МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И ТЕОРИЯ ИГР

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов направления подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» дневной формы обучения

Могилев 2022

УДК 517.9
ББК 22.161.8
И18

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «29» сентября 2022 г., протокол № 1

Составители: А. М. Бутома;
канд. физ.-мат. наук, доц. Л. И. Сотская

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. И. И. Маковецкий

Методические рекомендации содержат задания для практических занятий по дисциплине «Исследование операций и теория игр», приведены образцы решения примеров, перечень необходимой литературы.

Учебно-методическое издание

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И ТЕОРИЯ ИГР

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	А. А. Подошевко
Компьютерная верстка	Е. В. Ковалевская

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Практическое занятие № 1. Задачи исследования операций. Этапы исследования операций

Под *операцией* принято понимать совокупность взаимосогласованных действий или мероприятий, направленных на достижение вполне определенных целей.

Основная задача исследования операций – обоснование наилучших решений для лица, принимающего решение (ЛПР), в предстоящих условиях проведения операции. Рассматривают статические и динамические постановки задач исследования операций. В динамической постановке имеется возможность уточнения решения в зависимости от текущего состояния операции, и цель операции может достигаться путем выполнения последовательности задач.

Примеры операций:

– совокупность мероприятий, направленных на достижение максимальной рентабельности предприятия;

– система мероприятий, направленных на повышение надежности, устойчивости и безопасности технической системы;

– наилучшее распределение n механизмов по m работам;

– оптимальный выбор между потреблением и накоплением капитала;

– построение наилучшего календарного плана выполнения работ.

Исследование операций представляет собой анализ и поиск наилучших и безопасных путей достижения цели путем организации и проведения мероприятий, необходимость которых выявлена на основе применения современных методов математического моделирования операции, математических методов анализа, оптимизации и принятия решения в различных условиях.

Условия принятия решений разделяются на условия определенности, неопределенности в выборе цели, безопасности риска и условия конфликта.

Условия определенности имеют место тогда, когда при проведении операции не возникают неопределенные и случайные факторы, а последствия принятого решения определены однозначно, т. е. каждому решению всегда соответствует строго определенный результат. При этом задача выбора решения сводится к задаче математического программирования или к вариационной задаче теории управления систем.

Условия неопределенности в выборе цели определяются наличием не одной, а нескольких целей операции, и результат принятия решения характеризуется выбором (вектором) значений скалярных функций. Задача выбора решения в таких условиях сводится к задаче векторной оптимизациии, ее компромиссному решению.

Условия безопасности риска имеют место тогда, когда при проведении операции возникают случайные факторы с известными для них законами распределения вероятностей и последствия принятого решения на этапе планирования операции представляются не одним результатом, а некоторым множеством с известными вероятностями их осуществления. Задача выбора решения в условиях безопасности риска сводится к задаче принятия статистических решений при простых или сложных альтернативных гипотезах.

Условия конфликта определяются тем, что каждому решению соответствует результат, являющийся функцией от действий противодействующей стороны или совокупности противодействующих сторон. Причем противодействующие стороны действуют в конфликте как независимо одна от другой, так и в составе независимых коалиций. И конфликт может быть либо антагонистическим, либо с непротивоположными интересами. В последнем случае стороны, учавствующие в операции, могут принимать решения в зависимости от схемы обмена информацией об их возможных действиях. Задачи выбора решения в условиях конфликта формулируются как задачи теории классических и динамических игр.

Исследование каждой операции организуется и осуществляется до ее проведения в реальных условиях и подразделяется на следующие этапы:

1) определение цели (целей), постановка задач операции, разработка множества возможных способов вариантов действий, мероприятий, описание необходимых исходных данных, а также возможных условий проведения операции;

2) построение модели операции в виде математического описания цели, процессов операции, дающей возможность анализировать результаты проведения операции и сравнивать конкурирующие способы, варианты действий, мероприятия с учетом опасных и безопасных ситуаций.

Математическая модель каждой конкретной операции существенно зависит от ее содержательного характера, от знания факторов, определяющих ход операции во времени и пространстве, от взаимосвязей между факторами, а также от полноты логико-математического описания всех компонентов операции, взаимосвязей между ними и условий принятия решений.

Обобщенная модель операции считается составленной, если определены следующие ее компоненты:

– оперирующая сторона;

– исследователь операции;

– факторы и ограничения, определяющие условия принятия решения (факторы определенные, неопределенные, случайные, контролируемые, неконтролируемые);

– информационная гипотеза;

– активные средства;

– стратегии, ситуации;

– критерий эффективности.

Опишем эти компоненты в конкретном примере.

Пример – Имеется k станций, на которых необходимо с помощью кранов произвести выгрузку грузов. Работа по выгрузке на станциях ведется параллельно, и время выгрузки на каждой станции зависит от количества выделенных для нее кранов. Требуется распределить D кранов по станциям таким образом, чтобы общее время выгрузки было минимальным.

Решение

Компоненты соответстующей модели операции:

– оперирующая сторона – организация, в распоряжении которой имеются краны;

– исследователь операции – лицо, выполняющее решение задачи с использованием математических методов; исследователь операции обосновывает данные для оперирующей стороны по оптимальному распределению кранов по станциям;

– информационная гипотеза – раскрывает только исходные данные о поступлении грузов на соответствующие станции;

– активные средства – общее количество кранов выгрузки грузов (D);

– стратегии – возможные варианты распределения кранов по станциям

$$\sum_{j=1}^{k} d_j\left(x_j\right) \le D; \tag{1}$$

– критерий эффективности – общее время выгрузки грузов на всех станциях

$$T = \max\left[t_1\left(x_1\right), t_2\left(x_2\right), ..., t_k\left(x_k\right)\right].$$

Минимизация общего времени выгрузки грузов на множестве $\left\{x_j\right\}$, $j=\overline{1,k}$ и есть задача планирования распределения кранов по станциям при ограничении (1).

