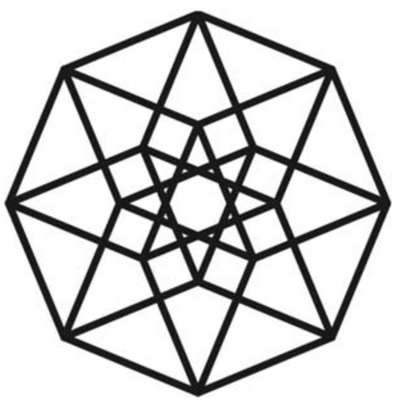
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

***Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов направления подготовки
01.03.04 «Прикладная математика» дневной формы обучения***



Могилев 2022

УДК 517.9
ББК 22.161.8
М18

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «29» сентября 2022 г., протокол № 1

Составители: А. М. Бутома;
канд. физ.-мат. наук, доц. Л. И. Сотская

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. И. И. Маковецкий

Методические рекомендации содержат задания для практических занятий по дисциплине «Математическое программирование», приведены образцы решения примеров, перечень необходимой литературы.

Учебно-методическое издание

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	А. А. Подошевко
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Практические занятия № 1–3. Построение математических моделей некоторых задач математического программирования. Основные формы записи задачи линейного программирования, переход от одной формы к другой. Графический способ решения задачи линейного программирования

Математическое программирование – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями. *Линейное программирование* – это раздел высшей математики, занимающийся разработкой методов отыскания экстремальных значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения.

Определение. *Приближенное описание объекта, выраженное с помощью математической символики, называют математической моделью.*

Составление математической модели начинается с выбора переменных, совокупность числовых значений которых однозначно определяет один из вариантов процесса. После выбора переменных необходимо по тексту задачи составить ограничения, которым эти переменные должны удовлетворять. Далее составляется целевая функция (или функции), которая в математической форме отражает критерий (критерии) выбора лучшего варианта. После составления математической модели рассматриваются возможные пути ее упрощения, и затем выбирается подходящий метод для решения задачи.

Модель задачи линейного программирования (ЗЛП) может быть записана в одной из приведенных ниже форм.

1 *Общая, или произвольная*, *форма записи*:

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^{n} c_i x_j$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad \left(i = \overline{1, m_1}\right), \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad \left(i = \overline{m_1 + 1, m_2}\right), \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \quad \left(i = \overline{m_2 + 1, m}\right); \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1, n_1}\right), \; x_j \text{ – \textit{произвольные}} \quad \left(j = \overline{n_1 + 1, n}\right). \qquad (1)$$

2 *Симметричная*, *или стандартная*, *форма записи*:

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_i x_j \qquad \text{или} \qquad \min Z = \sum_{j=1}^{n} c_i x_j\ ;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right),$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right), \qquad x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right) \tag{2}$$

3 *Каноническая*, *или основная*, *форма записи*:

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_i x_j\ ;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right),$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right). \tag{3}$$

Указанные три формы записи ЗЛП эквивалентны в том смысле, что каждая из них с помощью несложных преобразований может быть сведена к другой форме.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию и графическое решение задачи с двумя переменными.

Пусть требуется найти решение $X = (x_1, x_2)$, доставляющее

$$\max(\min) Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \tag{4}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j \le b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \tag{5}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0\ . \tag{6}$$

Начнем с геометрической интерпретации области допустимых решений.

Каждое из неравенств (5) определяет на координатной плоскости $x_1 O x_2$ некоторую полуплоскость, а система неравенств (5) и (6) в случае ее совместности – их пересечение. Оно может представлять собой выпуклый многоугольник (рисунок 1), неограниченную выпуклую многоугольную область (рисунок 2), быть пустым множеством и т. д.

Перейдем к геометрической интерпретации целевой функции (4). Уравнение $Z = c_1 x_1 + c_2 x_2$ при фиксированном значении $Z = Z_0$ определяет на плоскости прямую линию $Z_0 = c_1 x_1 + c_2 x_2$. При изменении Z получим семейство параллельных прямых, называемых *линиями уровня.* Вектор $\vec{c} = \left(c_1; c_2\right)$ с координатами из коэффициентов при x_1 и x_2 перпендикулярен к каждой из линий уровня. Вектор $\vec{c}\,(-\vec{c})$ показывает направление наибольшего возрастания (убывания) целевой функции.

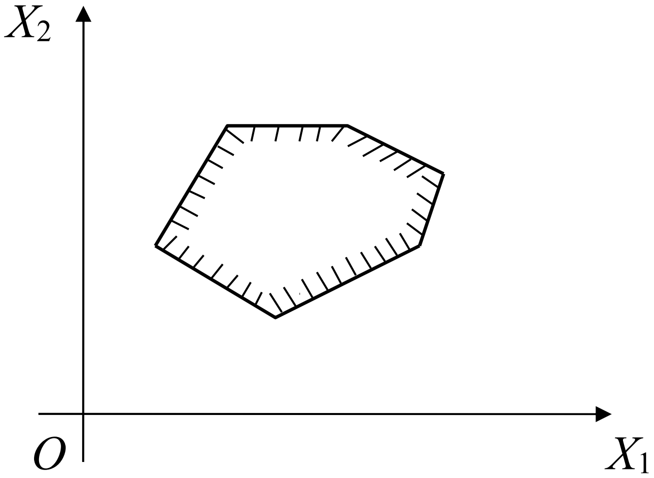


Рисунок 1

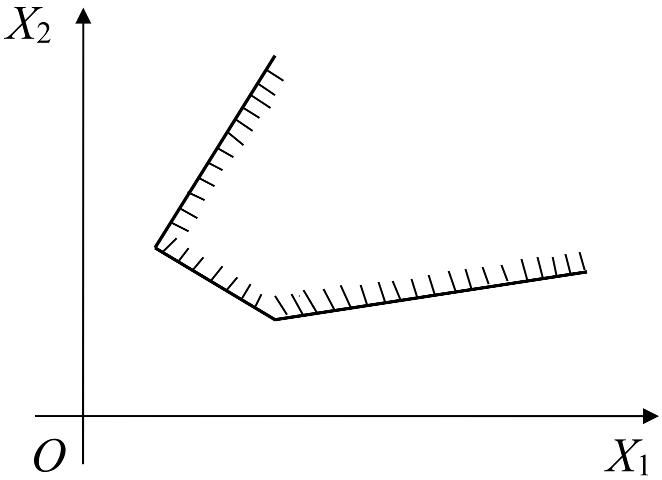


Рисунок 2

Если построить на одном рисунке область допустимых решений, вектор $\vec{c}$ (или $-\vec{c}$) и одну из линий уровня, например, Z = 0, то задача сводится к определению в области допустимых решений точки в направлении вектора $\vec{c}$ (или $-\vec{c}$), через которую проходит линия уровня $Z_{\max}\left(Z_{\min}\right)$, соответствующая наибольшему (наименьшему) значению функции *Z*. Это и есть *графический способ решения ЗЛП.* Если задача разрешима, могут представиться следующие случаи: задача имеет единственное решение (рисунок 3); задача имеет бесконечное множество – альтернативный оптимум (рисунок 4); целевая функция не ограничена; область допустимых решений – единственная точка, задача не имеет решения.

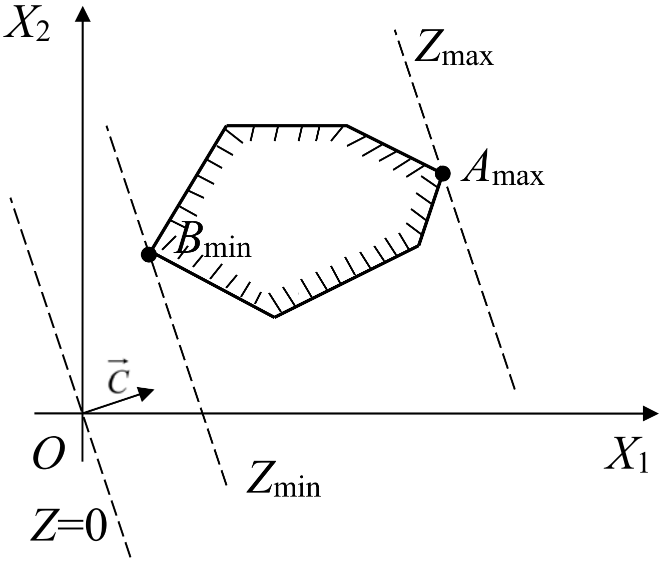


Рисунок 3

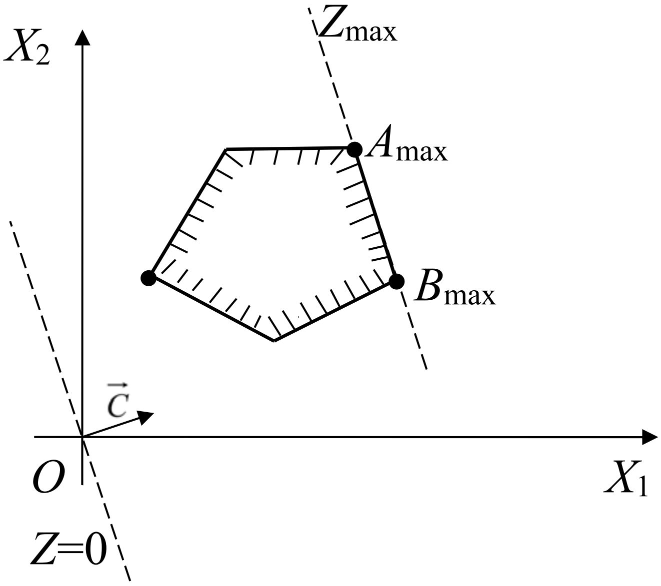


Рисунок 4

Рассмотрим примеры.

Пример 1 **–** Привести к канонической форме ЗЛП:

$$\min Z = 6x_1 + 5x_2\ ;$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 11x_2 \geq 55, \\ x_1 + \quad x_2 \geq 8, \\ 11x_1 + 3x_2 \geq 32, \\ 16x_1 + 13x_2 \leq 210, \\ 17x_1 + 12x_2 \leq 205; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Решение

Заменяем функцию Z на $Z' = -Z$. Из левых частей ограничений типа «≥» вычитаем неотрицательные переменные x_3, x_4 и x_5, к левым частям ограничений типа «≤» прибавляем неотрицательные переменные x_6 и x_7. Получаем модель задачи в канонической форме:

$$\max Z = -6x_1 - 5x_2;$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 11x_2 - x_3 = 55, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 8, \\ 11x_1 + 3x_2 - x_5 = 32, \\ 16x_1 + 13x_2 + x_6 = 210, \\ 17x_1 + 12x_2 + x_7 = 205; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,7}\right).$$

Пример 2 – Предприятие может выпускать продукцию двух видов: *П*1 и *П*2. При этом используется два вида ресурсов: P_1 и P_2. По технологическим нормам на производство единицы продукции *П*1 требуется a_{11} единиц ресурса P_1 и a_{21} ед. ресурса P_2, а на производство единицы продукции *П*2 требуется по a_{12} и a_{22} ед.тех же ресурсов (где $a_{11} = 6$, $a_{12} = 5$, $a_{21} = 3$, $a_{22} = 5$). Объем ресурсов P_1 и P_2 составляет $b_1 = 45$ и $b_2 = 30$ ед. соответственно. Прибыль от реализации единиц продукции *П*1 и *П*2 составляет $c_1 = 3$ и $c_2 = 3$ ден. ед. соответственно

Требуется:

1) свести исходные данные в таблицу, удобную для построения модели;

2) составить математическую модель задачи (показатель эффективности – прибыль);

3) определить оптимальный план выпуска количества единиц продукции *П*1 и *П*2, обеспечивающий максимальную прибыль. Найти величину полученной прибыли.

Решение

1 Исходные данные представим в виде таблицы 1.

