограничена по норме;

б) $f(x_n - x) \to 0$ при $n \to \infty$ для всех линейных непрерывных функционалов f из некоторого всюду плотного в X' множества.

5 Критерий слабой сходимости в c_0 и l_p, $1 < p < \infty$. Пусть $X = c_0$ или $X = l_p$, $1 < p < \infty$. Тогда $x_n \in X$ сходится слабо к $x \in X$ тогда и только тогда, когда:

а) x_n ограничена по норме;

б) $x_k^n \to x^k$ для любого $k \geq 1$.

6 Критерий слабой сходимости в c. Пусть $X = c$. Тогда $x_n \in X$ сходится слабо к $x \in X$ тогда и только тогда, когда:

а) x_n ограничена по норме;

б) $x_k^n \to x^k$ для любого $k \geq 0$, где $x_n^0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_n^k$.

7 Критерий слабой сходимости в $C[a, b]$. Пусть $X = C[a, b]$. Тогда $x_n \in X$ сходится слабо к $x \in X$ тогда и только тогда, когда:

а) x_n ограничена по норме;

б) $x_n(t) \to x(t)$ для любого $t \in [a, b]$.

Указание. Воспользуйтесь теоремой Рисса о виде линейного непрерывного функционала $f \in (C[a, b])'$ и теоремой Лебега о мажорируемой сходимости.

8 Критерий слабой сходимости в $L_p[a, b]$, $1 < p < \infty$. Пусть $X = L_p[a, b]$. Тогда $x_n \in X$ сходится слабо к $x \in X$ тогда и только тогда, когда:

а) x_n ограничена по норме;

б) $\int\limits_{\alpha}^{\beta} x_n(t)\,dt \to \int\limits_{\alpha}^{\beta} x(t)\,dt$ для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$.

9 Критерий слабой сходимости в $L_1[a, b]$. Пусть $X = L_1[a, b]$. Тогда $x_n \in X$ сходится слабо к $x \in X$ тогда и только тогда, когда:

а) x_n ограничена по норме;

б) $\int\limits_{\alpha}^{\beta} x_n(t)\,dt \to \int\limits_{\alpha}^{\beta} x(t)\,dt$ для любого измеримого по Лебегу множества $A \subseteq [a, b]$.

10 Покажите, что из равномерной сходимости операторов следует операторно сильная, а из операторно сильной следует операторно слабая.

11 Покажите, что из слабой сходимости в $B(X, Y)$ следует операторно слабая сходимость.

12 Покажите, что операторно слабая сходимость в пространстве $X' = B(X, F)$ эквивалентна $*$-слабой сходимости функционалов и, соответственно, эквивалентна операторно сильной сходимости.

13 На примере пространства $X' = B(X, F)$ покажите, что операторно слабая сходимость вообще говоря не эквивалентна слабой сходимости.

Домашнее задание

1 Докажите, что в гильбертовом пространстве $x_n \to x$ по норме тогда и только тогда, когда $\|x_k\| \to \|x\|$ и $x_n \to x$ слабо.

2 Докажите, что из слабой сходимости в $L_p[a, b]$, $1 \le p < \infty$ в общем случае не следует сходимость по мере. Указание. Рассмотрите последовательность функций Радемахера.

3 Докажите единственность слабого (*-слабого) предела.

4 Исследуйте на слабую и сильную сходимость в $C[0, 1]$:

а) $x_n(\mathrm{t}) = t^n - t^{2n}$;

б) $x_n(\mathrm{t}) = n^2 t I_{[0,n^{-1}]}(t) + (2n - n^2 t) I_{[n^{-1},2n^{-1}]}$;

в) $x_n(t) = e^{-tn^{-2}}$; $x_n(t) = \dfrac{nt}{1+n^2t^2}$.

5 Пусть $x_n, x \in X$ и $f_n, f \in X'$. Верно ли, что $f_n(x_n) \to f(x)$ при $n \to \infty$, если выполнено одно из условий:

а) $x_n \to x$ по норме и $f_n \to f$ по норме;

б) $x_n \to x$ слабо и $f_n \to f$ по норме;

в) $x_n \to x$ по норме и $f_n \to f$ *-слабо.

6 Покажите, что гильбертово сопряжение непрерывно относительно взятия операторного слабого предела.

7 Покажите, что операторно слабый предел самосопряженных операторов является самосопряженным оператором.

8 Покажите, что сильный предел унитарных операторов является унитарным оператором. Верно ли утверждение для слабого предела?

9 Покажите, что если слабый предел унитарных операторов является унитарным оператором, то он является и сильным пределом.

8 Практическое занятие № 8. Линейные операторы. Компактные операторы

Вопросы к практическому занятию

1 Определение и примеры линейных операторов.
2 Непрерывность и ограниченность.
3 Сумма и произведение операторов.
4 Обратный оператор, обратимость.
5 Сопряженный оператор в евклидовом пространстве.
6 Самосопряженные операторы.
7 Спектр оператора. Резольвента.
8 Определение и примеры компактных операторов.
9 Основные свойства компактных операторов.
10 Собственные значения компактного оператора.
11 Компактные операторы в гильбертовом пространстве.
12 Самосопряженные компактные операторы в H.

Задачи для самостоятельной работы

1 Покажите, что компактность и секвенциальная компактность влекут счетную компактность.

2 Докажите, что вполне ограниченное множество ограничено; объединение конечного числа вполне ограниченных множеств вполне ограничено; пересечение вполне ограниченных множеств вполне ограничено; замыкание вполне ограниченного множества вполне ограничено; подмножество вполне ограниченного множества вполне ограничено.

3 Пусть X – подмножество метрического пространства такое, что для некоторого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть. Покажите, что для X найдется конечная 2ε-сеть, состоящая из точек самого множества X.

4 Покажите, что гильбертов кирпич $K = \{x \in 2': |x_k| \leq 2 - k\}$ является компактным множеством в $2'$. Указание. Используйте тот факт, что конечномерный кирпич

$$K = \left\{ x \in l_2 : \left| x_k \right| \leq 2^{-k} \right\}$$

является компактным в l_2 множеством.

5 Покажите несколькими способами, что единичная сфера в l_2 не является компактным множеством. Указание. Используя орты, покажите, что: а) найдется последовательность на единичное сфере, из которой нельзя извлечь сходящуюся подпоследовательность; б) найдется $\varepsilon > 0$, для которого не существует конечной ε-сети для единичной сферы.