Неопределенных, случайных, неконтролируемых факторов в модели нет, однако имеет место неопределенность, порождаемая необходимостью учета ограничения на время выгрузки, вида:

$$\max\left[t_1\left(x_1\right), t_2\left(x_2\right), ..., t_k\left(x_k\right)\right],$$

где x_j – вариант выделения кранов для разгрузки груза на j-й станции, $j = 1, 2, ..., k$.

Задания для самостоятельной работы

Составить обобщенные модели операции в следующих задачах.

1 Предположим, имеется некий владелец автомобиля, который каждый год решает задачу о том, что делать с автомобилем в следующем году:

– продать данный автомобиль и купить новый;

– отремонтировать и ездить дальше на старом автомобиле.

Каждый вариант влечет за собой определенные затраты. Целью операции является определение такого плана на m лет вперед, чтобы затраты были минимальны.

2 Курьер осуществляет доставку почтового отправления, пользуясь метро. Предположим, что он еще не был на соответствующей станции метро по месту доставки, т. е. не знает, в каком конце платформы находится выход. Необходимо так определить место посадки в поезде, чтобы расстояние от места высадки с поезда до выхода на конечной станции было минимальным.

3 Сотрудник некоторой фирмы, расположенной в не очень большом городе, опаздывает на работу. Для того чтобы добраться до места работы, он может использовать следующие виды транспорта: общественный транспорт или такси. Для сотрудника важно минимизировать и время опоздания, и стоимость проезда. Следует составить план действий сотрудника, чтобы выполнялись оба критерия эффективности.

4 Форма склада имеет вид треугольника G с вершинами $A_j, j = 1,2,3$. На склад можно проникнуть только в точках A_j с вероятностями $P(A_j)$. Цель операции – наилучшим образом обезопасить склад, установив сторожевую вышку на территории склада, чтобы установить факт проникновения нарушителя на склад. Известно, что вероятность необнаружения нарушителя пропорциональна квадрату расстояния от места расположения вышки до него.

2 Практические занятия № 2–3. Виды игр. Выбор стратегий игроков. Матричные игры. Составление платежной матрицы

Теория игр занимается разработкой различного рода рекомендаций по принятию решений в условиях конфликтной ситуации. Формализуя конфликтные ситуации математически, их можно представить как игру двух, трех и более игроков, каждый из которых преследует цель максимизации своего выигрыша за счет другого игрока (игроков).

Таким образом, *игра – упрощенная модель конфликтной ситуации*.

Исход игры – это значение некоторой функции, называемой функцией выигрыша (платежной функцией).

Игры, в которых участвуют два игрока, называются *парными*, а игры с большим числом участников – *множественными*. Принятие игроком того или иного решения в процессе игры и его реализация называется ходом. Ход может быть *личным* и *случайным*. Если ход выбирается сознательно – это личный ход, а если с помощью механизма случайного выбора – случайный ход.

Шахматы являются примером игры двух партнеров с конечным числом личных ходов.

В зависимости от количества стратегий игры делятся на *конечные* и *бесконечные*. Так, в конечной игре каждый из игроков имеет конечное число возможных стратегий. Если же хотя бы один из игроков имеет бесконечное число возможных стратегий, то игра называется бесконечной.

В зависимости от взаимоотношений игроков игры делятся на *кооперативные*, *коалиционные* и *бескоалиционные*. Если игроки не имеют права вступать в соглашения, то такая игра относится к бескоалиционным, если же игроки могут создавать коалиции – к коалиционным. Кооперативная игра – это такая игра, в которой заранее определены коалиции.

В зависимости от вида функции выигрышей игры подразделяются на *матричные*, *биматричные, непрерывные, выпуклые*, а в зависимости от суммы выигрыша игры могут быть с *нулевой* или с *ненулевой суммой*. В играх с нулевой суммой сумма выигрыша переходит от одного партнера к другому, не поступая из внешних источников. Игра с нулевой суммой предусматривает, что сумма выигрышей всех игроков в каждой партии равна нулю.

Мы будем рассатривать матричные игры.

В общем случае матричная игра задается прямоугольной таблицей (матрицей) размерности $m \times n$. Описанная игра однозначно определяется матрицей

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij} \right]_{m\times n} \text{ или } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij} \right)_{m\times n}. \qquad (2)$$

Совокупность правил, однозначно определяющих последовательность действий стороны в конкретной конфликтной ситуации, есть *стратегия*. Номер i-й строки матрицы (2) соответствует номеру стратегии A_i, применяемой игроком A. Номер j-го столбца соответствует стратегии B_j, применяемой игроком B.

Различают стратегии *чистые* и *смешанные*. Чистая стратегия $A_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ первого игрока A (чистая стратегия $B_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ второго игрока B) – это возможный ход первого (второго) игрока, выбранный им с вероятностью, равной единице.

Пусть игроки A и B располагают конечным числом возможных действий – чистых стратегий. Игрок A может выбрать любую чистую стратегию A_i, в ответ на которую игрок B может выбрать любую чистую стратегию B_j. Если игра состоит только из личных ходов, то выбор пары стратегий $\left(A_i; B_j\right)$ единственным образом определяет результат a_{ij} – выигрыш игрока A. При этом проигрыш игрока B составляет $(-a_{ij})$.

Таким образом, матрица (2) представляет собой матрицу выигрышей игрока A (проигрышей игрока B) в том случае, если известны все значения a_{ij} выигрыша для каждой пары $\left(A_i; B_j\right)$ чистых стратегий.

Матричную игру часто записывают в развернутой форме (в виде таблицы), называемой платежной матрицей (таблица 1).

Таблица 1

$A_i \setminus B_j$	B_1	…	B_n	α_i
A_1	a_{11}	…	a_{1n}	α_1
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	…	a_{mn}	α_m
β_j	β_1	…	β_n	$\beta \setminus \alpha$

Число $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$ – это минимально возможный выигрыш игрока A, применяющего стратегию A_i, а число $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$ – максимально возможный проигрыш игрока B, если он пользуется стратегией B_j.