Обозначим через x_1 число единиц продукции *П*1, через x_2 – продукции *П*2, через *Z* – суммарную прибыль от реализации произведенных изделий. Тогда $X = (x_1, x_2)$ – допустимый план задачи, *Z* = *Z*(*X*) – целевая функция, максимум которой требуется найти.

Таблица 1

Ресурс	Затраты на единицу продукции		Объем ресурса	Вид ограничения
	*П*1	*П*2		
P_1 P_2	6 3	5 5	45 30	$\leq$ $\leq$
Прибыль, ден. ед.	3	3		
План выпуска, шт.	x_1	x_2		

2 Так как каждое изделие продукции *П*1 дает прибыль 3 ден. ед., а таких изделий изготавливается x_1 ед., то выпуск изделий *П*1 даст прибыль $3x_1$, аналогично изделия продукции *П*2 обеспечат прибыль $3x_2$. Суммарную прибыль можно записать в виде

$$Z = 3x_1 + 3x_2. \tag{7}$$

Ресурса P_1 на изготовление одного изделия продукции *П*1 требуется 6 ед., на изготовление одного изделия продукции *П*2 *– 5* ед. Ресурса P_2 на изготовление одного изделия продукции *П*1 требуется 3 ед., на изготовление одного изделия продукции *П*2 – 5 ед.

Тогда для изготовления x_1 изделий *П*1 и x_2 изделий *П*2 потребуется первого ресурса $6x_1 + 5x_2$ ед. Так как объем ресурса P_1 не может превышать 45 ед., то должно выполняться неравенство $6x_1 + 5x_2 \leq 45$.

Аналогично можно записать условия, налагаемые на объем второго ресурса P_2: $3x_1 + 5x_2 \leq 30$.

Таким образом, искомый план задачи $X = (x_1, x_2)$ должен удовлетворять следующей системе ограничений:

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \leq 45, \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 30. \end{cases} \tag{8}$$

По смыслу задачи переменные x_1 и x_2 не могут быть выражены отрицательными числами, поэтому

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \tag{9}$$

План $X = (x_1, x_2)$, *удовлетворяющий системе ограничений* (8) *и условию неотрицательности* (9), *называется* ***допустимым***. *Допустимый план, для которого целевая функция* (7) *принимает максимальное значение, называется* ***оптимальным*** *и обозначается* $X^* = (x_1^*, x_2^*)$.

Линейная функция (*7*), *максимум которой надо определить*, *вместе с системой ограничений* (*8*) *и условием неотрицательности* (*9*) *образуют* ***математическую модель задачи.*** *Так как функция* (*7*) *линейная, а система* (*8*) *содержит только линейные ограничения*, *то задача* (*7*)–(*9*) *является* ***задачей линейного программирования (ЗЛП).***

Таким образом, математическая модель ЗЛП имеет вид:

$$\max Z = 3x_1 + 3x_2 \,;$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \le 45, \\ 3x_1 + 5x_2 \le 30; \end{cases} \tag{10}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

3 Определим план выпуска количества единиц продукции $П_1$ и $П_2$, обеспечивающий максимальную прибыль, решив ЗЛП (10) графическим способом.

Для построения области допустимых решений строим в системе x_1Ox_2 соответствующие данным ограничениям-неравенствам граничные прямые:

$$6x_1 + 5x_2 = 45\,, \qquad 3x_1 + 5x_2 = 30\,.$$

Находим полуплоскости, в которых выполняются данные неравенства. Для этого вследствие выпуклости любой полуплоскости достаточно взять произвольную точку, через которую не проходит соответствующая граничная прямая, и проверить, удовлетворяет ли эта пробная точка ограничению-неравенству (если прямая не проходит через начало координат, то в качестве пробной точки удобно взять точку (0; 0)). Если неравенство выполняется для пробной точки, то оно выполняется для любой точки, принадлежащей той же полуплоскости, что и пробная точка. Если неравенство не выполняется для пробной точки, то выбирается полуплоскость, не содержащая пробной точки. С учетом условий неотрицательности $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, получаем область допустимых решений – четырехугольник $OABC$, который является выпуклым множеством (выпуклым многоугольником) (рисунок 5).

Далее строим вектор, в направлении которого целевая функция Z возрастает быстрее всего. Для нашей задачи $\vec{c} = (3;3)$. Перпендикулярно вектору $\vec{c}$ проводим для удобства через начало координат линию уровня $Z = 0$. Параллельным перемещением прямой $Z = 0$ в направлении вектора $\vec{c}$ находим крайнюю точку *B*, в которой целевая функция достигает максимума. Координаты точки *B* определяются системой

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 = 45, \\ 3x_1 + 5x_2 = 30, \end{cases}$$

откуда $B(5;3)$.

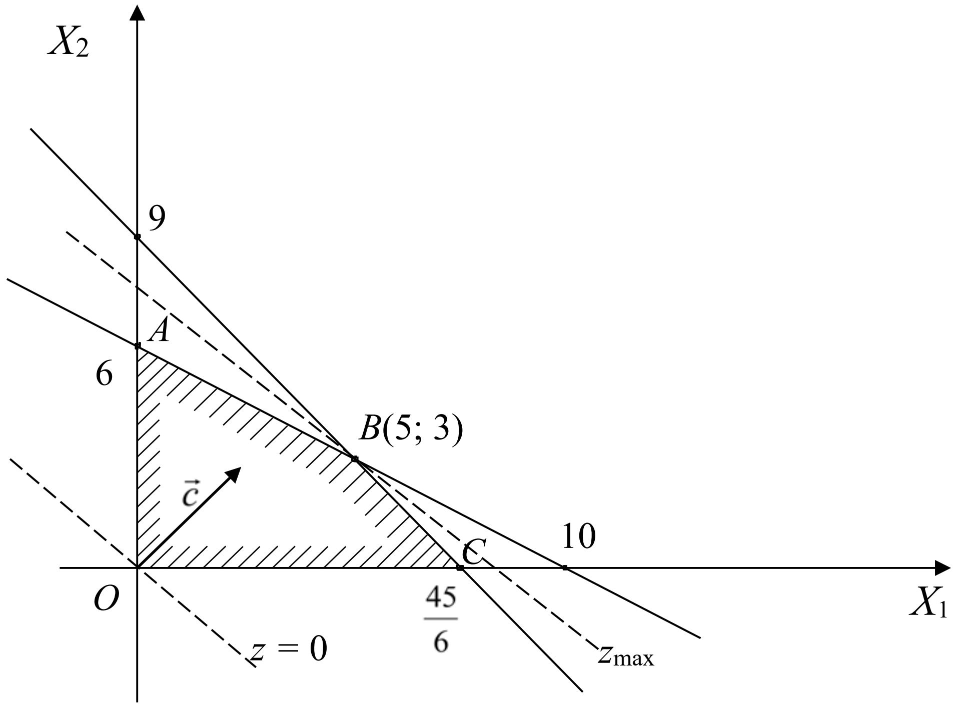


Рисунок 5

Таким образом, имеем оптимальный план $X^* = (5;3)$, $Z_{\max} = Z\left(X^*\right) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 24$.

Следовательно, максимальную прибыль в 24 ден. ед. предприятию обеспечит выпуск изделий в количестве 5 ед. продукции $П_1$ и 3 ед. продукции $П_2$.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1

Предприятие может выпускать продукцию двух видов: $П_1$ и $П_2$. При этом используется два вида ресурсов: P_1 и P_2. По технологическим нормам на производство единицы продукции $П_1$ требуется a_{11} ед. ресурса P_1 и a_{21} ед. ресурса P_2. На производство единицы продукции $П_2$ требуется по a_{12} и a_{22} ед. тех же ресурсов. Объем ресурсов P_1 и P_2 составляет соответственно b_1 и b_2 ед. Прибыль от реализации единиц продукции $П_1$ и $П_2$ составляет соответственно по c_1 и c_2 тыс. ден. ед.

Требуется:

1) свести исходные данные в таблицу, удобную для построения модели;

2) составить математическую модель задачи (показатель эффективности – прибыль);

3) определить оптимальный план выпуска количества единиц продукции $П_1$ и $П_2$, обеспечивающий максимальную прибыль. Найти величину полученной прибыли.

Данные для решения задания 1 приведены в таблице 2.

Таблица 2

Номер варианта	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	b_1	b_2	c_1	c_2
1	4	2	1	2	16	10	2	2
2	10	5	2	5	60	20	2	3
3	3	7	9	7	42	84	3	3
4	2	5	7	5	30	55	3	4
5	4	6	11	6	48	90	4	4

Задание 2

Решить графически задачу линейного программирования:

1) $\max Z = 3x_1 + 9x_2;$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 8, \\ 2x_1 + 4x_2 \le 8; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$$

2) $\max Z = 6x_1 + 4x_2;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 2, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 12; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$$

3) $\max Z = 6x_1 + 4x_2;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_2 \le 2; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$$

4) $\max Z = x_1 + 2x_2;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 + x_2 \le 4; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$$

5) $\max Z = 2x_1 + 4x_2;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 12, \\ x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \le 20; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0;$$

6) $\max Z = 2x_1 + 6x_2;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

2 Практические занятия № 4–6. Построение опорного плана задачи линейного программирования. Нахождение оптимального плана задачи линейного программирования симплексным методом. Пары двойственных задач. Прикладной аспект теорем двойственности

После составления экономико-математической модели переходят к решению задачи симплекс-методом. Прежде всего модель преобразуется к каноническому виду и производится построение начального опорного плана.

Говорят, что ограничение канонической ЗЛП имеет предпочтительный вид, если при неотрицательности его правой части $(b_i \ge 0)$ левая часть содержит переменную, входящую с коэффициентом, равным единице, а остальные ограничения – с коэффициентом, равным нулю. Предпочтительные переменные выбираются в качестве базисных, а все остальные – свободные. Свободные переменные приравниваются нулю, а базисные переменные – свободным членам.

Пример 1 – Пусть дана модель ЗЛП. Требуется привести ее к предпочтительному виду и построить начальный опорный план:

$$\max Z = 2x_1 + 4x_2;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 12, \\ \quad\;\; x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \le 20; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Решение

Введя дополнительные переменные $x_3,\ x_4,\ x_5$, приведем ЗЛП к канонической форме:

$$\max Z = 2x_1 + 4x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ x_2 + x_4 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 20; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,5}\right).$$

Предпочтительными являются переменные x_3, x_4, x_5, их выбираем в качестве базисных. Свободные переменные x_1, x_2. Их приравниваем нулю. Таким образом, начальный опорный план $X = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) = (0; 0; 12; 8; 20)$, $Z(X_0) = 0$.

Составим первую симплексную таблицу (таблица 3).

Таблица 3

Базисные переменные	1	Свободные переменные		θ
		$-x_1$	$-x_2$	
x_3	12	1	1	12/1 = 12
x_4	8	0	$\boxed{1}$	8/1 = 8
x_5	20	2	1	20/1 = 20
$Z =$	0	–2	–4	

Рабочая часть таблицы, начиная со второго столбца и третьей строки, содержит элементы, над которыми будут производиться преобразования с целью получения оптимального плана. В последней строке таблицы записано «нулевое» уравнение (целевая функция *Z*). Эта строка называется *индексной* или *строкой оценок*. В первый столбец занесены базисные переменные, а свободные переменные указаны сверху над рабочей частью таблицы. Второй столбец (с единицей) содержит свободные члены $b_i \geq 0$ системы ограничений. Последний столбец предназначен для записи симплексных отношений, которые необходимы для определения разрешающей строки.

Замечание. *Признак оптимальности опорного плана задачи максимизации: если для некоторого опорного плана все оценки индексной строки неотрицательны, то такой план оптимален; если же исходная задача на минимум и для некоторого опорного плана все оценки неположительны, то такой план также оптимален.*

Рассмотрим переход к нехудшему опорному плану.