6 Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство и $\{e_n\}_{n\geq 1}$ – ортонормированный базис в нем. Покажите, что множество $M \subset H$ относительно компактно в H тогда и только тогда, когда

а) M ограничено;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in M}\left(\sum\limits_{k=n}^{\infty}\left|\left(x,e_k\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=0$.

7 Покажите, что $K(X, Y) \subseteq B(X, Y)$, т. е. всякий компактный оператор ограничен.

8 Пусть X – бесконечномерное банахово пространство. Покажите, что тождественный оператор I не компактен. Указание. Воспользуйтесь теоремой Рисса о компактности единичного шара.

9 Покажите, что $K(X, Y)$ – замкнутое подпространство в $B(X, Y)$, т. е.:

а) если $A, B \in K(X, Y)$, то $\alpha A + \beta B \in K(X, Y)$;

б) если $A_n \in K(X, Y)$ и $\|A_n - A\| \to 0$, то $A \in K(X, Y)$.

10 Покажите, что композиция компактного оператора и ограниченного является компактным оператором. То есть если $A \in K(X, Y)$ и $B \in B(Z, X)$, $C \in B(Y, Z)$, то $AB \in K(Z, Y)$, $CA \in K(X, Z)$.

11 Пусть X – бесконечномерное банахово пространство и $A \in K(X)$. Покажите, что если A инъективен, то его обратный A^{-1} не ограничен.

12 Пусть $a \in l_\infty$. Покажите, что мультипликативный оператор M_a: $l_2 \to l_2$ компактен тогда и только тогда, когда $a \in c_0$. Указание. Используйте, что предел компактных операторов снова компактный оператор.

13 Пусть $a \in C[0, 1]$. Исследуйте на компактность оператор умножения M_a: $C[0, 1] \to C[0, 1]$.

Домашнее задание

1 Покажите, что замкнутое подмножество компактного множества само компактно.

2 Исследуйте на предкомпактность в $C[0, 1]$ единичный шар $B_{C^1[0,1]}$ пространства $C^1[0, 1]$.

3 Покажите, что множество M предкомпактно в $C^1[0, 1]$ тогда и только тогда, когда:

а) M ограничено;

б) множество $M' = \{ f' : f \in M\}$ равностепенно непрерывно.

4 Пусть $A \in K(X)$ и $\lambda \neq 0$. Покажите, что $\dim \ker(\lambda I - A) < \infty$. Указание. Рассмотрите сужение A на указанное ядро.

5 Покажите, что изометрическое вложение в бесконечномерное банахово пространство не может быть компактным.

6 Пусть X, Y – банаховы пространства, причем X рефлексивно, и $A \in B(X, Y)$. Предположим, что A переводит всякую слабо сходящуюся в X последовательность в сходящуюся по норме в Y. Покажите, что тогда A компактен. Указание. Воспользуйтесь теоремой Какутани о слабой компактности шара B_X и теоремой Эберлейна – Шмульяна о совпадении трех видов компактности в слабой топологии.

7 Пусть $A \in B(X, l_1)$, где X рефлексивно. Покажите, что A компактен. Указание. Воспользуйтесь теоремой Шура.

8 Пусть $A \in B(c_0, X)$, где X рефлексивно. Покажите, что A компактен. Указание. Воспользуйтесь теоремой Шаудера и теоремой Петтиса.

9 Используя теорему Шаудера к операторам из теоремы Питта, опишите возникающие компактные операторы.

9 Практическое занятие № 9. Мера плоских множеств. Общее понятие меры. Продолжение меры с полукольца на кольцо. Аддитивность и σ-аддитивность. Определение меры. Продолжение меры с полукольца на порожденное им кольцо

Вопросы к практическому занятию

1 Мера плоских множеств.
2 Мера элементарных множеств.
3 Лебегова мера плоских множеств.
4 Общее понятие меры.
5 Продолжение меры с полукольца на кольцо.
6 Аддитивность и σ-аддитивность.
7 Продолжение меры с полукольца на порожденное им кольцо.

Задачи для самостоятельной работы

1 Пусть на числовой прямой задана неубывающая, непрерывная слева функция $g(x)$. Для множества $A = [a, b)$, где $a \leq b$, положим $m(A) = g(b) - g(a)$. Докажите σ-аддитивность функции $m(A)$ на полукольце S, образованном полуинтервалами $[a, b)$.

2 По заданной на полукольце S, образованном полуинтервалами $[a, b)$, конечно-аддитивной мере m постройте неубывающую, непрерывную слева функцию $g(x)$ такую, что $m([a, b)) = g(b) - g(a)$ при $a \leq b$.

3 Покажите, что борелевская σ-алгебра на числовой прямой $B(R)$ совпадает с σ-алгеброй, порождённой множествами вида $[a, b)$ $(a, b \in R)$.

4 Обозначим через $X = \{a, b, c\}$ множество, состоящее из трёх элементов, и через $T(X)$ – множество всех подмножеств множества X:

а) приведите пример полукольца, состоящего из элементов $T(X)$, не являющегося кольцом;

б) опишите полукольца, которые можно построить из элементов $T(X)$;

в) опишите кольца и алгебры, которые можно построить из элементов $T(X)$.

5 Пусть m – конечно-аддитивная мера, определённая на кольце множеств E. Докажите, что для любых $A, B \in E$

$$m(A \bigcup B) + m(A \bigcap B) = m(A) + m(B).$$

6 Множество тех элементов из кольца E, на которых конечно-аддитивная мера m принимает конечные значения, образует кольцо.

7 Пусть m – конечно-аддитивная мера, определённая на кольце E. Докажите, что:

а) если $A, B \in E$ и $A \subseteq B$, то $m(A) \le m(B)$;

б) если $A, B \in E$ и $m(A \triangle B) = 0$, то $m(A) = m(B)$.

8 Докажите, что множество тех элементов из E, на которых m обращается в нуль, образует кольцо.

9 Пусть m – конечно-аддитивная мера, определённая на системе множеств T. Докажите, что следующие условия эквивалентны если T – кольцо и могут быть не эквивалентны, если T – полукольцо:

а) m обладает свойством σ-аддитивность;

б) m полунепрерывна сверху, т. е. если $A_i \in T$ – убывающая последовательность множеств такая, что

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \ \ (A \in T), \text{ то } m(A) = \lim m(A_i);$$

в) полунепрерывна снизу, т. е. если $A_i \in T$ – возрастающая последовательность множеств такая, что

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \ \ (A \in T), \text{ то } m(A) = \lim m(A_i);$$

4) m непрерывна, т. е. если для последовательности $\{A_i\}$ определён $\lim A_i$, то $m(\lim A_i) = \lim m(A_i)$.