Число $\alpha = \max\limits_i \alpha_i = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$ называют *нижней чистой ценой игры* (*максимином*), а соответствующую ему чистую стратегию – *максиминной*.

Число $\beta = \min\limits_j \beta_j = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$ называют *верхней чистой ценой игры* (*минимаксом*), а соответствующую ему чистую стратегию – *минимаксной*.

Теорема 1. В матричной игре нижняя чистая цена игры не превосходит верхней чистой цены игры, т. е. $\alpha \le \beta$.

Если для чистых стратегий A_i^*, B_j^* игроков A и B соответственно имеет равенство $\alpha = \beta$, то пару чистых стратегий $(A_i^*; B_j^*)$ называют *седловой точкой матричной игры*, элемент a_{ij} матрицы, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца – *седловым элементом* платежной матрицы, а число $v = \alpha = \beta$ – *чистой ценой игры*.

Если же матричная игра не имеет седловой точки , т. е. $\alpha < \beta$, то решение игры затрудняется. Его находят, применяя *смешанные стратегии*.

Смешанной стратегией первого игрока называется вектор

$$\vec{p} = \left(p_1; ...; p_m\right), \tag{3}$$

где

$$p_i \ge 0 \ \left(i = \overline{1, m}\right) \text{ и } \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Смешанной стратегией второго игрока называется вектор

$$\vec{q} = \left(q_1; ...; q_n\right), \tag{4}$$

где

$$q_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right) \text{ и } \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Средняя величина выигрыша (проигрыша) является функцией от смешанных стратегий $\vec{p}$ и $\vec{q}$:

$$f\left(\vec{p},\vec{q}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j . \qquad (5)$$

Функция $f\left(\vec{p},\vec{q}\right)$ называется *платежной функцией* игры с матрицей $\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$.

Стратегии $\vec{p}^{\,*} = \left(p_1^*;...;p_m^*\right)$ и $\vec{q}^{\,*} = \left(q_1^*;...;q_n^*\right)$ называются *оптимальными*, если для произвольных стратегий (3) и (4) выпоняется условие

$$f\left(\vec{p},\vec{q}^{\,*}\right) \le f\left(\vec{p}^{\,*},\vec{q}^{\,*}\right) \le f\left(\vec{p}^{\,*},\vec{q}\right). \qquad (6)$$

Оптимальные смешанные стратегии матричной игры могут быть найдены в результате решения пары двойственных задач линейного программирования, к которым приводится данная матричная игра. Тройка $\left(A_i^*;B_j^*;v\right)$ называется решением игры.

Пример – Каждый из игроков A и B записывает одно из чисел 1, 4, 6, 9, затем они одновременно показывают написанное. Если оба числа оказались одинаковой четности, то сумму этих чисел выигрывает игрок A, если разной – выигрывает игрок B. Составить платежную матрицу, найти нижнюю и верхнюю чистые цены игры, максиминную и минимаксную стратегии игроков.

Решение

Чистыми стратегиями игрока A будут: A_1 – записать число 1, A_2 – записать число 4, A_3 – записать число 6, A_4 – записать число 9. У игрока B чистыми будут аналогичные стратегии.

Элемент $a_{11} = 2$, так как в ситуации $\left(A_1;B_1\right)$ оба игрока записывают нечетное число 1 и выигрыш игрока A равен 1 + 1 = 2. Элемент $a_{12} = -5$, так как в ситуации $\left(A_1;B_2\right)$ игрок A записывает число 1, а игрок B – число 4, т. е. числа разной четности, поэтому выигрыш игрока B равен 5, а выигрыш игрока A составит –5 (проигрыш равен 5). Аналогичным образом вычисляются остальные элементы платежной матрицы (таблица 2). После определения α_i и β_j замечаем, что нижняя цена игры $\alpha = \max_i \alpha_i = -7$ не равна верхней чистой цене игры $\beta = \min_j \beta_j = 10$, поэтому данная игра не имеет седловой точки.

Максиминной для игрока A будет чистая стратегия A_1. Пользуясь ею, игрок A выиграет не менее –7 (проиграет не более 7). Минимаксными для игрока B будут чистые стратегии B_1 и B_2, при которых он проиграет не более 10.

Таблица 2

$A_i \setminus B_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	2	–5	–7	10	–7
A_2	–5	8	10	–13	–13
A_3	–7	10	12	–15	–15
A_4	10	–13	–15	18	–15
β_j	10	10	12	18	$\alpha = -7$; $\beta = 10$

Задания для самостоятельной работы

1 Для матричных игр найти нижнюю и верхнюю цены игры, максиминную и минимаксную стратегии, установить наличие седловых точек:

а) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & -1 & 7 & -3 \\ 5 & 6 & 5 & 7 & 3 \\ 5 & 1 & 5 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 & -5 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & -4 & 10 \\ 1 & 3 & 5 & -1 & 9 \\ -1 & 2 & 1 & -5 & 8 \\ 0 & -5 & 4 & -6 & 6 \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} 3 & -5 & -4 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 9 \\ 4 & 1 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 5 \\ 2 & -3 & -5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$.

2 Два игрока могут записывать одно из трех чисел: 1, 2, 3. Если два числа оказались одинаковой четности, то выигрывает первый игрок сумму, равную сумме записанных чисел. Если числа оказались разной четности, то выигрывает второй игрок сумму записанных чисел. Составить платежную матрицу.

3 Игрок A может записать одну из цифр: 2, 4, 7. Игрок B может записать одну из цифр: 1, 3, 4, 8. Если обе цифры оказались одинаковой четности, то сумму этих чисел выигрывает игрок A, если разной – игрок B. В данной задаче указать возможные чистые стратегии игроков. Составить платежную матрицу, найти максиминную и минимаксную стратегии игроков.