1 *Среди отрицательных оценок индексной строки выбирают максимальную по абсолютной величине (для данной задачи это –4), которая указывает на разрешающий столбец. Если задача решается на минимум, то разрешающий столбец выбирается по максимальной положительной оценке. Разрешающий столбец указывает на переменную, вводимую в базис.*

2 *Разрешающая строка выбирается в соответствии с минимальным симплексным соотношением* $\theta = \min\left\{\dfrac{b_i}{a_{ij}}\right\}$. *Разрешающая строка соответствует переменной, выводимой из базиса.*

3 *Элемент* (a_{rs}), *стоящий на пересечении разрешающего столбца и строки, называется разрешающим.*

4 *Чтобы завершить шаг преобразований, ведущих к новому опорному плану, следующую симплексную таблицу составляют по правилам:*

– разрешающий элемент заменяется обратной величиной;

– остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент;

– остальные элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент и меняются знаки;

– прочие элементы вычисляются по правилу прямоугольника: $\left(a_{ij}\right)' = a_{ij} - \dfrac{a_{is}a_{rj}}{a_{rs}}$, *где* a_{is} *– элемент, стоящий на пересечении* i*-й строки и разрешающего столбца*; a_{rj} *– элемент, стоящий на пересечении разрешающей строки и* j*-го столбца.*

После проведения соответствующих симплексных преобразований над таблицей 3, получим таблицу 4.

Таблица 4

Базисные переменные	1	Свободные переменные		θ
		$-x_1$	$-x_4$	
x_3	4	$\boxed{1}$	–1	4/1 = 4
x_2	8	0	1	–
x_5	12	2	–1	12/2 = 6
$Z =$	32	–2	4	

План $X_1 = (0; 8; 4; 0; 12)$ не является оптимальным, т. к. в индексной строке имеется отрицательная оценка, при этом значение целевой функции $Z(X_1) = 32$.

Продолжая симплексные преобразования, получим таблицу 5.

Таблица 5

Базисные переменные	1	Свободные переменные	
		$-x_3$	$-x_4$
x_1	4	1	–1
x_2	8	0	1
x_5	4	–2	1
$Z =$	40	2	2

В индексной строке таблицы 5 нет отрицательных элементов. Таким образом, оптимальный план имеет вид: $X^* = (4; 8; 0; 0; 4)$; $Z(X^*) = 40$.

Замечания:

1) *если в индексной строке последней симплексной таблицы* (*содержащей оптимальный план*) *имеется хотя бы одна нулевая оценка*, *соответствующая свободной переменной*, *то ЗЛП имеет бесконечное множество оптимальных планов* (*альтернативный оптимум*);

2) *если в разрешающем столбце нет ни одного положительного элемента, то целевая функция на множестве допустимых планов является неограниченной.*

С каждой задачей линейного программирования тесно связана другая линейная задача, называемая *двойственной.* Первоначальная задача называется *прямой* или *исходной.* Многие ЗЛП первоначально ставятся в виде исходных или двойственных задач, поэтому говорят о паре взаимно двойственных, симметричных задач линейного программирования, которые имеют вид:

а) *прямая задача*

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_i x_j;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right),$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right);$$

б) *двойственная задача*

$$\min f = \sum_{j=1}^{n} b_i y_i;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i \ge c_j \quad \left(j = \overline{1,n}\right),$$

$$y_i \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right).$$

Рассмотренная пара взаимно двойственных задач может быть экономически интерпретирована так.

Прямая задача. Сколько и какой продукции x_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$; надо произвести, чтобы при заданных стоимостях единицы продукции $c_j \left(j = \overline{1,n}\right)$, объемах имеющихся ресурсов $b_i \left(i = \overline{1,m}\right)$ и нормах расходов a_{ij} максимизировать выпуск продукции в стоимостном выражении?

Двойственная задача. Какова должна быть оценка единицы каждого из ресурсов $y_i \left(i = \overline{1,m}\right)$, чтобы при заданных b_i , c_j и a_{ij} минимизировать общую оценку затрат на все ресурсы?

Пример 2 **–** Дана прямая задача:

$$\max Z = 2x_1 + 4x_2;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 12, \\ \quad\; x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \le 20; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Составить двойственную задачу.

Решение

Для того чтобы составить модель двойственной задачи, напишем матрицу исходной (прямой) задачи и транспонируем ее.

Матрица прямой задачи имеет вид:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 20 \\ \hline 2 & 4 & Z_{\max} \end{array}\right).$$

Матрица двойственной задачи имеет вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ \hline 12 & 8 & 20 & f_{\min} \end{array}\right).$$

По последней матрице запишем модель двойственной задачи:

$$\min f = 12y_1 + 8y_2 + 20y_3;$$

$$\begin{cases} y_1 \qquad + 2y_3 \geq 2, \\ y_1 + y_2 + \ y_3 \geq 4; \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0.$$

Задания для самостоятельной работы

Найти начальный опорный план:

1) $Z = 2x_1 - x_3 + 3x_4 + x_5 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \qquad + x_4 \qquad = 4, \\ \quad 16x_2 + x_3 - \ 2x_4 \qquad = 16, \\ \quad 5x_2 \qquad\qquad + x_5 = 6; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,5}\right);$$

2) $Z = -x_1 + 6x_2 + 2x_4 - x_5 + 2x_6 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \qquad - x_4 \qquad + x_6 = 9, \\ -3x_1 + 2x_2 \qquad + 3x_4 + x_5 \qquad = 3, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 \qquad = 4; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,6}\right);$$

3) $Z = x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + \quad + 5x_3 + 3x_4 \leq 14, \\ 6x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 17, \\ \qquad 2x_3 + 3x_4 \leq 21; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,4}\right).$$

Ответы: **1)** $\left(4; 0; 16; 0; 6\right)$; **2)** $\left(0; 0; 4; 0; 3; 9\right)$; **3)** $\left(0; 0; 0; 0; 14; 17; 21\right)$.

Решить симплексным методом:

1) $Z = 8x_1 + 6x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = 16; \\ 6x_1 + 12x_2 \qquad + x_4 = 20; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,4}).$$

2) $Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 5; \\ x_1 + 3x_2 \quad + x_4 \qquad = 9; \\ x_1 \qquad + x_5 \quad = 4; \\ x_1 + 2x_2 \qquad + x_6 = 8; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,6}).$$

3) $Z = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$;

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 6; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,3}).$$

Ответы: **1)** $X^* = (2; 5; 0; 0)$, $Z_{\max} = 42$; **2)** $X^* = (3; 2; 0; 0; 1; 1)$, $Z_{\max} = 12$; **3)** $X^* = (2{,}8;\ 2{,}4;\ 0{,}4)$, $Z_{\max} = 7{,}2$.

Построить двойственную задачу к следующей задаче линейного программирования в симметрической форме:

1) max $Z = 2x_1 + 7x_2 + 5x_3$;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 2, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 \le 3, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 1; \end{cases}$$

$x_i \ge 0, i = \overline{1,3}$;

2) min $f = 4y_1 + 2y_2 + 6y_3$;

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 - 3y_3 \ge 1, \\ 2y_1 - 3y_2 + y_3 \ge 6, \\ -y_1 + y_2 + y_3 \ge 3, \\ y_1 + 6y_2 + 4y_3 \ge 5; \end{cases}$$

$y_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$;

3) min $f = y_1 + 3y_2 + 5y_3$;

$$\begin{cases} y_1 + 5y_2 + 2y_3 \ge 4, \\ -y_1 + y_2 - y_3 \ge 7, \\ 2y_1 - 3y_2 + y_3 \ge 3, \\ 3y_1 - 2y_2 + 2y_3 \ge 9; \end{cases}$$

$y_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}$;

4) max $Z = x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 5x_4$;

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \le 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 \le 5, \\ 4x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \le 7; \end{cases}$$

$x_i \ge 0, i = \overline{1,4}$.

3 Практические занятия № 7 и 8. Транспортная задача. Построение начальных опорных планов. Решение транспортной задачи методом потенциалов

Решение транспортной задачи позволяет разработать наиболее рациональные пути и способы транспортирования товаров, устранить чрезмерно дальние, встречные, повторные перевозки. Все это сокращает время продвижения товаров, уменьшает затраты предприятий и фирм, связанные с осуществлением процессов снабжения сырьем, материалами, топливом, оборудованием и т. д.

Постановка транспортной задачи в матричной форме

Приведем простейшую формулировку *транспортной задачи* по критерию стоимости.

В m пунктах производства A_1, …, A_m находится однородный продукт (сахар, уголь, картофель и т. д.) в количествах a_1, …, a_m соответственно, который должен быть доставлен n потребителям B_1, …, B_n в количествах b_1, …, b_n. Известны транспортные издержки c_{ij} (расходы), связанные с перевозкой единицы продукции из пункта A_i в пункт B_j $\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$.

Требуется составить такой план перевозок, который обеспечивал бы при минимальных транспортных издержках удовлетворение спроса всех пунктов потребления за счет распределения всего продукта, произведенного всеми пунктами производства.

Для разрешимости поставленной задачи необходимо и достаточно, *чтобы сумма запасов равнялась сумме спроса всех пунктов*, *т. е.*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\ . \tag{11}$$

Для наглядности транспортную задачу представим в виде таблицы, которая называется *распределительной* (таблица 6).

Таблица 6

Поставщик	Потребитель				Запас груза
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребность в грузе	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Определение 1. Матрица $C = (c_{ij})_{m\times n}$ называется *матрицей тарифов* (*издержек или транспортных расходов*), а числа c_{ij} – *тарифами.*

Определение 2. *Планом* транспортной задачи называется матрица $X = (x_{ij})_{m\times n}$, где каждое число x_{ij} обозначает количество единиц груза, которое надо доставить из i-го пункта отправления в j-ый пункт назначения.

Матрицу X называют также *матрицей перевозок.*

Переменные x_{ij} должны удовлетворять ограничениям:

– по запасам

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \quad \left(i=\overline{1,m}\right); \tag{12}$$

– ограничениям по потребностям

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \quad \left(j=\overline{1,n}\right); \tag{13}$$

– условиям неотрицательности

$$x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}\right). \tag{14}$$

Общие суммарные затраты, связанные с реализацией плана перевозок, можно представить целевой функцией

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{ij}x_{ij} + \ldots + c_{mn}x_{mn}. \tag{15}$$

Таким образом, математически транспортная задача ставится так: *требуется найти* $m \times n$ *переменных величин* x_{ij}, *удовлетворяющих системам уравнений* (*ограничений*) (12) *и* (13) *и условиям неотрицательности* (14), *для которых целевая функция* (15) *принимает минимальное значение.*

Для решения транспортной задачи важное значение имеет теорема о ранге матрицы.

Теорема. *Ранг матрицы транспортной задачи на единицу меньше числа уравнений, т. е.* $r = m + n - 1$.

Определение 3. Если число занятых клеток удовлетворяет условию $m + n - 1$, то план перевозок называют *невырожденным*, а если число занятых клеток не удовлетворяет этому условию, то план перевозок называют *вырожденным*.

План перевозок транспортной задачи будем отыскивать непосредственно в матрице перевозок. Заметим, что если переменная x_{ij} принимает значение $a_{ij} \neq 0$, то в соответствующую клетку (i, j) будем записывать это значение, если же $x_{ij} = 0$, то клетку (i, j) оставляем свободной. Согласно теореме 1, в каждой матрице перевозок опорный план должен содержать $m + n - 1$ занятых клеток, а остальные – свободные.

Транспортную задачу будем решать с помощью общего приема последовательного улучшения планов, состоящего из следующих основных этапов:

1) *определения исходного опорного плана*;

2) *оценки этого плана*;

3) *перехода к следующему плану путем однократного замещения одной базисной переменной на свободную.*

Определение исходного опорного плана

Для построения начального опорного плана задачи используются следующие правила: правило «северо-западного угла», правило «минимального элемента».