Домашнее задание

1 Пусть мера μ_F порождена функцией $F(x)$. Найдите $\mu_F(A)$, где A – произвольное измеримое множество, если:

а) $F(x) = \begin{cases} -2, -\infty < x \le e, \\ 3, \quad e < x < +\infty; \end{cases}$

б) $F(x) = \begin{cases} 0, -\infty < x \le 1, \\ 2, \quad 1 < x \le 3, \\ 3, \quad 3 < x < +\infty; \end{cases}$

в) $F(x)=\begin{cases}1, & -\infty < x \le 0,\\ -\left[-e^{x}\right], & 0 < x \le 1,\\ 3, & 1 < x < +\infty.\end{cases}$

2 Докажите, что последовательность измеримых функций $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ сходится по мере Лебега на измеримом множестве A. Найдите этот предел:

а) $f_n(x)=x^n$, $A=[0,1]$;

б) $f_n(x)=\chi_{\left(\sqrt{n},\,\sqrt{n+1}\right)}(x)$, $A=R$;

в) $f_n(x)=\chi_{\left(\frac{1}{2^{n+1}},\,\frac{1}{2^n}\right)}(x)$, $A=[0,1]$.

3 Будет ли измерима функция $f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}$ на $(0;1)$?

4 Докажите, что две непрерывные функции на отрезке $[0;1]$ эквивалентны (по мере Лебега) тогда и только тогда, тогда они тождественно равны.

5 Найдите меру Лебега множества точек разрыва и выясните, измерима ли функция $f(x)=\begin{cases}x^2, \ x\in K;\\ \sin x, \ x\notin K.\end{cases}$

10 Практическое занятие № 10. Определение и основные свойства измеримых функций. Действия над измеримыми функциями. Эквивалентность. Сходимость почти всюду. Теорема Егорова. Сходимость по мере

Вопросы к практическому занятию

1 Определение и основные свойства измеримых функций.
2 Действия над измеримыми функциями.
3 Эквивалентность.
4 Сходимость почти всюду.
5 Теорема Егорова.
6 Сходимость по мере.
7 Теорема Лузина.
8 *C*-свойство.

Задачи для самостоятельной работы

1 Пусть f: $E \to F$, T_E – кольцо на E. Покажите, что $f(T_E)$ – не обязательно кольцо.

2 Пусть f: $E \to F$, T_F – σ-алгебра на F. Покажите, что $f^{-1}(T_F)$ – также σ-алгебра.

3 Пусть $\{f_n\} \subseteq M(E, A)$ и $f(x) = \sup_n f_n(x) < +\infty$. Покажите, что $f \in M(E, A)$.

4 Пусть $f^3(x) \in M(E, A)$. Тогда $f \in M(E, A)$.

5 Пусть f, $g \in M(E, A)$, $m(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. Покажите, что m, $M \in M(E, A)$.

6 Пусть f: $R \to R$ непрерывна. Покажите, что $f \in M(R, B(R))$.

7 Пусть $f, g \in M(E, A)$. Покажите, что $\{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\} \in A$.

8 Пусть $f \in M(E, A)$. Покажите, что тогда $|f| \in M(E, A)$, но обратное утверждение неверно.

9 Пусть $f \in M(E, A)$, $a, b \in R$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} a, & f(x) < a; \\ f(x), & a \le x \le b; \\ b, & f(x) > b. \end{cases}$$

Покажите, что $\varphi \in M(E, A)$.

10 Пусть f: $R^2 \to R$; h_1, $h_2 \in M(E, A)$. Рассмотрим $\varphi(x) = f(h_1(x), h_2(x))$ $(x \in E)$. Тогда $\varphi \in M(E, A)$.

11 Пусть $f_n \in M(E, A)$. Определите, при каких условиях измеримы функции:

а) $g_1(x) = \sup_n f_n(x)$ $(x \in E)$;

б) $g_2(x) = \inf_n f_n(x)$ $(x \in E)$;

в) $g_3(x) = \lim_n f_n(x)$ $(x \in E)$;

г) $g_4(x) = \lim_n f_n(x)$ $(x \in E)$.

12 Пусть $f \in M(E, A)$ и для любого $x \in E$: $f(x) \neq 0$. Тогда $1/f \in M(E, A)$.

13 Пусть f: $R \to R$ – произвольная функция. Покажите, что $f\chi_Q$ измерима по Борелю.

14 Пусть $f(x)$ $(0 < x < 1)$ дифференцируема на $(0, 1)$. Покажите, что $f'(x)$ измерима по Борелю на $(0, 1)$.

15 Пусть $f_n(x) = \dfrac{n \sin x}{1 + n^2 \sin^2 x}$ $(0 \le x \le \pi)$. Укажите функцию f и множество $X \in A$ такие, что $\mu X < \delta$ и $f_n\chi_{X^c} \rightrightarrows f\chi_{X^c}$.

16 Пусть $f_n \to$ п.в.$\to f$, $f_n \to$ п.в.$\to g$. Покажите, что тогда $f \sim g$.

17 Пусть $f_n \to$ п.в.$\to f$, $f \sim g$. Покажите, что тогда $f_n \to$ п.в.$\to g$.

Домашнее задание

1 Пусть $\{f_n\}$ – последовательность измеримых функций. Покажите, что

$$f_n \to \mu \to f, f_n \to \mu \to g \Longleftrightarrow f \sim g.$$

2 Если $f_n \to \mu \to f$ и $g_n \to \mu \to g$, то $f_n + g_n \to \mu \to f + g$.

3 Пусть $\mu E < +\infty$. Покажите, что

$$f_n \to \text{п.в.} \to f \Longleftrightarrow \sup_{m>n} |f_m - f| \to \mu \to 0.$$

4 Пусть $f_n \to \mu \to f$, $f \sim g$. Покажите, что тогда $f_n \to \mu \to g$.

5 Пусть $f_n \to \mu \to f$, $f_n(x) \le \alpha$ $(x \in E)$. Покажите, что $f(x) \le \alpha$ п. в. на E.