3 Практическое занятие № 4. Доминирование стратегий. Упрощение платежной матрицы

Теорема 2. Оптимальные смешанные стратегии $\vec{p}^{\,*}=\left(p_1^*;...;p_m^*\right)$ и $\vec{q}^{\,*}=\left(q_1^*;...;q_n^*\right)$ игроков A и B в матричной игре $\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ с ценой v будут оптимальными и в матричной игре $\left(ba_{ij}+c\right)_{m\times n}$ с ценой $v'=bv+c$, где $b>0$.

На основании данной теоремы решение матричной игры можно упростить, выявив доминирование одних стратегий над другими.

Игрок A заинтересован в максимизации выигрыша, поэтому сравниваем строки. Если $a_{sj}\ge a_{tj}\left(j=\overline{1,n}\right)$, то выигрыш игрока A при стратегии A_s будет больше, чем при стратегии A_t.

Определение 1. Стратегия A_s называется доминирующей, а стратегия A_t – доминируемой, если для всех элементов соответствующих строк платежной матрицы выполняется неравенство $a_{sj}\ge a_{tj}\left(j=\overline{1,n}\right)$.

Игрок B заинтересован в минимизации проигрыша, поэтому сравниваем столбцы. Если все элементы $a_{ir}\ge a_{ik}\left(i=\overline{1,m}\right)$, то игроку B свой выбор выгодно сделать по *k*-му столбцу.

Определение 2. Стратегия B_k называется доминирующей, а стратегия B_r – доминируемой, если для всех элементов соответствующих столбцов платежной матрицы выполняется неравенство $a_{ir}\ge a_{ik}\left(i=\overline{1,m}\right)$.

Если в платежной матрице имеются строки (столбцы) с одинаковыми элементами, то такие строки (столбцы), а соответственно, и стратегии игроков A и B, называются дублирующими.

В матричной игре доминируемые и дублирующие стратегии можно опускать, так как вероятность их применения игроками A и B равна нулю.

Пример 1 – Выполнить возможные упрощения платежной матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решение

Поскольку соответствующие элементы второй и четвертой строк равны, то опустим, например, четвертую строку. Элементы первой строки меньше соответствующих элементов второй, а элементы пятой не превосходят соответствующих элементов третьей строки. Поэтому игроку A, стремящемуся максимизировать выигрыш, выгоднее применять стратегии A_2 и A_3, чем стратегии A_1 и A_5. В связи с этим опустим доминируемые первую и пятую строки. В преобразованной матрице

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

элементы первого и второго столбцов больше соответствующих элементов четвертого, поэтому игроку B, стремящемуся проиграть как можно меньше, выгоднее использовать стратегию B_4, чем B_1 или B_2. В связи с этим доминируемые первый и второй столбцы следует опустить. По аналогичной причине после сравнения пятого и третьего столбцов опускаем пятый столбец. В результате приходим к матрице

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$$

не подлежащей дальнейшему упрощению.

Пример 2 – Выполнить возможные упрощения платежной матрицы

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 4 & 9 \\ 6 & 8 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение

Вторая строка доминирует над первой, поэтому доминируемую первую строку опускаем. В полученной матрице

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 & 4 & 9 \\ 6 & 8 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

третий столбец доминирует над остальными. Опуская первый, второй и четвертый столбцы приходим к матрице

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix},$$

из которой видно, что наилучшей для игрока A является чистая стратегия A_2, обеспечивающая ему наибольший выигрыш, равный 4, а для игрока B – чистая стратегия B_3.

В данном примере в результате упрощения платежной матрицы удалось найти решение игры в чистых стратегиях. Объясняется это тем, что данная платежная матрица обладает седловым элементом $a_{23} = 4$, в чем легко убедиться, если проанализировать платежную матрицу в исходной записи.

Задания для самостоятельной работы

1 Выполнить возможные упрощения платежных матриц:

а) $\begin{bmatrix} 3 & -5 & -4 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 9 \\ 4 & 1 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 4 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ -5 & 1 & -3 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & -5 & 5 & -2 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 0 & 2 & 6 \\ 5 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

2 Для матричных игр найти нижнюю и верхнюю цены игры, установить наличие седловых элементов. Сделать возможные упрощения платежных матриц. При наличии седловых элементов найти решение игры:

а) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & -5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & -5 & 2 & -2 \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & -3 & -8 \\ 2 & -5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 1 \\ 7 & -1 & 3 & 0 & 8 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & -9 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 8 & 6 & 9 & 1 & 4 \\ 2 & -7 & 3 & -8 & 4 \end{bmatrix}$.

4 Практическое занятие № 5. Аналитический и графический методы решения матричной игры 2 × 2 в смешанных стратегиях

Пусть дана матричная игра с платежной матрицей

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Если эта матричная игра имеет седловую точку, то она имеет решение в чистых стратегиях, причем оптимальными стратегиями первого и второго игроков соответственно будут чистая максиминная и чистая минимаксеая стратегии.

Если же игра не имеет седловой точки, то она имеет решение в оптимальных смешанных стратегиях:

$$\vec{p} = (p_1; p_2),\ p_i \geq 0\ \left(i = \overline{1,2}\right),\ \sum_{i=1}^{2} p_i = 1;$$

$$\vec{q} = (q_1; q_2),\ q_j \geq 0\ \left(j = \overline{1,2}\right),\ \sum_{j=1}^{2} q_j = 1.$$

Запишем системы неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 \geq v, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 \geq v; \end{cases} \quad p_1 + p_2 = 1; \tag{7}$$

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 \leq v, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 \leq v; \end{cases} \quad q_1 + q_2 = 1. \tag{8}$$

Так как $\alpha \neq \beta$, то оба игрока имеют только такие оптимальные стратегии, которые используют все свои чистые стратегии с положительными вероятностями $\left(p_1^* > 0, p_2^* > 0, q_1^* > 0, q_2^* > 0\right)$. Таким образом, неравенства (7), (8) превращаются в равенства:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v; \end{cases} \tag{9}$$
$$p_1 + p_2 = 1;$$

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = v; \end{cases} \tag{10}$$
$$q_1 + q_2 = 1.$$

Геометрическая интерпретация решения матричной игры имеет вид, представленный на рисунке 1.