Наиболее оптимальным является *правило «минимального элемента»*.

Сущность его состоит в том, что на каждом шаге осуществляется максимально возможная поставка в клетку с минимальным тарифом c_{ij}. Заполнение таблицы начинаем с клетки, которой соответствует наименьший элемент c_{ij} из всей матрицы тарифов. Затем остаток по столбцу или строке помещаем в клетку того же столбца или строки, которой соответствует следующее по величине значение c_{ij}, и т. д.

Пример 1 – Найти опорный план по правилу «минимального элемента».

Решение

Выбираем наименьший тариф из таблицы 7.

Таблица 7

Поставщик	Потребитель				Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	7	3	5	100
A_2	1	2	5	6	150
A_3	3	10	20	1	50
Потребность в грузе	75	80	60	85	300

Наименьшие тарифы соответствуют клеткам (2, 1), (3, 4): $c_{21} = c_{34} = 1$.

Поместим необходимое количество груза, например, в клетку (2, 1) (таблица 8): $x_{21} = 75$, остаток груза помещаем в клетку (2, 2), для которой тариф $c_{22} = 2$, при этом $x_{22} = \min(80; 150 - 75) = 75$. Второму потребителю необходимо еще 5 ед. груза (80 –5). В клетку (1, 2) от поставщика A_1 помещаем $x_{12} = \min(5; 100) = 5$ ед. груза.

Далее по первой строке в клетку (1, 3), для которой тариф относительно невысок по сравнению с занятой клеткой, заносим необходимое количество груза $x_{13} = \min(60; 95) = 60$ ед. груза.

Остаток груза от поставщика A_1 заносим в клетку (1, 4), т. е. $x_{14} = \min(85; 35) = 35$ ед. груза.

Спрос четвертого потребителя удовлетворен не полностью, поэтому по столбцу в клетку (3, 4) от поставщика A_3 помещаем необходимое количество груза $x_{34} = 50$ ед.

В результате распределения в таблице 8 получаем опорный план X.

Таблица 8

Поставщик	Потребитель				Запас груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	7 5	3 60	5 35	100
A_2	1 75	2 75	5	6	150
A_3	3	10	20	1 50	50
Потребность в грузе	75	80	60	85	300

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 60 & 35 \\ 75 & 75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}.$$

Замечание 1. Может оказаться, что при построении опорного плана занятых клеток будет меньше, чем $m + n - 1$, т. е. задача является *вырожденной*. Тогда в свободную клетку (обычно в ту, которой соответствует наименьший тариф) заносится «базисный» нуль, и эта клетка считается занятой.

Рассмотрим правило «северо-западного элемента». Распределение груза начинается с загрузки левой верхней клетки (1;1), двигаясь затем от нее по строке вправо или по столбцу вниз. В клетку (1;1) занесем меньшее из чисел a_1, b_1, т. е. $x_{11} = \min(a_1, b_1)$. Если $a_1 > b_1$, то $x_{11} = b_1$ и первый потребитель B_1 будет полностью удовлетворен. В дальнейшем первый столбец таблицы распределения в расчет не принимается.

Двигаясь вправо по первой строке таблицы, заносим в соседнюю клетку (1;2) меньшее из чисел $(a_1 - b_1)$ и b_2. Если $a_1 - b_1 < b_2$, то запасы первого поставщика исчерпаны, и первая строка таблицы в дальнейшем в расчет не принимается. Переходим к аналогичному распределению груза второго поставщика.

Если $a_1 < b_1$, то $x_{11} = a_1$. При этом запас первого поставщика будет исчерпан, поэтому первая строка из дальнейшего рассмотрения исключается. Переходим к распределению запасов второго поставщика. В клетку (2:1) заносим наименьшее из чисел $(a_2, b_1 - a_1)$.

Заполнив таким образом клетку (1;2) или (2;1), переходим к загрузке следующей клетки по второй строке либо по второму столбцу. Процесс распределения по второй, третьей и последующим строкам (столбцам) производится аналогично распределению по первой строке или первому столбцу до тех пор, пока не исчерпаются ресурсы. Последней заполняется клетка (m, n).

Решение транспортной задачи методом потенциалов

Сущность *метода потенциалов* состоит в следующем. После того как найден исходный опорный план перевозок, каждому поставщику A_i (каждой строке) ставится в соответствие некоторое число u_i $\left(i = \overline{1, m}\right)$, а каждому потребителю B_j (каждому столбцу) – некоторое число v_j $\left(j = \overline{1, n}\right)$. Числа u_i и v_j называются *потенциалами* соответственно поставщика A_i и потребителя B_j и выбираются так, чтобы в любой загруженной клетке их сумма равнялась тарифу этой клетки, т. е. $u_i + v_j = c_{ij}$. Так как всех потенциалов $m + n$, а занятых клеток $m + n - 1$, то для определения чисел u_i и v_j придется решать систему из $m + n - 1$ уравнений $u_i + v_j = c_{ij}$ с $m + n$ неизвестными. В этом случае одной из неизвестных можно придать произвольное значение, и тогда система будет иметь единственное решение, т. е. все остальные $m + n - 1$ неизвестных определятся однозначно. Затем для проверки оптимальности плана просматриваются свободные клетки (i, j) и для каждой из них вычисляется разность s_{ij} между тарифом c_{ij} и суммой $u_i + v_j$ потенциалов строки и столбца. План оптимален тогда, когда для каждой свободной клетки (i,j) разность s_{ij} есть величина неотрицательная, т. е. $s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0$.

Полученные разности называются *оценками* (*характеристиками*) *свободных клеток.* Отрицательные оценки указывают на перспективность клеток, загрузка их приведёт к улучшению плана. Положительные и нулевые оценки исключают возможность улучшения полученного плана.

Переход к новому плану осуществляется по общим правилам распределительного метода. Для наиболее перспективной клетки строится замкнутый контур, вершинам которого приписываются чередующиеся знаки (свободной клетке приписывается положительный знак). В клетках, соответствующих отрицательным вершинам, отыскивается наименьший груз, который и «перемещается» по клеткам замкнутого цикла, т. е. прибавляется к клеткам со знаком «плюс», включая свободную, и вычитается из клеток со знаком «минус».

В новом плане вновь определяются потенциалы строк и столбцов и вычисляются оценки для всех свободных клеток. Когда среди оценок не окажется отрицательных, полученный план будет оптимальным.

Итак, чтобы решить транспортную задачу методом потенциалов, необходимо:

– *построить опорный план перевозок по одному из вышеизложенных правил*;

– *вычислить потенциалы* u_i *и* v_j *поставщиков и потребителей соответственно*;

– *вычислить суммы потенциалов* (*косвенные тарифы*) *для свободных клеток* $u_i + v_j = c'_{ij}$;

– *проверить разность* $s_{ij} = c_{ij} - c'_{ij}$.

Если все $s_{ij} \geq 0$ *для свободных клеток, полученный план оптимален. Если хотя бы одна оценка* $s_{ij} < 0$, *в число занятых вводят клетку, для которой оценка минимальна, и получают новый план перевозок.*

Процесс продолжают до тех пор, пока не будет получен план, для которого все оценки $s_{ij} \geq 0$.

Пример 2 **–** Совхозы A_1, A_2, A_3 выделяют соответственно 30, 40 и 20 ц молока для ежедневного снабжения пунктов B_1, B_2, B_3, B_4. Стоимость перевозки и потребности пунктов B_j даны в таблице 9.

Таблица 9

Совхоз	Потребитель				Предназначено для вывоза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	5	4	30
A_2	3	2	4	1	40
A_3	4	3	2	6	20
Потребность	20	25	35	10	90

Требуется организовать снабжение таким образом, чтобы полностью обеспечить потребителей молоком и чтобы транспортные расходы были минимальными.

Решение

Опорный план получим, например, по правилу «минимального элемента» (таблица 10).

Таблица 10

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	2 + 15	3	5 – 15	4	30	0
A_2	3 – 5	2 25	4 +	1 10	40	1
A_3	4	3	2 20	6	20	–3
b_j	20	25	35	10	90	
v_j	2	1	5	0		

Полученный план невырожденный. Вычисление потенциалов можно производить непосредственно в таблице. Пусть потенциал первого поставщика $u_1 = 0$, тогда остальные потенциалы определятся однозначно.

Проверяем план на оптимальность, находим оценки свободных клеток по формуле $s_{ij} = c_{ij} - \left(u_i + v_j\right)$:

$$s_{12} = 3 - (0+1) = 2 > 0; \quad s_{14} = 4 - (0+0) = 4 > 0; \quad s_{23} = 4 - (1+5) = -2 < 0;$$

$$s_{31} = 4 - (-3+2) = 5 > 0; \quad s_{32} = 3 - (-3+1) = 5 > 0; \quad s_{34} = 6 - (-3+0) = 9 > 0.$$

Клетка (2,3) – перспективная. Строим для неё замкнутый цикл (таблица 11). Загружая эту клетку наименьшим количеством груза, стоящего в отрицательных вершинах цикла, получим новый план (см. таблицу 11).

Положим потенциал $u_1 = 0$, тогда остальные потенциалы определятся однозначно.

Проверяем полученный план на оптимальность:

$s_{12} = 3 - (0 + 3) = 0;$ $s_{31} = 4 - (-3 + 2) = 5 > 0;$
$s_{14} = 4 - (0 + 2) = 2 > 0;$ $s_{32} = 3 - (-3 + 3) = 3 > 0;$
$s_{21} = 3 - (-1 + 2) = 2 > 0;$ $s_{34} = 6 - (-3 + 2) = 7 > 0.$

Все оценки $s_{ij} \geq 0$.

Таблица 11

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	u_i
A_1	2 20	3	5 10	4	30	0
A_2	3	2 25	4 5	1 10	40	–1
A_3	4	3	2 20	6	20	–3
b_j	20	25	35	10	90	
v_j	2	3	5	2		

Следовательно, полученный план

$$X^* = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 25 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}.$$

оптимален.

Транспортные расходы по оптимальному плану

$$f_{\min} = 2 \cdot 20 + 5 \cdot 10 + 2 \cdot 25 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 20 = 210.$$

Замечание 2. Если среди оценок s_{ij} хотя бы одна равна нулю, то полученный оптимальный план не единственный.

Решение транспортной задачи с открытой моделью

Если суммарная производственная мощность поставщиков превышает спрос потребителей или спрос потребителей больше фактической суммарной мощности поставщиков, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad \text{или} \qquad \sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

то имеем *транспортную задачу с открытой моделью.*

Если

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

то в математическую модель транспортной задачи вводится фиктивный (n+1)-й пункт потребления. Тогда в матрице задачи добавится столбец, для которого потребность равна разности между суммарной мощностью поставщиков и фактическим спросом потребителей:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Все тарифы на доставку груза в пункт B_{n+1} будем считать равными нулю. Очевидно, что для такой транспортной задачи уже окажется выполнимым условие

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j + b_{n+1}$$

Для новой задачи значение целевой функции будет таким же, так как цены на дополнительные перевозки равны нулю. Иными словами, введение фиктивного потребителя обеспечивает совместность системы ограничений.