11 Практическое занятие № 11. Лебегово продолжение меры, определенной на полукольце с единицей. Продолжение меры, заданной на полукольце без единицы. Расширение понятия измеримости в случае σ-конечной меры. Продолжение меры по Жордану. Однозначность продолжения меры

Вопросы к практическому занятию

1 Лебегово продолжение меры.
2 Лебегово продолжение меры, определенной на полукольце с единицей.
3 Продолжение меры, заданной на полукольце без единицы.
4 Расширение понятия измеримости в случае σ-конечной меры.
5 Продолжение меры по Жордану.
6 Однозначность продолжения меры.

Задачи для самостоятельной работы

1 Докажите, что для $A \subseteq B$: $\mu(A) \le \mu(B)$.

2 Докажите, что для произвольных множеств A, B:

а) $\mu(A \cup B) \le \mu(A) + \mu(B)$;

б) $|\mu(A) - \mu(B)| \le \mu(A \triangle B)$;

в) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \le \mu(A) + \mu(B)$.

3 Докажите, что внешняя мера, вообще говоря, не аддитивна.

4 Докажите, что для произвольного множества A и произвольного $\varepsilon > 0$ можно указать такую последовательность попарно непересекающихся множеств A_1, A_2, … из S,

$$A \subseteq \sum_i A_i \text{ и } \mu(A) > A \subseteq \sum_i \mu\left(A_i\right) - \varepsilon.$$

5 Пусть $F = \chi(0,+\infty)$. Покажите, что :

а) $\mu_F\{0\} = 1$;

б) L_F совпадает с семейством всех подмножеств R;

в) для любого $X \subseteq R$

$$\mu_F X = \begin{cases} 1, & 0 \in X, \\ 0, & 0 \notin X. \end{cases}$$

6 Покажите, что порождаемая $F \in S$ функция

$$m_F\,[a, b) = F(b) - F(a), \;\; (a < b \in R)$$

является σ-аддитивной.

7 Докажите, что последовательность измеримых функций $\left(f_n\left(x\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ сходится по мере Лебега на измеримом множестве A. Найдите этот предел:

а) $f_n\left(x\right) = x^n$, $A = \left[0, 1\right]$;

б) $f_n\left(x\right) = \chi_{\left(\sqrt{n},\, \sqrt{n+1}\right)}\left(x\right)$, $A = R$;

в) $f_n(x)=\chi_{\left(\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right)}(x),\ A=[0,1]$.

8 Найдите такую непрерывную на R функцию $g(x)$, что $g(x)=f(x)$ почти всюду относительно меры Лебега μ:

а) $f(x)=\begin{cases}\sin x,\ x\in Q\\ 0,\ x\notin R\setminus Q\end{cases}$;

б) $f(x)=\begin{cases}arctgx,\ x\in Z\\ 0,\ x\in R\setminus Z\end{cases}$;

в) $f(x)=\begin{cases}\ln\left(1+|x|\right),\ e^x\in R\setminus Q\\ \sin x^3,\ e^x\in Q\end{cases}$;

г) $f(x)=\begin{cases}\arcsin 2^{-|x|},\ x\in R\setminus N\\ 2^{|x|},\ x\in N\end{cases}$.

9 Пусть $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ – последовательность функций, заданных на R. Определите такую непрерывную на R функцию, что $f_n(x)\xrightarrow{п.в.}g(x)$ относительно меры Лебега:

а) $f_n(x)=\cos^n x,\ x\in R$;

б) $f_n(x)=\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arcctg} x\right)^n+\sin^n 2x,\ x\in R$;

в) $f_n(x)=x^2\sin^n x^2,\ x\in R$.

10 Докажите, что множество A измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $B\in S$, что $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$.

11 Пусть S – полукольцо, порождённое отрезками на R, m – мера на S, определяемая как длина отрезка. Докажите, что все ограниченные замкнутые множества на прямой R измеримы по Лебегу относительно S и m.

Домашнее задание

1 Докажите, что две непрерывные функции на отрезке $[0;1]$ эквивалентны (по мере Лебега) тогда и только тогда, тогда они тождественно равны.

2 Найдите меру Лебега множества точек разрыва и выяснить, измерима ли функция $f(x)=\begin{cases}x^2,\ x\in K;\\ \sin x,\ x\notin K.\end{cases}$

3 Докажите, что последовательность измеримых функций $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ сходится по мере Лебега на измеримом множестве A. Найдите этот предел:

а) $f_n(x)=\chi_{\left(\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\right)}(x),\ A=[0,1]$;

б) $f_n(x)=2-\chi_{(\ln x,\,\ln(n+1))}(x),\ A=R$.

4 Будет ли измерима функция $f(x)=\begin{cases}n,\ x=\dfrac{m}{n}\in Q,\ (m,n)=1\\ 1,\ x\in R\setminus Q\end{cases}$ на R?

5 Найдите меру Лебега множества точек разрыва и выясните, измерима ли

функция $f(x)=\begin{cases} e^x, x\in Q; \\ \cos x, x\notin Q. \end{cases}$

6 Найдите такую непрерывную на R функцию $g(x)$, что $g(x)=f(x)$ почти всюду относительно меры Лебега μ:

а) $f(x)=\begin{cases} x^2, x^2\in Q \\ 0, x^2\in R\setminus Q \end{cases}$; б) $f(x)=\begin{cases} (\cos x)^{\sin x}, e^x\in R\setminus Z \\ 2^{|x|}, e^x\in Z \end{cases}$.

7 Пусть $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ – последовательность функций, заданных на R. Определите такую непрерывную на R функцию, что $f_n(x)\xrightarrow{п.в.}g(x)$ относительно меры Лебега:

а) $f_n(x)=\cos^n\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$, $f_n(0)=0$; б) $f_n(x)=e^{-n\left|x^2-1\right|}$, $x\in R$.

12 Практическое занятие № 12. Интеграл Лебега. Простые функции. Интеграл Лебега для простых функций. Общее определение интеграла Лебега на множестве конечной меры. σ-аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана

Вопросы к практическому занятию

1 Интеграл Лебега.
2 Простые функции.
3 Интеграл Лебега для простых функций.
4 Общее определение интеграла Лебега на множестве конечной меры.
5 σ-аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега.
6 Предельный переход под знаком интеграла Лебега.
7 Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры.
8 Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана.