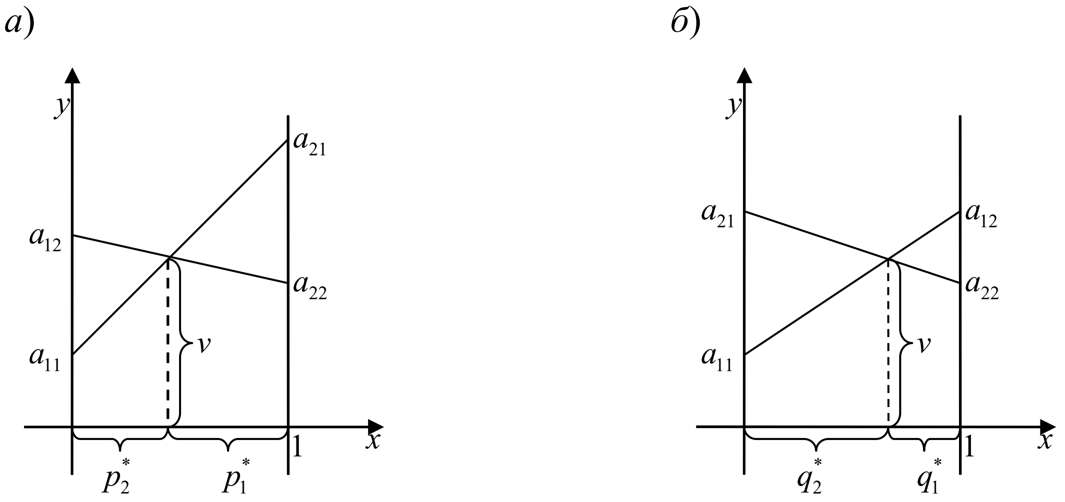

Рисунок 1

Аналитически решение игры получаем по следующим формулам:

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}};$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}};$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}};$$

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{v - a_{12}}{a_{11} - a_{12}};$$

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}} = \frac{a_{11} - v}{a_{11} - a_{12}}.$$

Задания для самостоятельной работы

Матричная игра задана платежной матрицей:

1) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$; **2)** $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$; **3)** $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$; **4)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Найти решение игры аналитическим и графическим методами.

5 Практическое занятие № 6. Решение матричной игры $m \times n$ сведением к задаче линейного программирования

Рассмотрим пример.

Две конкурирующие компании участвуют в реконструкции четырёх объектов. Прибыль компаний зависит от объема капитальных вложений в объекты и условий инвестирования. Считается, что прибыль первой компании равна величине убытка второй и представлена платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & -3 & -4 & 4 \\ -5 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Требуется определить оптимальные стратегии компаний, для чего:

1) произвести возможные упрощения платежной матрицы;

2) найти решение матричной игры сведением к паре задач линейного программирования.

Решение

1 В данной задаче две конкурирующие компании представляют игроков A и B. Платежная матрица имеет следующий вид (таблица 3).

Таблица 3

$A \setminus B$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	0	–1	5
A_2	–2	1	0	–2
A_3	–2	–3	–4	4
A_4	–5	1	0	–3

Определим верхнюю α и нижнюю β цены игры (таблица 4):

$$\alpha = \max_i \{\alpha_i\} = \max_i \min_j \{a_{ij}\}, \quad \beta = \min_j \{\beta_i\} = \min_j \max_i \{\alpha_{ij}\}.$$

Таблица 4

$A \setminus B$	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	1	0	–1	5	$\boxed{-1}$
A_2	–2	1	0	–2	–2
A_3	–2	–3	–4	4	–4
A_4	–5	1	0	–3	–5
β_j	1	1	$\boxed{0}$	5	$\alpha = -1; \beta = 0$

Так как $\alpha \neq \beta$ (см. таблицу 4), то данная игра не имеет седловой точки. Следовательно, игра не разрешима в чистых стратегиях. Для игр без седловых точек оптимальные стратегии игроков находятся в области смешанных стратегий.

Смешанной стратегией игрока A является вектор $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, компоненты которого удовлетворяют условиям $p_i \geq 0$ $(i = \overline{1,4})$, $\sum\limits_{i=1}^{4} p_i = 1$.

Смешанной стратегией игрока B является вектор $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4)$, компоненты которого удовлетворяют условиям $q_j \geq 0$ $(j = \overline{1,4})$, $\sum\limits_{j=1}^{4} q_j = 1$.

Замечание. *Компоненты* p_i *и* q_j *– вероятности, с которыми игроки* A *и* B *выбирают свои чистые стратегии* A_i *и* B_j.

Произведем возможные упрощения платежной матрицы (таблица 5).

Таблица 5

$p \setminus q$	q_1	q_2	q_3	q_4
p_1	1	0	–1	5
p_2	–2	1	0	–2
p_3	–2	–3	–4	4
p_4	–5	1	0	–3

Так как элементы четвёртого столбца больше (или равны) соответствующих элементов первого столбца (стратегия B_1 доминирует над стратегией B_4), удаляем из платежной матрицы четвёртый столбец (таблица 6).

Таблица 6

$p \setminus q$	q_1	q_2	q_3
p_1	1	0	–1
p_2	–2	1	0
p_3	–2	–3	–4
p_4	–5	1	0

Элементы второго столбца больше соответствующих элементов третьего столбца, т. е. стратегия B_3 доминирует над стратегией B_2, удаляем из платежной матрицы второй столбец (таблица 7).

Таблица 7

$p \setminus q$	q_1	q_3
p_1	1	–1
p_2	–2	0
p_3	–2	–4
p_4	–5	0

Элементы третьей строки меньше соответствующих элементов первой строки (стратегия A_1 доминирует над стратегией A_3), удаляем из платежной матрицы третью строку (таблица 8).

Таблица 8

$p \setminus q$	q_1	q_3
p_1	1	–1
p_2	–2	0
p_4	–5	0

Элементы четвёртой строки меньше соответствующих элементов второй строки (стратегия A_2 доминирует над стратегией A_4), удаляем четвёртую строку (таблица 9).