Если же

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

то вводится фиктивный (m + 1)-й пункт отправления, для которого запас груза равен

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1} a_i .$$

Тарифы на доставку грузов от фиктивного A_{m+1} поставщика полагаем равными нулю. В матрице задачи добавится одна строка, причём на целевой функции это не отразится, а система ограничений станет совместной, т. е. станет возможным отыскание оптимального плана.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1

Построить начальный опорный план (методами «минимального элемента» и «северо-западного угла») перевозок груза от поставщиков A_i к потребителям B_j, если известны: a_i – запас единиц груза i-го поставщика, b_j – потребность j-го потребителя в грузе, $\left(c_{ij}\right)$ – матрица затрат на перевозку одной единицы груза. Проверить на оптимальность один из полученных опорных планов:

1) $a_1 = 140;\ a_2 = 50;\ a_3 = 70;\ a_4 = 90;\qquad b_1 = 100;\ b_2 = 60;\ b_3 = 80;\ b_4 = 110;$

$$\left(c_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 3 & 3 \\ 8 & 7 & 2 & 2 \\ 7 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix};$$

2) $a_1 = 70;\ a_2 = 140;\ a_3 = 110;\qquad b_1 = 90;\ b_2 = 80;\ b_3 = 100;\ b_4 = 60;$

$$\left(c_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 7 & 9 & 3 \\ 4 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix};$$

3) $a_1 = 75;\ a_2 = 100;\ a_3 = 60;\ a_4 = 125;\qquad b_1 = 190;\ b_2 = 90;\ b_3 = 70;$

$$\left(c_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 8 & 6 & 9 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 2

Решить транспортную задачу, если известны: a_i – запас единиц груза i-го поставщика, b_j – потребность j-го потребителя в грузе, $\left(c_{ij}\right)$ – матрица затрат на перевозку одной единицы груза:

1) $a_1 = 40;\ a_2 = 120;\quad b_1 = 30;\ b_2 = 50;\ b_3 = 45;\ b_4 = 35;$

$$\left(c_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & 8 \\ 7 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

2) $a_1 = 40;\ a_2 = 36;\ a_3 = 24;\quad b_1 = 24;\ b_2 = 20;\ b_3 = 30;\ b_4 = 26;$

$$\left(c_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 7 \\ 8 & 10 & 14 & 12 \\ 16 & 12 & 6 & 13 \end{pmatrix};$$

3) $a_1 = 30;\ a_2 = 50;\ a_3 = 45;\ b_1 = 20;\ b_2 = 50;\ b_3 = 45;\ b_4 = 40;$

$$\left(c_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 14 & 10 \\ 16 & 20 & 18 & 17 \\ 19 & 21 & 16 & 13 \end{pmatrix}.$$

Ответы: **1)** $f_{\min} = 745$; **2)** $f_{\min} = 670$; **3)** $f_{\min} = 1810$.

4 Практическое занятие № 9. Решение задачи линейного программирования с параметром

Решить задачу линейного программирования в зависимости от параметра:

$$f = ax_1 - 2x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 6, \\ x_1 - 2x_2 \le 8; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0.$$

Решение

Построим область допустимых решений и градиентный вектор (рисунок 6). Так как градиентный вектор $\overline{c}(a;-2)$ содержит параметр, то этот вектор представляет собой пучок векторов с центром в начале координат, концы которых лежат на прямой $x_2 = -2$.

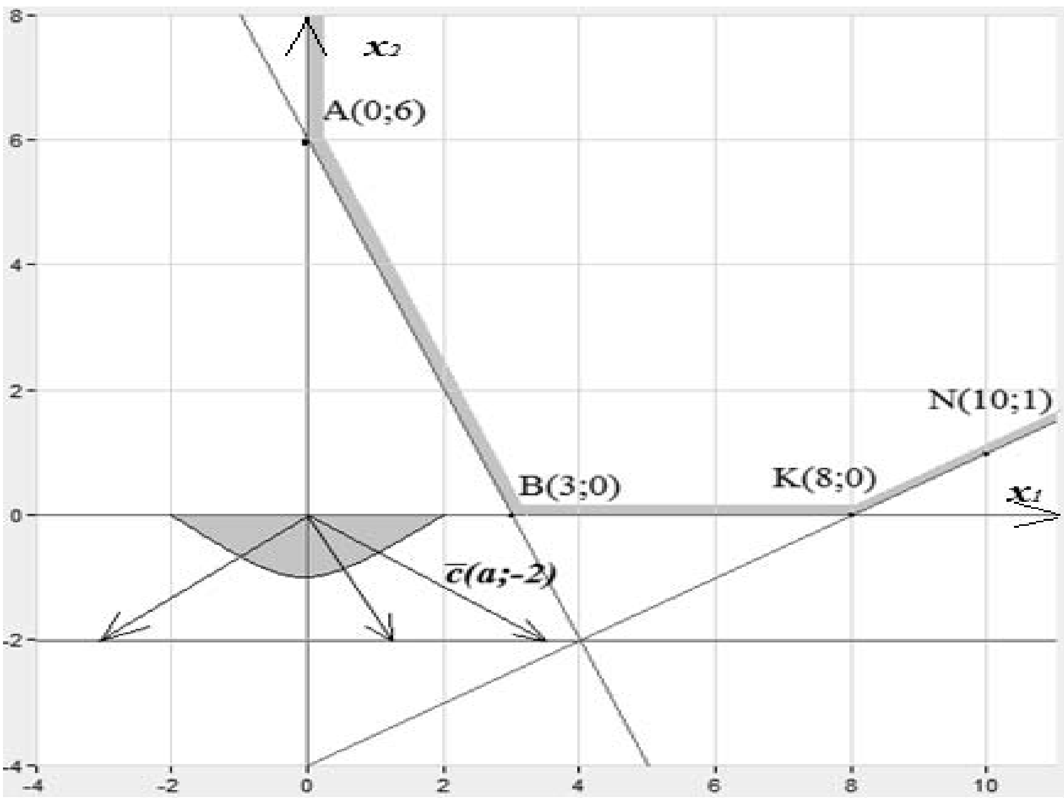


Рисунок 6

1 Определим значение параметра a, при котором задача имеет бесконечно много решений.

Для этого решением должна быть одна из сторон многоугольника *MABKN*.

Так как задача на максимум, то решением должен быть отрезок *AB*, *BK*, *NK*.

Если решением является отрезок *AB*, то вектор $\vec{c}$ будет перпендикулярен прямой $2x_1 + x_2 - 6 = 0$, а линия уровня $f = \text{const}$ будет параллельна этой прямой:

$$\frac{a}{2} = \frac{-2}{1}, \text{ т. е. } a = -4.$$

Если решением является отрезок *BK*, то вектор $\vec{c}$ будет перпендикулярен прямой $x_2 = 0$, а это возможно при $a = 0$.

Если решением является отрезок *NK*, то вектор $\vec{c}$ будет перпендикулярен прямой $x_1 - 2x_2 - 8 = 0$, а линия уровня $f = \text{const}$ будет параллельна этой прямой:

$$\frac{a}{1} = \frac{-2}{-2}, \text{ т. е. } a = 1.$$

2 Найдем значение параметра a, при котором задача не имеет решений.

Это возможно при $a > 1, f \to +\infty$. Задача не имеет решений в силу неограниченности функции цели.

Из пунктов 1 и 2 следует, что задача имеет единственное решение, если $a \in (-\infty;-4) \cup (-4;0) \cup (0;1)$.

Решим задачу для каждого значения параметра a.

При $a = -4$

$$X^1_{\max} = X_A = (0;6), \quad X^2_{\max} = X_B = (3;0);$$

$$X_{\max} = \lambda X^1_{\max} + (1-\lambda) X^2_{\max}, \quad 0 \le \lambda \le 1;$$

$$X_{\max} = \lambda(0;6) + (1-\lambda)(3;0) = (3-3\lambda;6\lambda);$$

$$f_{\max} = -4(3-3\lambda) - 2\cdot 6\lambda = -12 + 12\lambda - 12\lambda = -12.$$

При $a = 0$

$$X^1_{\max} = X_B = (3;0), \quad X^2_{\max} = X_K = (8;0);$$

$$X_{\max} = \lambda X^1_{\max} + (1-\lambda) X^2_{\max}, \quad 0 \le \lambda \le 1;$$

$$X_{\max} = \lambda(3;0) + (1-\lambda)(8;0) = (8-5\lambda;0);$$

$$f_{\max} = 0\cdot(8-5\lambda) - 2\cdot 0 = 0.$$

При $a = 1$

$$X_{\max} = \{(8 + 2x_2; x_2) | x_2 \ge 0\};$$

$$f_{\max} = 1 \cdot (8 + 2x_2) - 2x_2 = 8.$$

Если $a < -4$, то решением является точка $A(0;6)$ и

$$f_{\max} = a \cdot 0 - 2 \cdot 6 = -12.$$

Если $-4 < a < 0$, то решением является точка $B(3;0)$ и

$$f_{\max} = a \cdot 3 - 2 \cdot 0 = 3a.$$

Если $0 < a < 1$, то решением является точка $K(8;0)$ и

$$f_{\max} = a \cdot 8 - 2 \cdot 0 = 8a.$$

Задания для самостоятельной работы

Решить задачи линейного программирования в зависимости от параметра:

1) $f = ax_1 + 4x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 - 4x_2 \le 8; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$$

2) $f = 3x_1 + ax_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_1 - x_2 \le 5; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$$

3) $f = ax_1 + 2x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 \le 20, \\ x_1 + x_2 \ge 2; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0;$$

4) $f = -2x_1 + ax_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 \le 10, \\ 4x_1 + x_2 \ge 16; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

5 Практическое занятие № 10. Построение сетевого графика, расчет временных параметров сетевого графика

При планировании и оперативном управлении сложными комплексами работ с успехом используются их графические модели – сетевые графики.

Пример – На заданном сетевом графике (рисунок 7) пронумеровать вершины в соответствии с алгоритмом Фалкерсона, определить критический путь, рассчитать временные параметры сети.

Решение

Построим сетевой график выполнения работ и пронумеруем события в соответствии с алгоритмом Фалкерсона.

Вычислим непосредственно на сетевом графике ранние $t_p(j)$ и поздние $t_n(j)$ сроки свершения событий, а также резервы времени событий $R(j)$ (рисунок 8).

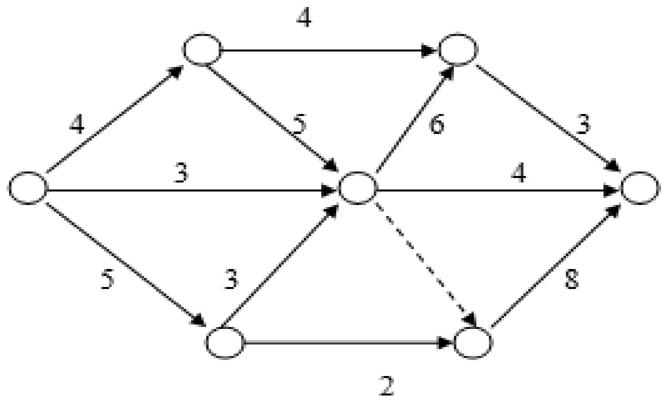


Рисунок 7

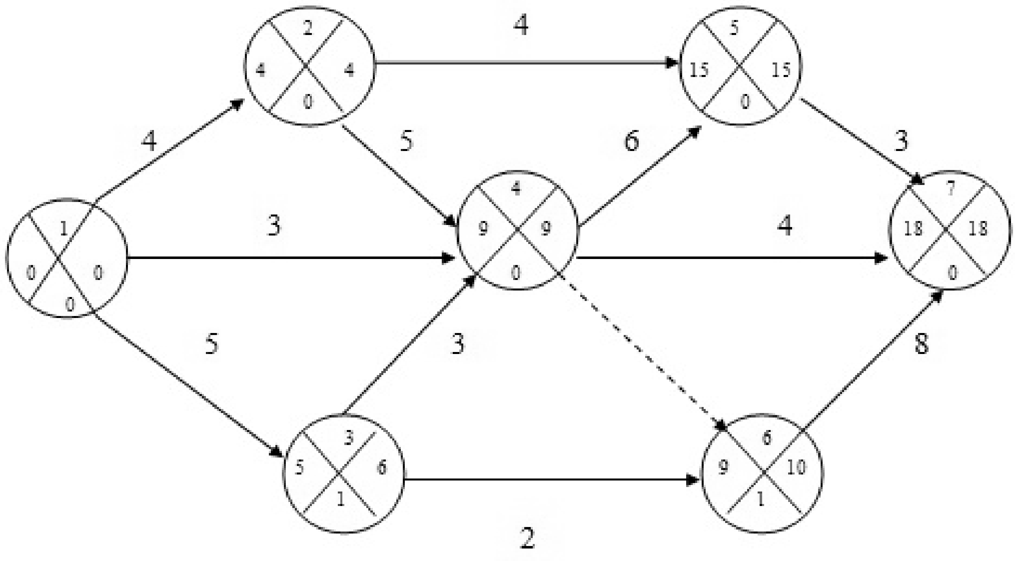


Рисунок 8

Следовательно, критический путь: 1–2–4–5–7; $t_{kp} = 18$ (рисунок 9).