Задачи для самостоятельной работы

1 Определите, существует ли интеграл Лебега по E = [0, 1] от функции

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=0;\\ \sin\dfrac{1}{x}, & x\neq\dfrac{1}{\pi n};\\ -1, & x\neq\dfrac{1}{\pi n}.\end{cases}$$

2 Вычислите интеграл Лебега по E = [0, 1] от функции

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in Q^c\bigcap\left(\dfrac{1}{3},\ 1\right);\\ x^3, & x\in Q^c\bigcap\left(0,\ \dfrac{1}{3}\right);\\ 0, & x\in Q^c\bigcap[0,\ 1].\end{cases}$$

3 Вычислите интеграл Лебега по E = (1, 2) от функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$.

4 Докажите, что функция $f(x)=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ не является интегрируемой по Лебегу на E = (0, 1).

5 Найдите, при каких положительных α, β будет интегрируемой по Лебегу на E = [0, 1] функция $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x^{-\beta}}{x^{\alpha}}, & x\neq 0;\\ 1, & x=0.\end{cases}$

6 При каких неотрицательных значениях α и β будет интегрируемой по Лебегу на E = [0, 1] функция $f(x)=x^{\alpha}\sin\left(x^{-\beta}\right)$?

7 Пусть $f\in M(E, A)$ – ограниченная и неотрицательная функция $A=\{x\in E \mid f(x)>c\}$ для $c\in R$. Покажите, что $\int df\mu\geq c\mu A$.

8 Пусть f – непрерывная функция на числовой прямой, g – неограниченная функция, интегрируемая по Лебегу на некотором подмножестве числовой прямой R, имеющем конечную меру. Будет ли функция $F(x)=(f\circ g)(x)$ интегрируема по Лебегу на множестве R?

9 Пусть f – ограниченная измеримая по Лебегу на E функция. Определите, будут ли интегрируемы по Лебегу на E функции $f^{10}(x)$, $|f(x)|$, $1/f(x)$.

10 Пусть $\{f_n\}$ – последовательность ограниченных измеримых неотрицательных функций такая, что $\int f_n d\mu\to 0$. Следует ли отсюда, что $f_n(x)\to 0$ всюду или почти всюду?

11 Пусть $\{f_n\}$ – последовательность ограниченных неотрицательных интегрируемых функций. Можно ли утверждать, что из $f_n(x)$ →п.в.→ 0 следует $\int f_n d\mu\to 0$?

13 Приведите пример ограниченной функции, разрывной в каждой точке отрезка $[a,\ b]$ и интегрируемой по Лебегу. Будет ли она интегрируема по Риману?

14 Проверьте, является ли интегрируемой по Риману и по Лебегу на отрезке [0, 1] функция

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & x\notin Q\bigcap[0,\ 1]; \\ 1, & x\in Q\bigcap[0,\ 1]. \end{cases}$$

Если это так, вычислите интеграл.

15 Проверьте, является ли интегрируемой по Риману и по Лебегу на отрезке [0, 1] функция

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\notin Q\bigcap[0,\ 1]; \\ -x, & x\in Q\bigcap[0,\ 1]. \end{cases}$$

Если это так, вычислите интеграл.

Домашнее задание

1 Определите, существует ли интеграл Лебега на $E = (0, 1)$ от функции

$$f(x)=\frac{1}{x(x-1)}.$$

2 Вычислите интеграл Лебега на множестве $(0;+\infty)$ для функций:

а) $f(x)=e^{-[x]}$;

б) $f(x)=\dfrac{[x]}{[x+2]}$;

в) $f(x)=\dfrac{[x+2]}{[x+1]}$.

3 Вычислите интеграл Лебега $\int\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} f(x)\,d\mu x$, если:

а) $f_n(x)=\begin{cases} \sin x, & x\in Q; \\ \cos x, & x\notin Q; \end{cases}$

б) $f_n(x)=\begin{cases} \sin x, & \cos x\in Q; \\ \sin^2 x, & \cos x\notin Q. \end{cases}$

4 Пусть функция f интегрируема по Лебегу на множестве конечной меры E. Следует ли отсюда, что f эквивалентна на E некоторой ограниченной функции?

5 Постройте последовательность неотрицательных функций $\{f_n(x)\}$, заданных на множестве E, такую, что $f_n \to\mu\to 0$, но $\int f_n(x)\,d\mu$ не стремиться к 0.

13 Практическое занятие № 13. Произведения систем множеств. Произведения мер. Выражение плоской меры через интеграл линейной меры сечений и геометрическое определение интеграла Лебега. Теорема Фубини

Вопросы к практическому занятию

1 Произведения систем множеств.

2 Произведения мер.

3 Выражение плоской меры через интеграл линейной меры сечений и геометрическое определение интеграла Лебега.

4 Теорема Фубини.

Задачи для самостоятельной работы

1 Найдите прямое произведение систем множеств $X=\{-1,0,1,2\}$ и $Y=\{-2,0,2,4\}$.

2 Для $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $E = \{\{2\}, \{2, 4\}\}$ постройте σ-алгебру $B(E)$.

3 Задано пространство с мерой (M, A, μ):

а) докажите, что $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$, если $\mu(A \cap B) < +\infty$;

б) укажите, при каких условиях верно равенство $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.

4 Пусть (X, A, μ) и (Y, B, ν) – пространства с мерами, $\eta = \mu \times \nu$, $A, B \in A$ и $C, D \in B$. Выразите через значения мер μ и ν:

а) $\eta((A \times C) \cap (B \times D))$; б) $\eta((A \times C) \cup (B \times D))$,

в случае конечных значений мер всех сомножителей.

5 Постройте функцию $f(x, y) \notin L(0, 1)^2$ такую, что:

а) $\forall\, x \in (0, 1)\ \exists \int_{(0,1)} f(x,y)\,d\mu_2 = 0$;

б) $\forall\, y \in (0, 1)\ \exists \int_{(0,1)} f(x,y)\,d\mu_1 = 0$.

6 Постройте на $(0, 1)^2$ $f(x, y)$ такую, что:

а) $\int_{(0,1)} \left(\int_{(0,1)} f(x,y)\,d\mu_2 \right) d\mu_1 = 0$;

б) $\int_{(0,1)} \left(\int_{(0,1)} f(x,y)\,d\mu_2 \right) d\mu_1 = 1$.

7 Найдите интеграл $\int\limits_{[-1,1]\times[0,2]} \left(x^2 - y\right) d\mu_L(x)$.

Домашнее задание

1 Найдите прямой произведение систем множеств $X=\{1,2,3\}$ и $Y=\{0,2\}$.

2 Для $M = \{0, 1, 2, 3\}$ и $E = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ постройте σ-алгебру $B(E)$.