Таблица 9

$p \setminus q$	q_1	q_3
p_1	1	–1
p_2	–2	0

Таким образом, в результате упрощения получили платежную матрицу размерности 2×2. Избавимся от отрицательности, прибавив ко всем элементам матрицы $|-2|$ (таблица 10).

Таблица 10

$p \backslash q$	q_1	q_3
p_1	3	1
p_2	0	2

При этом введем новую цену игры $v' = v + 2$, где $\alpha < v < \beta$, т. е. $0 < v < 1$.

2 Решим матричную игру сведением к паре задач линейного программирования. По критерию оптимальности можно записать следующее:

$$\begin{cases} 3 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 \ge v', \\ 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 \ge v', \\ p_1 + p_2 = 1; \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} 3 \cdot q_1 + 1 \cdot q_3 \le v', \\ 0 \cdot q_1 + 2 \cdot q_3 \le v', \\ q_1 + q_3 = 1. \end{cases} \tag{12}$$

Разделим каждое неравенство и равенство систем (11) и (12) на $v' > 0$. Введем обозначения:

$$\frac{p_1}{v'} = x_1, \quad \frac{p_2}{v'} = x_2, \quad \frac{q_1}{v'} = y_1, \quad \frac{q_3}{v'} = y_2.$$

Цель первого игрока – максимизировать свой выигрыш (прибыль), следовательно, функция цели $F = \dfrac{1}{v'} \to \min$.

Цель второго игрока – минимизировать свой проигрыш (убытки), поэтому функция цели $Z = \dfrac{1}{v'} \to \max$.

Таким образом, получаем пару двойственных задач линейного программирования в симметричном виде:

$$F = x_1 + x_2 \to \min; \qquad Z = y_1 + y_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 \ge 1, \\ 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 \le 1, \\ 0 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 \le 1, \\ y_1 \ge 0, \ y_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решим задачу на максимум симплексным методом. Введем дополнительные переменные y_3, y_4:

$$Z = y_1 + y_2 + 0 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 + y_3 = 1, \\ 2y_2 + y_4 = 1, \\ y_j \geq 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Внесем данные в первую симплексную таблицу (таблица 11).

Таблица 11

Базисные переменные	l	Свободные переменные	
		$-y_1$	$-y_2$
$y_3 =$	1	3	1
$y_4 =$	1	0	2
$Z =$	0	–1	–1

Проводя последовательно симплексные преобразования, получим таблицу 12.

Таблица 12

Базисные переменные	l	Свободные переменные	
		$-y_3$	$-y_4$
$y_1 =$	1/6	1/3	–1/6
$y_2 =$	1/2	0	1/2
$Z =$	2/3	1/3	1/3

Оптимальный план задачи на максимум имеет вид:

$$Y^* = \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}; 0; 0 \right), \quad Z\left(Y^*\right) = \frac{2}{3}.$$

Введя дополнительные переменные x_3, x_4 в ограничения задачи на минимум, получим

$$F = x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 1, \\ x_i \geq 0, \quad x_i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Учитывая соответствие между переменными канонических форм двойственных ЗЛП, найдем значения компонент оптимального вектора задачи на минимум:

$$\begin{array}{cc|cc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_3 & y_4 & y_1 & y_2 \\ \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{array}.$$

Таким образом, имеем

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{1}{3}, \\ x_2^* = \dfrac{1}{3}; \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1^* = \dfrac{1}{6}, \\ y_2^* = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \qquad F = Z = \frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$v' = \frac{1}{F} = \frac{1}{Z} = \frac{3}{2};$$

$$p_1^* = x_1^* \cdot v' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}; \qquad p_2^* = x_2^* \cdot v' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2};$$

$$q_1^* = y_1^* \cdot v' = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4}; \qquad q_3^* = y_2^* \cdot v' = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

Цена игры при этом

$$v = v' - 2 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом, оптимальные смешанные стратегии игроков A и B (т. е. первой и второй компаний) соответственно имеют вид

$$\vec{p}^* = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0; 0 \right), \qquad \vec{q}^* = \left(\frac{1}{4}; 0; \frac{3}{4}; 0 \right).$$

Понимать это решение следует так: чтобы первая компания максимизировала свою прибыль, ей следует применять первую и вторую стратегии в одинаковом количестве, третью и четвертую стратегии применять не рекомендуется. Для того чтобы вторая компания минимизировала свои убытки, ей следует применять первую и третью стратегии, вторую и четвертую использовать нецелесообразно, причем на одно применение первой стратегии третью следует использовать трижды.

Задания для самостоятельной работы

1 Произвести возможные упрощения платежных матриц и найти решение матричной игры, используя сведение матричной игры к паре задач линейного программирования:

а) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -5 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -5 & -4 \end{pmatrix}$.

2 Два сельскохозяйственных предприятия A и B выделяют денежные средства на строительство трех объектов. С учетом особенностей вкладов и местных условий прибыль предприятия A в зависимости от объема финансирования выражается элементами матрицы

$$\begin{pmatrix} 50 & 15 & 20 \\ 25 & 40 & 30 \\ 10 & 30 & 60 \end{pmatrix}.$$

Будем предполагать, что убыток предприятия B при этом равен прибыли предприятия A. Требуется найти оптимальные стратегии предприятий A и B.

6 Практическое занятие № 7. Критерии принятия решений в условиях неопределенности: Вальда, Сэвиджа, Гурвица

Управление производственными процессами осуществляется путем реализации последовательности принимаемых решений. Для этого необходима информация о состоянии объекта управления в условиях его работы. В случае отсутствия достаточно полной информации возникает неопределенность в принятии решений.

Совокупность неопределенных факторов, влияющих на эффективность принимаемых решений, называется «природой». Природа не выбирает сознательно свои оптимальные стратегии, однако некоторые вероятностные характеристики состояния природы могут быть известны. Такого рода ситуации принято называть играми с природой или статистическими играми.