Критические работы: (1;2), (2;4), (4;5), (5;7).

Для критических работ полные и свободные резервы времени равны 0.

Для остальных работ временные параметры вычисляются по следующим формулам:

$t_{р.н.}(i;j) = t_p(i)$ – ранний срок начала работы $(i;j)$;

$t_{р.о.}(i;j) = t_p(i) + t(i,j)$ – ранний срок окончания работы $(i;j)$;

$t_{п.н.}(i;j) = t_n(j) - t(i,j)$ – поздний срок начала работы $(i;j)$;

$t_{п.о.}(i;j) = t_n(j)$ – поздний срок окончания работы $(i;j)$;

$R_n(i;j)=t_n(j)-t_p(i)-t(i;j)=t_{n.o.}(i;j)-t_{p.o.}(i;j)$ – полный резерв времени;

$R_c(i;j)=t_p(j)-t_p(i)-t(i;j)=t_p(j)-t_{p.o.}(i;j)$ – свободный резерв времени.

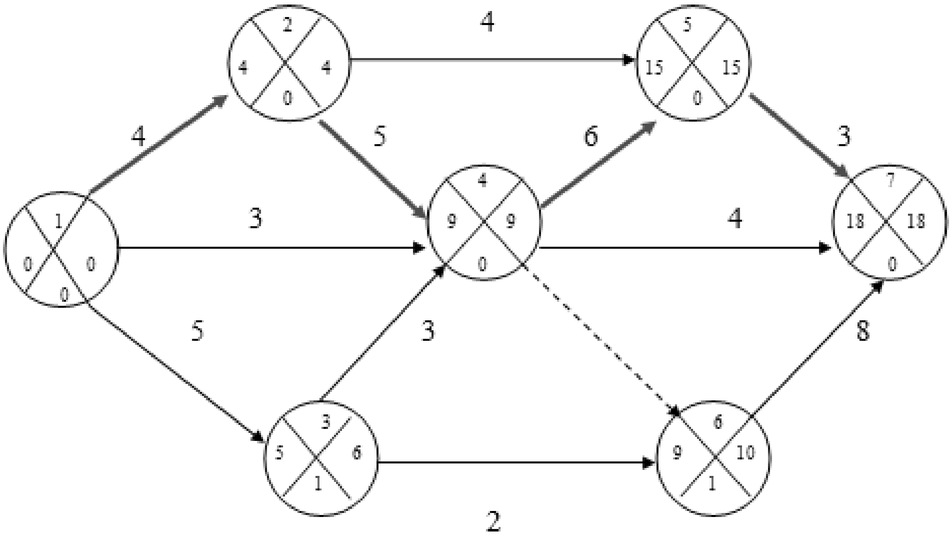


Рисунок 9

Вычислим временные параметры работ (таблица 12).

Таблица 12

$(i;j)$	(1;3)	(1;4)	(2;5)	(3;4)	(3;6)	(4;7)	(6;7)
t	5	3	4	3	2	4	8
$t_{р.н.}$	0	0	4	5	5	9	9
$t_{р.о.}$	5+0	3+0	4+4	3+5	2+5	4+9	8+9
$t_{п.н.}$	6–5	9–3	15–4	9–3	10–2	18–4	18–8
$t_{п.о.}$	6	9	15	9	10	18	18
$R_п$	6–5	9–3	15–8	9–8	10–7	18–13	18–17
R_c	5–5	9–3	15–8	9–8	9–1	18–13	18–17

Следовательно, временные параметры работ представлены в таблице 13.

Таблица 13

$(i;j)$	(1;3)	(1;4)	(2;5)	(3;4)	(3;6)	(4;7)	(6;7)
t	5	3	4	3	2	4	8
$t_{р.н.}$	0	0	4	5	5	9	9
$t_{р.о.}$	5	3	8	8	7	13	17
$t_{п.н.}$	1	6	11	6	8	11	10
$t_{п.о.}$	6	9	15	9	10	18	18
$R_п$	1	6	7	1	3	5	1
R_c	0	6	7	1	2	5	1

Критический путь: 1–2–4–5–7; $t_{kp}=18$.

Задания для самостоятельной работы

На заданном сетевом графике пронумеровать вершины в соответствии с алгоритмом Фалкерсона, определить критический путь, рассчитать временные параметры сети (рисунок 10).

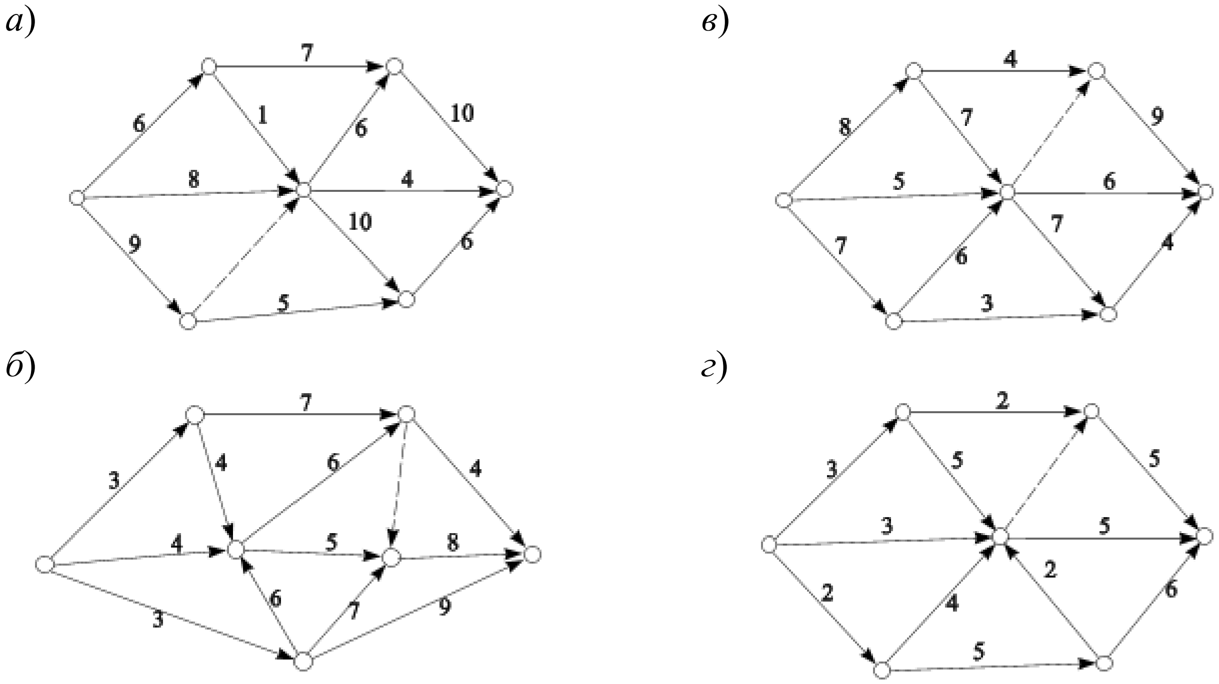


Рисунок 10

6 Практические занятия № 11 и 12. Построение математических моделей задач дискретного программирования. Эвристические методы решения задач дискретного программирования

Рассмотрим решение задачи о рюкзаке (о погрузке транспортного судна).

Контейнер оборудован m отсеками вместимостью $b_i\left(i=\overline{1,m}\right)$. Для перевозки n видов продукции. Продукция характеризуется свойствами неделимости, то есть её можно брать по 0, 1, 2, … ед.

Пусть a_{ij} – расход i-го отсека для перевозки j-й продукции.

Обозначим через c_j полезность единицы j-й продукции. Требуется найти план перевозки максимизирующий общую полезность рейса.

Математическая модель задачи имеет следующий вид:

$$f=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\max;$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i, i=\overline{1,m},$$

$$x_j\ge 0, x_j\in Z, j=\overline{1,n}.$$

Если имеется один отсек и каждый предмет можно брать или нет, то мы получаем задачу о рюкзаке, математическая запись которой имеет следующий вид:

$$f=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\max;$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j\le b_1,$$

$$x_j\in\{0;1\}.$$

Рассмотрим эвристический метод решения задачи о рюкзаке.

Пусть объем рюкзака $b_1=23$ ед. и имеется пять предметов, которые можно вложить в рюкзак, т. е. $n=5$. Известны полезности $c_1=8, c_2=7, c_3=6,$ $c_4=4, c_5=2.$

Известен объем, который занимает каждый предмет: $a_{11}=5, a_{12}=6,$ $a_{13}=7, a_{14}=6, a_{15}=5.$

Требуется определить набор предметов, которые можно вложить в рюкзак так, чтобы их суммарная полезность была максимальной. Запишем математическую модель такой задачи:

$$f=8x_1+7x_2+6x_3+4x_4+2x_5\to\max,$$

$$5x_1+6x_2+7x_3+6x_4+5x_5\le 23,$$

$$x_j\in\{0;1\}, j=\overline{1,5},$$

$X=(x_1;x_2;x_3;x_4;x_5)$ – план заполнения рюкзака.

Рассмотрим графическое решение задачи.

Построим точки (рисунок 11): $П_1(5;8), П_2(6;7), П_3(7;6), П_4(6;4), П_5(5;2).$

Будем вращать луч, начиная с оси Oy с центром в начале координат по ходу часовой стрелки. По мере вращения луча будем находить сумму абсцисс точек $П_j\left(j=\overline{1,5}\right)$, которые заметают луч.

Заметание происходит до тех пор, пока выполнится условие $\sum_{j=1}a_{1j}\le b_1$.

Предмет, вызывающий превышение величины b_1, в рюкзак не вносится, т. е. $x_j = 0$; после этого происходит дальнейшее заметание луча, пока не будут пересмотрены все предметы или не будет выполнено равенство $\sum_{j=1} a_{1j} = b_1$:

$5+6+7=18<23, \quad 18+6=24>23, \quad 18+5=23.$

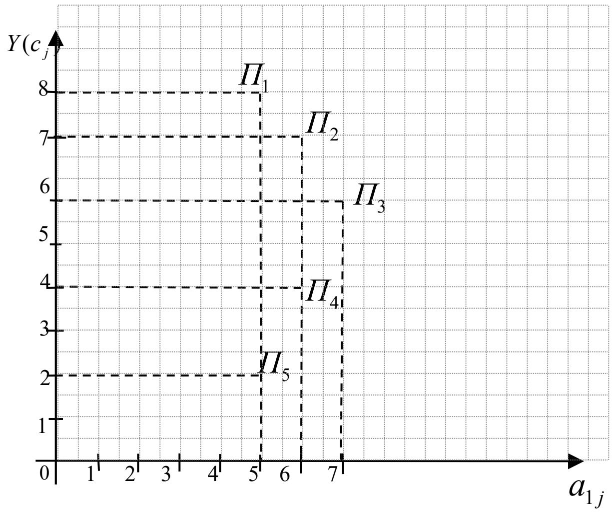


Рисунок 11

При этом $x_1 = x_2 = x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1.$

Ответ: план $X = (1;1;1;0;1)$, полезность $8+7+6+2=23$, вместимость (объем) равна 23.