3 Постройте функцию $f(x, y) \notin L(0, 1)^2$ такую, что:

а) $\forall\, x \in (0,\, 1)\quad \exists\int_{(0,1)} f(x,y)\,d\mu_2 = 1$;

б) $\forall\, y \in (0,\, 1)\quad \exists\int_{(0,1)} f(x,y)\,d\mu_1 = 1$.

4 Постройте на $(0,\, 1)^2$ $f(x,\, y)$ такую, что:

а) $\int_{(0,1)}\left(\int_{(0,1)} f(x,y)\,d\mu_1\right)d\mu_2 = 0$;

б) $\int_{(0,1)}\left(\int_{(0,1)} f(x,y)\,d\mu_1\right)d\mu_2 = 1$.

5 Найдите интеграл $\int\limits_{[0,1]\times[-1,1]} (x-y)\,d\mu_L(x)$.

14 Практическое занятие № 14. Пространство L_1. Определение и основные свойства пространства L_1. Всюду плотные множества в L_1. Пространство L_2. Определение и основные свойства. Случай бесконечной меры. Всюду плотные множества в L_2. Теорема об изоморфизме. Комплексное пространство L_2. Сходимость в среднем квадратичном и ее связь с другими типами сходимости функциональных последовательностей

Вопросы к практическому занятию

1 Определение и основные свойства пространства L_1.
2 Всюду плотные множества в L_1.
3 Пространство L_2. Определение и основные свойства.
4 Случай бесконечной меры.
5 Всюду плотные множества в L_2.
6 Теорема об изоморфизме.
7 Комплексное пространство L_2.
8 Сходимость в среднем квадратичном и ее связь с другими типами сходимости функциональных последовательностей.
9 Ортогональные системы функций в L_2.
10 Ряды по ортогональным системам.
11 Тригонометрическая система.
12 Тригонометрический ряд Фурье.
13 Тригонометрические системы на отрезке $[0;\,\pi]$.
14 Ряд Фурье в комплексной форме.
15 Многочлены Лежандра.
16 Ортогональные системы в произведениях.
17 Кратные ряды Фурье.
18 Многочлены, ортогональные относительно данного веса.

19 Ортогональный базис в пространствах $L_2\left(-\infty;\infty\right)$ и $L_2\left(0;\infty\right)$.

20 Ортогональные многочлены с дискретным весом.

21 Системы Хаара и Радемахера – Уолша.

Задачи для самостоятельной работы

1 Для функции e^t найдите многочлены $p_n\left(t\right)$ степени $n=0,1,2$, такие, что норма $\left\|t^3-p_n\left(t\right)\right\|$ минимальна в $L_2\left(-1,1\right)$.

2 Докажите, что многочлен Лежандра образуют ортонормальный базис в $L_2\left(-1,1\right)$.

3 Проверьте, что функции $\left\{\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin nt\right\}$ образуют ортонормальны базис в $L_2\left(-\pi,\pi\right)$, но в то же время это только ортогональная система в $L_2\left(-\pi,\pi\right)$, не являющаяся базисом.

4 Докажите, что система функций $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}},\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ n\in\mathbb{N}$ ортонормирована в пространстве $L_2\left[-\pi,\pi\right]$.

5 Докажите, что система функций 1, $\cos mx$, $\sin mx$, $\cos ny$, $\sin ny$, $\cos mx\cos ny$, $\sin mx\cos ny$, $\cos mx\sin ny$, $\sin mx\sin ny$, $\left(m,n\in N\right)$ образует ортогональную систему в пространстве $L_2\left(\left[-\pi,\pi\right]\times\left[-\pi,\pi\right]\right)$.

6 Разложите в двойной ряд Фурье функцию $f\left(x,y\right)=xy$ в пространстве $L_2\left(\left[-\pi,\pi\right]\times\left[-\pi,\pi\right]\right)$.

7 Что можно сказать о коэффициентах Фурье функции $f\left(x\right)\in L_2\left[0,1\right]$, если известно, что $f\left(x\right)=f\left(1-x\right)$?

8 Выразите в терминах коэффициентов Фурье следующие свойства функций $f\left(x\right)\in L_2\left[0,1\right]$:

а) $f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=f\left(x\right)$; б) $f\left(x+\dfrac{1}{k}\right)=\lambda f\left(x\right)$.

9 При каких $k\in Z$ существуют ненулевые функции, обладающие этим свойством?

10 Найдите суммы рядов:

а) $1-\dfrac{\cos 2x}{2!}+\dfrac{\cos 4x}{4!}-\ldots$; б) $\dfrac{\sin x}{1\cdot 2}-\dfrac{\sin 2x}{2\cdot 3}+\dfrac{\sin 3x}{3\cdot 4}-\ldots$.

Домашнее задание

1 Проверьте, что функции $\left\{\frac{1}{\sqrt{\beta-\alpha}}\exp\left(2\pi in\frac{t-\alpha}{\beta-\alpha}\right)\right\}$ образуют ортонормальный базис в $L_2(\alpha,\beta)$.

2 Докажите, что система функций $1, \sin\frac{2\pi n(t-a)}{b-a}, \cos\frac{2\pi n(t-a)}{b-a}$, $n\in N$ ортогональна в пространстве $H^1[a,b]$.

3 Разложите в двойной ряд Фурье функцию $f(x,y)=xy$ в пространстве $L_2([0,2\pi]\times[0,2\pi])$.

4 Что можно сказать о коэффициентах Фурье функции $f(x)\in L_2[0,1]$, если известно, что $f(x)=-f(1-x)$?

5 Найдите сумму ряда $\frac{2\cos 2x}{3}-\frac{3\cos 3x}{8}+\ldots+\frac{(-1)^n n\cos nx}{n^2-1}+\ldots$.

15 Практическое занятие № 15. Сильный дифференциал (дифференциал Фреше). Слабый дифференциал (дифференциал Гато). Формула конечных приращений. Связь между слабой и сильной дифференцируемостью. Дифференцируемые функционалы. Абстрактные функции. Интеграл. Производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора

Вопросы к практическому занятию

1 Дифференцирование в линейных пространствах.
2 Сильный дифференциал (дифференциал Фреше).
3 Слабый дифференциал (дифференциал Гато).
4 Формула конечных приращений.
5 Связь между слабой и сильной дифференцируемостью.
6 Дифференцируемые функционалы.
7 Абстрактные функции.
8 Производные высших порядков.
9 Дифференциалы высших порядков.
10 Формула Тейлора.
11 Теорема о неявной функции и некоторые ее применения.
12 Теорема о неявной функции.
13 Теорема о зависимости решения дифференциального уравнения от начальных данных.