Безразличие природы к игре (выигрышу) и возможность получения лицом, принимающим решение (статистиком), дополнительной информации о ее состоянии отличают игру статистика с природой от обычной матричной игры, в которой принимают участие два сознательных игрока.

Статистичекие игры представляют собой основную модель теории принятия решений в условиях частичной неопределенности.

Если вероятности состояний природы неизвестны, то при решении задач можно использовать следующие критерии.

1 *Критерий минимального риска Сэвиджа.*

Критерий минимального риска Сэвиджа рекомендует выбирать в качестве оптимальной стратегию ту, при которой величина максимального риска минимизируется в наихудших условиях.

2 *Максиминный критерий Вальда.*

Максиминный критерий Вальда совпадает с критерием выбора максиминной стратегии, позволяющей получить нижнюю чистую цену α в парной игре с нулевой суммой. По критерию Вальда за оптимальную принимается та чистая стратегия, которая в наихудших условиях гарантирует максимальный выигрыш.

Критерии Вальда и Сэвиджа ориентируют статистика на самые неблагоприятные состояния природы, т. е. эти критерии выражают пессимистическую оценку ситуации.

3 *Критерий Гурвица.*

Критерий Гурвица – обобщенный критерий пессимизма-оптимизма. За оптимальную принимается та стратегия, для которой выполняется соотношение

$$\gamma = \max_i(\lambda \min_j a_{ij} + \left(1-\lambda\right)\max_j a_{ij}),\ \ 0 \le \lambda \le 1.$$

При $\lambda = 0$ имеем критерий крайнего оптимизма, а при $\lambda = 1$ – критерий пессимизма Вальда. Если $0 < \lambda < 1$, то имеем нечто среднее. При желании подстраховаться в данной ситуации число λ выбирают близким к единице. В общем случае число λ выбирают исходя из опыта или субъективных соображений.

Решение статистической игры по рассмотренным критериям позволяет более обоснованно принимать ту стратегию, которая гарантирует статистику больший выигрыш по сравнению с выигрышем, принимаемым статистиком интуитивно или исходя из опыта.

Пример – Руководство супермаркета заказывает товар некоторого вида. Известно, что спрос на данный вид товара лежит в пределах от 11 до 14 единиц. Если заказанного товара окажется недостаточно для удовлетворения покупательского спроса, то руководство супермаркета может срочно заказать и завезти недостающее количество. Причем расходы по срочному заказу и завозу единицы товара составляют 2,5 денежных единиц. Если же спрос будет меньше наличного количества товара, то нереализованный товар хранится на складе в супермаркете, причем расходы за хранение единицы товара составляют 8 денежных единиц.

Требуется придать описанной ситуации игровую схему и составить платежную матрицу игры; найти оптимальные чистые стратегии, пользуясь:

а) критерием Вальда;

б) критерием Гурвица (взяв значение параметра равным 0,7);

в) критерием Сэвиджа.

В данной задаче в качестве игрока A (статистик) выступает руководство супермаркета, которое заинтересовано в получении оптимального выигрыша. В качестве игрока B (объективная реальность) выступает покупательский спрос на товар. Таким образом, имеем статистическую игру.

Игрок B может иметь четыре состояния, т. е. спрос на товар может быть равен 11, 12, 13 и 14 единицам. Игрок A при выборе стратегии также может ориентироваться на четыре состояния покупательского спроса.

Таким образом, получим платежную матрицу $(a_{ij})_{4\times 4}$, где a_{ij} – выигрыш, который может получить игрок A, если он воспользуется i -й стратегией, а спрос на товар окажется в j -м состоянии.

Определим элементы платежной матрицы.

Вычислим элемент a_{11}. В данном случае руководство супермаркета заказывает 11 единиц товара и покупательский спрос оказывается равный 11 единицам, т. е. руководству супермаркета не приходится срочно завозить товар или хранить нереализованный товар на складе. Таким образом, выигрыш игрока A в ситуации $(A_1;B_1)$ равен нулю, т. е. $a_{11}=0$.

Аналогичная ситуация возникает и в случае $(A_i;B_j)$, когда $i=j$ $(i,j=\overline{1,4})$, т. е. в платежной матрице по главной диагонали будут стоять нули.

Вычислим элемент a_{12}. В данном случае руководство супермаркета заказывает 11 единиц товара, однако спрос на товар оказывается равным 12 единицам, поэтому руководству необходимо срочно завозить еще одну единицу товара, на что расходуется $1\cdot 2{,}5=2{,}5$ денежных единиц, т. е. $a_{12}=-2{,}5$.

Вычислим элемент a_{21}. Руководство супермаркета заказывает 12 единиц товара, однако покупательский спрос оказывается равный 11 единицам. Поэтому одну нереализованную единицу товара необходимо хранить на складе, на что расходуется $1\cdot 8=8$ денежных единиц, т. е. $a_{21}=-8$.

Аналогично вычисляем остальные элементы:

$$a_{13}=-2\cdot 2{,}5=-5; \qquad a_{14}=-3\cdot 2{,}5=-7{,}5;$$

$$a_{23}=-1\cdot 2{,}5=-2{,}5; \qquad a_{24}=-2\cdot 2{,}5=-5;$$

$$a_{31}=-2\cdot 8=-16; \qquad a_{32}=-1\cdot 8=-8; \qquad a_{34}=-1\cdot 2{,}5=-2{,}5;$$

$$a_{41}=-3\cdot 8=-24; \qquad a_{42}=-2\cdot 8=-16; \qquad a_{43}=-1\cdot 8=-8.$$

Таким образом, платежная матрица имеет следующий вид (таблица 13).

Таблица 13

$A \setminus B$	$B_1(11)$	$B_2(12)$	$B_3(13)$	$B_4(14)$
$A_1(11)$	0	–2,5	–5	–7,5
$A_2(12)$	–8	0	–2,5	–5
$A_3(13)$	–16	–8	0	–2,5
$A_4(14)$	–24	–16	–8	0

Решение:

а) по критерию Вальда в качестве оптимальной чистой стратегии выбирается стратегия, которая гарантирует выигрыш в наихудших условиях, т. е. соответствующая значению $\alpha = \max_i \min_j (a_{ij})$ (таблица 14).