Задания для самостоятельной работы

1 Составить математическую модель для следующей задачи: имеется n исполнителей, которые могут выполнить n различных работ. Известна полезность c_{ij} от выполнения i-м исполнителем j-й работы. Необходимо назначить исполнителей на работы так, чтобы суммарная полезность была наибольшей.

2 Решить задачу о рюкзаке аналитическим методом.

7 Практическое занятие № 13. Решение задачи коммивояжера методом ветвей и границ

Задача. Коммивояжер должен посетить каждый из пяти городов только один раз и вернуться в исходный пункт. Известна матрица расстояний между городами.

Требуется найти маршрут минимальной суммарной длины методом ветвей и границ.

Решение

Пусть дана матрица расстояний между городами

$$\begin{bmatrix} \infty & 10 & 9 & 7 & 8 \\ 8 & \infty & 9 & 10 & \infty \\ 7 & 9 & \infty & 4 & 5 \\ 7 & 11 & 9 & \infty & 8 \\ 10 & 8 & 9 & 11 & \infty \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим метод ветвей и границ.

Найдем минимальные значения u_i в строках и приведем матрицу по строкам:

$$C = \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} \infty & 10 & 9 & 7 & 8 \\ 8 & \infty & 9 & 10 & \infty \\ 7 & 9 & \infty & 4 & 5 \\ 7 & 11 & 9 & \infty & 8 \\ 10 & 8 & 9 & 11 & \infty \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_i \\ 7 \\ 8 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{array} \quad \Rightarrow \quad C' = \begin{bmatrix} \infty & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \infty & 1 & 2 & \infty \\ 3 & 5 & \infty & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & \infty & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & \infty \end{bmatrix}.$$

Найдем минимальные значения v_j в столбцах и приведем матрицу по столбцам:

$$\begin{array}{cc} C' = & \begin{bmatrix} \infty & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \infty & 1 & 2 & \infty \\ 3 & 5 & \infty & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & \infty & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & \infty \end{bmatrix} \\ v_j & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \end{array} \quad \Rightarrow \quad C'' = \begin{bmatrix} \infty & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 0 & 2 & \infty \\ 3 & 5 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & \infty & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix}.$$

Нижняя граница множества Ω равна $\varphi(\Omega) = \gamma = \sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j$.

Таким образом,

$$\gamma = \sum_{i=1}^{5} u_i + \sum_{j=1}^{5} v_j = 34 + 2 = 36, \quad \varphi(\Omega) = \gamma = 36.$$

Определим степени нулевых элементов:

$$\begin{bmatrix} \infty & 3 & 1 & 0^0 & 0^0 \\ 0^0 & \infty & 0^0 & 2 & \infty \\ 3 & 5 & \infty & 0^0 & 0^0 \\ 0^0 & 4 & 1 & \infty & 0^0 \\ 2 & 0^3 & 0^0 & 3 & \infty \end{bmatrix}.$$

Определяем перспективную дугу и строим множества $\Omega^1_{i_0 j_0}$ и $\Omega^1_{\overline{i_0 j_0}}$. Найдём элемент с максимальной степенью и удалим строки и столбец, в которых он находится. В данном случае $\Omega^1_{i_0 j_0} = \Omega^1_{5,2}$:

$$\Omega^1_{5,2} = \begin{bmatrix} \infty & 3 & 1 & 0^0 & 0^0 \\ 0^0 & \infty & 0^0 & 2 & \infty \\ 3 & 5 & \infty & 0^0 & 0^0 \\ 0^0 & 4 & 1 & \infty & 0^0 \\ 2 & \boxed{0^3} & 0^0 & 3 & \infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \infty & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \infty \\ 3 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \infty & 0 \end{bmatrix}.$$

Запишем данную матрицу в более удобном виде.

$\Omega^1_{5,2}$	1	3	4	5
1	∞	1	0	0
2	0	0	2	∞
3	3	∞	0	0
4	0	1	∞	0

Найдём нижнюю границу множества $\Omega^1_{5,2}$, для этого приводим матрицу сначала по строкам, затем по столбцам.

$\Omega^1_{5,2}$	1	3	4	5	u_i
1	∞	1	0	0	0
2	0	0	2	∞	0
3	3	∞	0	0	0
4	0	1	∞	0	0

$\Rightarrow$

C'	1	3	4	5
1	∞	1	0	0
2	0	0	2	∞
3	3	∞	0	0
4	0	1	∞	0

C'	1	3	4	5
1	∞	1	0	0
2	0	0	2	∞
3	3	∞	0	0
4	0	1	∞	0
v_j	0	0	0	0

$\Rightarrow$

C''	1	3	4	5
1	∞	1	0	0
2	0	0	2	∞
3	3	∞	0	0
4	0	1	∞	0

Таким образом,

$$\Omega^1_{5,2} = C' = C'', \quad \gamma^1_{5,2} = \sum_{i=1}^{5} u_i + \sum_{j=1}^{5} v_j = 0 + 0 = 0.$$

Следовательно, нижняя граница $\varphi(\Omega^1_{5,2}) = \varphi(\Omega) + \gamma^1_{5,2} = 36.$

Рассмотрим теперь множество $\Omega^1_{\overline{i_0 j_0}} = \Omega^1_{\overline{5,2}}$.

$$\Omega^1_{\overline{5,2}} = \begin{bmatrix} \infty & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 0 & 2 & \infty \\ 3 & 5 & \infty & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & \infty & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & \infty \end{bmatrix}.$$

Приводим матрицу по строкам и по столбцам.

$\Omega^1_{\overline{5,2}}$	1	2	3	4	5	u_i
1	∞	3	1	0	0	0
2	0	∞	0	2	∞	0
3	3	5	∞	0	0	0
4	0	4	1	∞	0	0
5	2	∞	0	3	∞	0

$\Rightarrow$

C'	1	2	3	4	5
1	∞	3	1	0	0
2	0	∞	0	2	∞
3	3	5	∞	0	0
4	0	4	1	∞	0
5	2	∞	0	3	∞

C'	1	2	3	4	5
1	∞	3	1	0	0
2	0	∞	0	2	∞
3	3	5	∞	0	0
4	0	4	1	∞	0
5	2	∞	0	3	∞
v_j	0	3	0	0	0

$\Rightarrow$

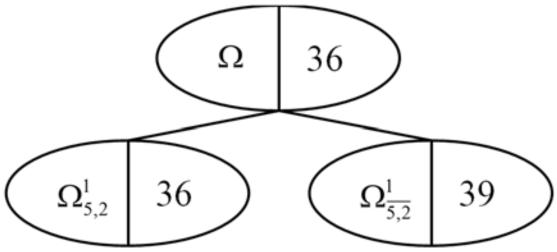
C''	1	2	3	4	5
1	∞	0	1	0	0
2	0	∞	0	2	∞
3	3	2	∞	0	0
4	0	1	1	∞	0
5	2	∞	0	3	∞

Получаем

$$\gamma^1_{\overline{5,2}} = \sum_{i=1}^{5} u_i + \sum_{j=1}^{5} v_j = 0 + 3 = 3.$$

Следовательно, нижняя граница $\varphi(\Omega^1_{\overline{5,2}}) = \varphi(\Omega) + \gamma^1_{\overline{5,2}} = 39.$

Таким образом, получаем следующее.



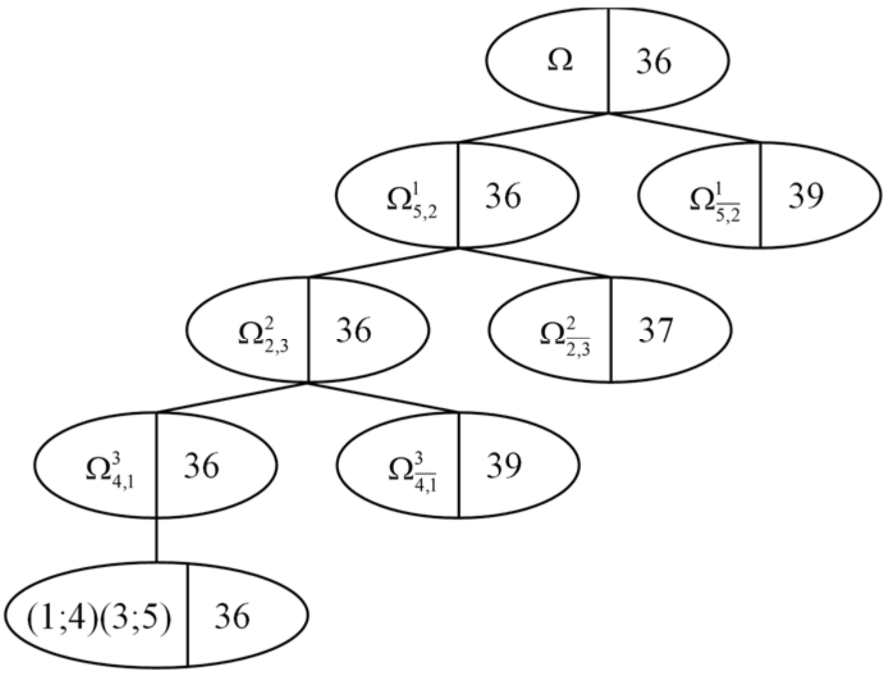
Дальнейшему делению подлежит множество с наименьшей нижней границей, а именно множество $\Omega^1_{5,2}$.

Определим степени нулевых элементов. Найдём элемент с максимальной степенью и удалим строки и столбец, в которых он находится.

$\Omega^1_{5,2}$	1	3	4	5
1	∞	1	0^0	0^0
2	0^0	$\boxed{0^1}$	2	∞
3	3	∞	0^0	0^0
4	0^0	1	∞	0^0

Получаем множества $\Omega^2_{2,3}$ и $\Omega^2_{\overline{2,3}}\,\Omega^2_{\overline{2,3}}$. С ними поступаем так, как это делали ранее.

В результате последовательных преобразований получаем гамильтонов контур следующего вида: $1-5-2-3-4-1$.



Таким образом, допустимый план

$$X=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}.$$

Функция цели $f=36$.

Задания для самостоятельной работы

Коммивояжер должен посетить каждый из пяти городов только один раз и вернуться в исходный пункт. Известна матрица расстояний между городами:

1) $\begin{bmatrix}\infty&16&9&12&11\\8&\infty&7&8&9\\10&9&\infty&12&7\\12&9&10&\infty&14\\11&8&9&15&\infty\end{bmatrix}$; **3)** $\begin{bmatrix}\infty&24&25&19&15\\18&\infty&17&20&17\\18&19&\infty&21&25\\26&18&21&\infty&20\\15&\infty&18&21&\infty\end{bmatrix}$;

2) $\begin{bmatrix}\infty&8&12&7&11\\14&\infty&11&10&9\\10&9&\infty&12&7\\12&11&9&\infty&8\\10&8&9&13&\infty\end{bmatrix}$; **4)** $\begin{bmatrix}\infty&5&9&\infty&10\\8&\infty&7&6&9\\5&6&\infty&9&7\\11&9&7&\infty&9\\12&8&9&6&\infty\end{bmatrix}$.

Требуется найти маршрут минимальной суммарной длины методом ветвей и границ.

8 Практическое занятие № 14. Решение полностью целочисленной задачи линейного программирования методом Гомори

Для решения целочисленной задачи методом Гомори вначале её необходимо преобразовать в задачу линейного программирования, которую решают без учета целочисленности. Далее среди дробных чисел выбирается элемент с наибольшей дробной частью и составляется дополнительное ограничение. Неравенство преобразуется в уравнение путем введения дополнительной неотрицательной переменной. Полученная задача решается симплексным методом.

Задания для самостоятельной работы

Решить задачи целочисленной оптимизации методом Гомори:

1) $f = 3x_1 + 2x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 - x_2 \le 4; \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ x_j \in Z;$

2) $f = x_1 + 3x_2 \to \max$;

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ 5x_1 + 4x_2 \le 20; \end{cases}$$

$x_j \ge 0,\ x_j \in Z.$

9 Практические занятия № 15 и 16. Построение математических моделей задач динамического программирования. Применение принципов оптимальности и погружения к решению задач динамического программирования

Некоторые задачи исследования операций обладают особенностями, а именно возможностью перехода от глобальной оптимизации к поэтапной. Такие задачи рассматриваются в динамическом программировании.