14 Касательные многообразия.
15 Теорема Люстерника.

Задачи для самостоятельной работы

1 Докажите, что если отображение дифференцируемо по Фреше в точке, то оно дифференцируемо по Гато в этой точке (и производные совпадают).

2 Докажите, что если отображение F дифференцируемо поФреше в точке x, то оно непрерывно в этой точке. Приведите пример отображения, дифференцируемого по Гато в точке своего разрыва.

3 Пусть отображение $F\colon X \to Y$ дифференцируемо по Гато в каждой точке x из окрестности U точки x_0, и производная $F'(x)$ непрерывна в точке x_0 (т. е. $\|F'(x) - F'(x_0)\| \to 0$ при $x \to x_0$). Докажите, что F дифференцируемо по Фреше в точке x_0.

4 Исследуйте отображение $F : x(t) \mapsto \sin x(t)$ в действительном пространстве $C[0,1]$ на дифференцируемость по Фреше и по Гато и найдите производную.

5 Докажите, что из сходимости по норме следует слабая сходимость. Привести пример последовательности в банаховом пространстве, сходящейся слабо, но не сходящейся по норме.

6 Пусть $x_n \to x$, $y_n \to y$, $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$, где $\{x_n\}$, x, $\{y_n\}$ и y – векторы нормированного пространства X, а $\{\alpha_n\}$, α, $\{\beta_n\}$, β – комплексные числа. Докажите, что $\alpha_n x_n + \beta_n y_n \to \alpha x + \beta y$. Докажите, что если $x_n \to x$ и $x_n \to x'$, то $x = x'$.

7 Докажите критерий слабой сходимости в пространстве $W_2^1[0,1]$: последовательность $\{x_n\}_1^\infty$ слабо сходится к x тогда и только тогда, когда выполнены два условия:

а) существует такое число C, что $\|x_n\| < C$ для всех $n \in \mathbf{N}$;
б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$ для любого $t \in [0, 1]$.

8 Докажите, что в конечномерном нормированном пространстве слабая сходимость совпадает со сходимостью по норме.

9 Проверьте дифференцируемость отображения $f : R^n \to R^1, f(x) = \|x\|_n^2$. Докажите, что $f'(x)(\cdot) = 2\langle x, \cdot\rangle$ (воспользоваться тем, что $\|x\|_n^2 = \langle x, x\rangle$).

10 Вычислите сильную производную отображения $f : R^3 \to R^1$ функции $f(x) = (x_1 + x_2^2 + x_3^2)$ в точке $x_0(1;1;1)$ и соответствующий сильный дифференциал при приращении $h = (1;2;3)$.

11 Вычислите сильную производную отображения $f : R^1 \to R^3$ функции $f(x) = (\cos \pi x, \sin \pi x, x)$ в точке $x_0 = 3$ и соответствующий сильный дифференциал при приращении $h = 1$.

12 Пусть $f : R^2 \to R^3$, $f(x) = (x_1 - x_2^2, 3x_1x_2, x_2 - x_1^2)$. Найдите $f'(2,3)$.

Домашнее задание

1 Докажите, что в пространстве l_1 нет подпространств, изоморфных пространству l_2.

2 Докажите критерий слабой сходимости в $C[0,1]$: последовательность $x_n = x_n(t)$ сходится слабо к x тогда и только тогда, когда выполнены два условия:

а) существует такое число C, что $\|x_n\|_{C[0,1]} < C$ для всех $n \in N$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$ для любого $t \in [0, 1]$.

3 Вычислите сильную производную отображения $f: R^2 \to R^3$ функции $f(x) = \left(x_1^3, e^{2x_2}, x_1x_3\right)$ в точке $x_0(0;1;1)$ и соответствующий сильный дифференциал при приращении $h = (1;3;2)$.

4 Вычислите сильную производную отображения $f: R^3 \to R^3$ функции $f(x) = (x_1\sin x_2, x_2\sin x_1, \ln x_3)$ в точке $x_0(0;2;1)$ и соответствующий сильный дифференциал при приращении $h = (3;2;1)$.

5 Пусть $f: R^2 \to R^3$, $f(x) = \left(x_2 - x_1^2, 2x_1x_2, x_1 - x_2^2\right)$. Найдите $f'(3,1)$.

16 Практическое занятие № 16. Экстремальные задачи. Необходимое условие экстремума. Второй дифференциал. Достаточные условия экстремума функционала

Вопросы к практическому занятию

1 Экстремальные задачи.
2 Необходимое условие экстремума.
3 Второй дифференциал.
4 Достаточные условия экстремума функционала.

Задачи для самостоятельной работы

1 Исследуйте на экстремум функцию $f(x, y) = x^2y^2(1 - x - y)$.

2 Исследуйте на экстремум функцию $f(x, y) = 3x + 9y - x^2 - xy - y^2 - 4$.

3 Для функционала $V[y(x)] = \int\limits_0^1 xy^2y'dx$ положите $y(x) = x^2$, $\delta y = x - 2$ и сравните δV с ΔV.

4 Найдите экстремали функционала, содержащего старшие производные: $V[y(x)] = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (y'')^2\,dx$, $y(0) = y(1) = 0$, $y(0)' = 0$, $y(1)' = 1$.

5 Найдите экстремали функционала, зависящего от нескольких функций:

$V\left[y_1(x), y_2(x)\right] = \int\limits_0^3 \sqrt{1+(y_1')^2+(y_2')^2}\,dx$, $y_1(0)=1$, $y_2(0)=-2$, $y_1(3)=7$, $y_2(3)=1$.

6 Найдите экстремали функционала в задаче с подвижными границами: $V\left[y(x)\right] = \int\limits_0^{x_1} (y')^2\,dx$, $y(0)=,$ $y(x_1)=-x_1-1$.

7 Найдите функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, на которых может достигаться экстремум функционала $V\left[y(x)\right]$ в задаче Лагранжа: $V\left[y_1(x), y_2(x)\right] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y_1^2+y_2^2-(y_1')^2-(y_2')^2+\cos x\right)dx$, $y_1(0)=y_2(0)=y_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$, $y_1-y_2-\sin x=0$.

8 Найдите функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче: $V\left[y(x)\right] = \int\limits_0^1 (y')^2\,dx$, $y(0)=0$, $y(1)=1$, $\int\limits_0^1 xy\,dx = 0$.