Особенности задач, решаемых принципами динамического программирования:

– исследуется система, состояние которой на каждом шаге $t, t = \overline{1, r}$ определяется вектором $\overline{X} = \left(x_{1t}, x_{2t}, ..., x_{rt}\right)$. Дальнейшее изменение состояния системы зависит от x_t и не зависит от того, каким способом система пришла в него. Такие процессы называются марковскими процессами или процессами без последствий;

– решение задачи представляет собой многошаговый процесс, каждый шаг которого состоит из принятия решения. Зависит это от вектора управления $U_t = (u_{1t}, u_{2t}, ..., u_{nt})$, под действием которого система из состояния X_{t-1} переходит в состояние X_t. Выбор вектора управления определяет траекторию поведения объекта;

– состояние системы на каждом этапе связано с определением выигрыша или потери;

– выигрыш (потеря) зависит от состояния на начало этапа X_{t-1} и принятого решения U_t, и не зависит от того, каким путём объект попал в состояние X_{t-1}.

Принципы динамического программирования: принцип оптимальности и принцип погружения.

Принцип оптимальности заключается в том, что система на каждом шаге стремится не к изолированной оптимизации функции цели, а стремится выбирать оптимальное управление U_t^* в предположении об оптимальности всех последующих шагов, т. е. требуется находить на каждом шаге условно оптимальное направление.

Принцип оптимальности тесно связан с принципом погружения, согласно которому при решении исходной задачи система как бы погружается в семейство подобных ей задач. Находится оптимальное значение функции цели для одного, для двух и т. д. этапов.

Задание для самостоятельной работы

Предприятие должно разработать квартальный план выпуска некоторого изделия, ежемесячный спрос на который равен 3 ед. Уровень запасов как на начало, так и на конец планового периода равен нулю. Производственные мощности предприятия не позволяют выпускать более 5 ед. изделия в месяц, а складские площади рассчитаны на содержание к концу месяца не более 4 ед. продукции. Общие затраты $c_i\left(x_i;t_i\right)$, связанные с изготовлением изделий, складываются из производственных затрат $c\left(x_i\right)$ и затрат ht_i, обусловленных содержанием запасов, т. е. $c_i\left(x_i;t_i\right)=c\left(x_i\right)+ht_i$, где x_i – объём выпуска изделия в течение месяца t, t_i – уровень запасов на конец месяца t.

Производственные затраты $c\left(x_i\right)$ включают условно-постоянные затраты, равные 13 усл. ед., и пропорциональные затраты, равные 2 усл. ед. на каждую единицу изделия. Приведем в таблице 14 производственные затраты $c(x)$ в зависимости от объёма выпуска изделия:

Таблица 14

x	0	1	2	3	4	5
$c(x)$	0	15	17	19	21	23

Затраты, связанные с содержанием запасов, численно равны уровню запасов на конец месяца (h = 1). Требуется разработать план выпуска изделия, при котором общая сумма затрат на производство и на содержание запасов будет минимальной при условии полного и своевременного удовлетворения спроса на это изделие.

10 Практическое занятие № 17. Решение задачи квадратичного программирования

Классическим методом решения задач математического программирования, в частности квадратичного, является метод множителей Лагранжа. Это метод отыскания условного экстремума функции нескольких переменных $F(x_1,x_2,...,x_n)$ в задачах с ограничениями в виде равенств при отсутствии требований неотрицательности и целочисленности переменных**.**

Пусть все ограничения имеют вид равенств

$$\varphi_j(x_1, x_2, ..., x_n) = b_j, \quad j = \overline{1, m}. \tag{16}$$

Преобразуем их к виду $b_j - \varphi_j(x_1, x_2, ..., x_n) = g_j(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$. Будем полагать, что функции $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $g(x_1, x_2, ..., x_n)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные. Объединив функцию $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ с ограничениями, используя неотрицательные постоянные множители $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, образуем вспомогательную функцию

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda) = F(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{17}$$

Справедлива следующая ***теорема***: если функция $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ достигает своего экстремума при условиях (16) в точке $\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$, то существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, что для функции $L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda)$ в точке $\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$ выполняются необходимые условия безусловного экстремума, т. е.

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{18}$$

Функция $L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda)$ называется ***функцией Лагранжа***, а числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ – ***неопределенными множителями Лагранжа***.

Таким образом, вычисление условного экстремума функции $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ сводится к отысканию безусловного экстремума функции Лагранжа (17). Задача состоит в нахождении $n + m$ неизвестных, включающих n переменных x_i и m множителей Лагранжа. Для их определения используется система из m ограничений и n уравнений (18), являющихся условиями экстремума функции Лагранжа.

Обобщением классического метода неопределенных множителей Лагранжа на задачи с ограничениями в виде неравенств вида $g_j(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0$ и ограничениями на знак переменных $x_i \ge 0$ является теорема Куна – Таккера.

Пусть имеется следующая задача:

$$\min\left\{F(x_1, x_2, ...x_n) \mid g_j(x_1, x_2, ...x_n) \le 0, x_i \ge 0\right\}, \quad j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}, \tag{19}$$

где $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $g_j(x_1, x_2, ..., x_n)$ – выпуклые функции n переменных.

Введем функцию Лагранжа (17), используя совокупность неопределенных множителей Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$.

Теорема Куна – Таккера: пусть существует вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ такой, что $x_i \geq 0$ и $g_j(x_1, x_2, ..., x_n) \leq 0$. Тогда для того, чтобы вектор $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$ был оптимальным решением задачи (19), необходимо и достаточно, чтобы существовал неотрицательный m-мерный вектор $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ такой, что

$$L(x^*, \lambda) \leq L(x^*, \lambda^*) \leq L(x, \lambda^*) \quad \forall x \geq 0, \forall \lambda \geq 0. \tag{20}$$

Выражение (20) означает, что функция L в точке (x^*, λ^*) при фиксированном x^* имеет глобальный максимум в области $\lambda \geq 0$ при $\lambda = \lambda^*$, а при фиксированном λ^* она имеет глобальный минимум в области $x \geq 0$ при $x = x^*$. Экстремальная точка (x^*, λ^*) с такими свойствами называется ***седловой точкой***, а теорему Куна – Таккера часто называют ***теоремой о седловой точке***. Итак, задаче (19) минимизации $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ соответствует задача нахождения седловой точки (минимаксная задача) для функции L, в которой из всех ограничений сохраняются только ограничения на знак.

Если $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $g_j(x_1, x_2, ..., x_n)$ являются дифференцируемыми функциями, то условия теоремы Куна – Таккера записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial L}{\partial x_i}\right|_{x^*, \lambda^*} \geq 0, \\ x_i^* \left.\dfrac{\partial L}{\partial x_i}\right|_{x^*, \lambda^*} = 0, \\ x_i^* \geq 0, i = \overline{1, n}; \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j}\right|_{x^*, \lambda^*} \leq 0, \\ \lambda_j^* \left.\dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j}\right|_{x^*, \lambda^*} = 0, \\ \lambda_j^* \geq 0, j = \overline{1, m}. \end{cases} \tag{22}$$

Для точек, где $x_i > 0$, в точке минимума должно выполняться условие $\left.\dfrac{\partial L}{\partial x_i}\right|_{x^*, \lambda^*} = 0$, а на границе области, где $x_i = 0$, отклонения от оптимальной точки возможны только в сторону увеличения x_i, при этом $\left.\dfrac{\partial L}{\partial x_i}\right|_{x^*, \lambda^*} > 0$.

Аналогично по переменной λ для внутренних точек $(\lambda > 0)$ выполняется равенство нулю производной, а для граничных точек $(\lambda = 0)$ первая производная для случая максимума должна быть неположительной, т. е. $\left.\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}\right|_{x^*, \lambda^*} < 0$.

Условия (21) и (22) эквивалентны (20), т. е. являются необходимыми и достаточными для оптимальности x^* в случае выпуклости $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ и всех ограничений задачи. Если имеется в виду седловая точка с максимумом по x и минимумом по λ, то знаки неравенств в первых строчках систем (21) и (22) изменяются на противоположные.

Решим задачу квадратичного программирования:

$$f = 2x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max.$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8, \\ 3x_1 - x_2 \le 9, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Выпишем квадратичную форму:

$$XDX^{'} = -x_1^2 - x_2^2.$$

Проверим выполнимость условия Слейтера. Для этого запишем матрицу D:

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ |\alpha_{11}| = -1, \ |\alpha_{22}| = 1.$$

Так как знаки чередуются, то квадратичная форма является отрицательно-определенной, а значит вогнутой.

Так как функция цели f состоит из суммы линейной части и квадратичной формы и является вогнутой (выпуклой вниз), то и функция f является вогнутой (выпуклой вниз).

Система ограничений задачи

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8, \\ 3x_1 - x_2 \le 9, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

также выпуклое множество.

Данная задача удовлетворяет условиям Слейтера, а значит имеет локальный максимум.

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = 2x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + \lambda_1(8 - 2x_1 - x_2) + \lambda_2(9 - 3x_1 + x_2),$$

где λ_1, λ_2 – неопределенные множители Лагранжа.

Находим частные производные функции Лагранжа по входящим переменным x_j, λ_i, $j = 1,2$, $i = 1,2$.

Составляем систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \geq 2, \\ 2x_2 + \lambda_1 - \lambda_2 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ 3x_1 - x_2 \leq 9. \end{cases} \qquad (23)$$

Решая данную задачу симплексным методом, получим две седловые точки: $(X_1, \lambda_1) = \left(0; \frac{1}{2} \middle| 1; 0\right)$, $(X_2, \lambda_2) = (1;1|0;0)$.

Для определения точки максимума воспользуемся равенствами локальных условий Куна-Таккера:

$$\begin{cases} x_1 \cdot (2 - 2x_1 - 2\lambda_1 - 3\lambda_2) = 0, \\ x_2 \cdot (2 - 2x_2 - \lambda_1 + \lambda_2) = 0, \\ \lambda_1 \cdot (8 - 2x_1 - x_2) = 0, \\ \lambda_2 \cdot (9 - 3x_1 + x_2) = 0; \end{cases} \qquad (24)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0.$$

Вторая точка удовлетворяет локальным условиям теоремы Куна – Таккера. Из этого следует, что (X^*, λ^*) является седловой точкой задачи квадратичного программирования.

$$L(X^*, \lambda^*) = f(X^*) = 2;$$

$$X^*_{\max}(1;1), \ f^*_{\max} = 2.$$

Задания для самостоятельной работы

Найти минимальное значение функции z при заданных ограничениях методом множителей Лагранжа.

1) $z = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y + 12, \quad x^2 + y^2 - 4x - 8y + 10 > 0;$

2) $z = -\frac{10}{13}x - \frac{15}{13}y + \frac{105}{13}, \quad x^2 + y^2 + 2x + 4y - 8 > 0;$

3) $z = -\frac{20}{17}x - \frac{5}{17}y + \frac{195}{17}, \quad x^2 + y^2 + 10x - 4y + 12 > 0$;

4) $z = -x - \frac{1}{2}y + \frac{17}{2}, \quad x^2 + y^2 - 6x + 2y - 10 > 0$;

5) $z = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{57}{5}, \quad x^2 + y^2 - 10x - 8y + 16 > 0$.

Список литературы

1 **Кузнецов, А. В.** Высшая математика. Математическое программирование / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – Минск: Вышэйшая школа, 1994. – 286 с.

2 **Мину, М.** Математическое программирование. Теория и алгоритмы / М. Мину. – Москва : Наука, 1990. – 486 с.