9 Проверьте выполнение условия Лежандра для экстремали функционала $V\left[y(x)\right] = \int\limits_0^a \left(6(y')^2-(y')^4\right)dx$, проходящей через точки $y(0)=0$, $y(a)=b$, $a>b>0$.

10 Исследуйте на экстремум функционал $V\left[y(x)\right] = \int\limits_0^1 e^x\left(y^2+\frac{1}{2}(y')^2\right)dx$, $y(0)=1$, $y(1)=e$.

11 Найдите методом Ритца приближенное решение задачи об экстремуме функционала $V\left[y(x)\right] = \int\limits_0^1 \left((y')^2+y^2+xy\right)dx$, $y(0)=1$, $y(1)=0$, $n=2$.

Домашнее задание

1 Исследуйте на экстремум функционал

$$V\left[y(x)\right] = \int\limits_0^1 \left(xy+y^2-2y^2y'\right)dx,\ y(0)=1,\ y(1)=2.$$

2 Найдите экстремали функционала

$$V\left[y(x)\right] = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left((y''')^2+y^2-2yx^3\right)dx.$$

3 Напишите уравнение Остроградского для функционала

$$V\left[u(x,y,z)\right]=\iiint\limits_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)+2uf(x,y,z)\right]dxdydz.$$

4 Покажите, что экстремали следующих простейших вариационных задач можно включить в поле экстремалей (собственное или центральное):

$$V\left[y(x)\right]=\int_0^2\left((y')^2+x^2\right)dx,\ y(0)=1,\ y(2)=3.$$

5 Найдите экстремали изопериметрической задачи $V\left[y(x)\right]=\int_{x_0}^{x_1}(y')^2\,dx$ при условии $\int_{x_1}^{x_2}ydx=a$, где a – постоянная.

17 Практическое занятие № 17. Экстремальные задачи с ограничениями. Метод Ньютона

Вопросы к практическому занятию

1 Экстремальные задачи.
2 Экстремальные задачи с ограничениями.
3 Метод Ньютона.

Задачи для самостоятельной работы

1 Найдите решение следующей экстремальной задачи:

а) $\int_0^{T_0}(x')^2\,dt\to extr,\ x(0)=0, x(T_0)=\xi$;

б) $\int_0^{T_0}\left((x')^2-x\right)dt\to extr,\ x(0)=0, x(T_0)=\xi$;

в) $\int_0^{1}\left(t^2x-(x')^2\right)dt\to extr,\ x(0)=0, x(1)=0$;

г) $\int_0^{T_0}(x')^3\,dt\to extr,\ x(0)=0, x(T_0)=\xi$;

д) $\int_0^{T_0}\left((x')^3-x^2\right)dt\to extr,\ x(0)=0, x(T_0)=\xi$.

2 Решите задачу вариационного исчисления:

а) $\int\limits_0^1 (x')^2\,dt \to extr,\ \int\limits_0^1 xe^t dt = 1,\ x(0) = 0$;

б) $\int\limits_1^2 t^2 (x')^2\,dt - 2x(1) + x^2(2) \to extr$;

в) $\int\limits_0^1 (x')^2\,dt \to extr,\ \int\limits_0^1 xdt = \int\limits_0^1 txdt = 0,\ x(1) = 1$;

г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left((x')^2 - x^2 - 2x\right)dt - 2x^2(0) - x^2\left(\frac{\pi}{2}\right) \to extr$;

д) $\int\limits_0^e 2x'(tx' + x)\,dt + 3x^2(1) - x^2(e) - 4x(e) \to extr$.

Домашнее задание

1 Найдите решение следующей экстремальной задачи:

а) $\int\limits_0^{T_0} \left((x')^3 + (x')^2\right)dt \to extr,\ x(0) = 0, x(T_0) = \xi$;

б) $\int\limits_1^e \left(t(x')^2 + 2x\right)dt \to extr,\ x(1) = 1, x(e) = 0$;

в) $\int\limits_1^e \left(x - t(x')^2\right)dt \to extr,\ x(1) = 1, x(e) = 2$;

г) $\int\limits_1^2 t^2 (x')^3\,dt \to extr,\ x(1) = 3, x(2) = 1$;

д) $\int\limits_2^3 (t^2 - 1)(x')^2\,dt \to extr,\ x(2) = 0, x(3) = 1$.

2 Решите задачу вариационного исчисления:

а) $\int\limits_0^{\pi} (x')^2\,dt \to extr,\ \int\limits_0^{\pi} x\cos t\,dt = \frac{\pi}{2},\ x(0) = 1, x(\pi) = -1$;

б) $\int\limits_0^{\pi} x\sin t\,dt \to extr,\ \int\limits_0^{\pi} (x')^2\,dt = \frac{3\pi}{2},\ x(0) = 0, x(\pi) = \pi$;

в) $\int\limits_0^1 (x')^2\,dt \to extr,\ \int\limits_0^1 xe^{-x}dt = e, x(1) = 2,\ x(0) = 2e + 1$;

г) $\int_0^{\pi} (x')^2 dt \to extr, \ \int_0^{\pi} x \sin t dt = 0, x(0) = 0, \ x(\pi) = 1;$

д) $\int_0^{\pi} \left((x'')^2 - 48x \right) dt \to ext, x(0) = 0, x'(0) = 0, \ x(1) = 0.$

Список литературы

1 **Радыно, Я. В.** Задачи и упражнения по курсу «Функциональный анализ»: учебно-методическое пособие для студентов мех.-мат. факультета / Я. В. Радыно, В. И. Чесалин, А. Г. Яблонская. – Минск: БГУ, 2013. – 39 с.

2 **Крейн, С. Г.** Задачи и упражнения по функциональному анализу : более 1700 задач: учебное пособие / С. Г. Крейна. – 4-е изд., испр. – Москва: ЛИБРУКОМ, 2010. – 216 с.

3 Функциональный анализ. Сборник задач и упражнений: учебно-методический комплекс дисциплин по проекту «Создание научно-образовательного комплекса для подготовки элитных специалистов в области математики, механики и информатики в Сибирском федеральном университете» / И. В. Ермилов [и др.]. – Красноярск: – Сибирский фед. ун-т, 2007. – 255 с.

4 Элементы дифференциального исчисления векторных функций векторного аргумента: учебно-методическое пособие для вузов / С. П. Зубова [и др.]. – Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 2007. – 358 с.