Таблица 14

$A \setminus B$	$B_1(11)$	$B_2(12)$	$B_3(13)$	$B_4(14)$	α_i
$A_1(11)$	0	–2,5	–5	–7,5	–7,5
$A_2(12)$	–8	0	–2,5	–5	–8
$A_3(13)$	–16	–8	0	–2,5	–16
$A_4(14)$	–24	–16	–8	0	–24

Значит, $\alpha = -7{,}5$. По критерию Вальда в качестве оптимальной чистой стратегии следует взять стратегию A_1 и руководству супермаркета следует заказывать и завозить 11 единиц товара;

б) по критерию Гурвица в качестве оптимальной выбирается чистая стратегия, соответствующая числу $\gamma = \max_i (\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_j a_{ij})$, $0 \le \lambda \le 1$. В данном случае $\max_j a_{ij} = 0$ $(j = \overline{1,4})$, следовательно, $\gamma = \max_i (\lambda \min_j a_{ij})$, $\lambda = 0{,}7$ (таблица 15).

Таблица 15

$A \setminus B$	$B_1(11)$	$B_2(12)$	$B_3(13)$	$B_4(14)$	$0{,}7 \min_i a_{ij}$
$A_1(11)$	0	–2,5	–5	–7,5	–5,25
$A_2(12)$	–8	0	–2,5	–5	–5,6
$A_3(13)$	–16	–8	0	–2,5	–11,2
$A_4(14)$	–24	–16	–8	0	–16,8

Так как $\gamma = -5{,}25$, то по критерию Гурвица в качестве оптимальной выбираем стратегию A_1. Поэтому руководству супермаркета следует заказывать и завозить 11 единиц товара;

в) оптимальной по критерию Сэвиджа считается та чистая стратегия, при которой минимизируется величина r_i максимального риска, т. е. обеспечивается $\min_i \max_j r_{ij}$. Построим матрицу риска (таблица 16), элементы которой вычисляются по формуле $r_{ij} = \max_i \left(a_{ij}\right) - a_{ij}$.

Таблица 16

$A \setminus B$	$B_1(11)$	$B_2(12)$	$B_3(13)$	$B_4(14)$	$\max_i r_{ij}$
$A_1(11)$	0	2,5	5	7,5	7,5
$A_2(12)$	8	0	2,5	5	8
$A_3(13)$	16	8	0	2,5	16
$A_4(14)$	24	16	8	0	24

Таким образом, $\min_i \max_j r_{ij} = 7{,}5$. Следовательно, по критерию Сэвиджа в качестве оптимальной выбираем стратегию A_1, т. е. руководству супермаркета следует заказывать и завозить 11 единиц товара.

Задания для самостоятельной работы

1 Платежная матрица имеет вид (таблица 17).

Таблица 17

$A \setminus B$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	–0,5	–3	–5,5
A_2	–6	0	–0,5	–3
A_3	–12	–6	0	–0,5
A_4	–18	–12	–6	0

Определить оптимальные чистые стратегии, пользуясь критериями, Вальда, Гурвица, Сэвиджа.

2 За некоторый период времени на предприятии потребление исходного сырья S в зависимости от его качества составляет 10–12 единиц. Если для выпуска запланированного объема основной продукции сырья S окажется недостаточно, запас его можно пополнить, что потребует дополнительных затрат в размере 5 единиц в расчете на единицу сырья. Если же запас сырья превысит потребности, то дополнительные затраты на содержание и хранение остатка составят 2 единиц в расчете на единицу сырья. Придать описанной производственной ситуации игровую схему и составить платежную матрицу. Дать рекомендации по созданию оптимального запаса сырья на предприятии.

7 Практическое занятие № 8. Критерии принятия решений в условиях риска: Байеса, Лапласа, Гермейера

Если вероятности состояний природы известны, то можно воспользоваться критерием Байеса и Лапласа.

1 *Критерий Байеса*.

Показателем в этом критерии служит либо величина среднего выигрыша, либо величина среднего риска. Оптимальной принята чистая стратегия A_i, при которой максимизируется средний выигрыш или минимизируется средний риск:

$$\overline{a} = \max_i \overline{a}_i = \max \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j;$$

$$\overline{r} = \min_i \overline{r}_i = \min \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j.$$

2 *Критерий Лапласа*.

В случае, когда вероятности состояний природы правдоподобны, для их оценки используют принцип недостаточного основания Лапласа, согласно которому все состояния природы полагаются равновероятными, т. е.

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = \frac{1}{n}.$$

Оптимальной считается стратегия, обеспечивающая максимум среднего выигрыша.

Пример – Требуется найти оптимальные чистые стратегии (пример из практического занятия № 7), пользуясь:

а) критерием Байеса (считать вероятности соответственно равными 0,1; 0,3; 0,4; 0,2);

б) критерием Лапласа.

Решение:

а) согласно критерию Байеса оптимальной считается стратегия, соответствующая максимальному среднему выигрышу, т. е. соответствующая значению $\overline{a} = \max_i \overline{a}_i = \max \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$. Вычислим следующее:

$$\overline{a}_1 = 0 \cdot 0{,}1 - 2{,}5 \cdot 0{,}3 - 5 \cdot 0{,}4 - 7{,}5 \cdot 0{,}2 = -4{,}25;$$

$$\overline{a}_2 = -8 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}3 - 2{,}5 \cdot 0{,}4 - 5 \cdot 0{,}2 = -2{,}8;$$

$$\overline{a}_3 = -16 \cdot 0,1 - 8 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,4 - 2,5 \cdot 0,2 = -4,5;$$

$$\overline{a}_4 = -24 \cdot 0,1 - 16 \cdot 0,3 - 8 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,2 = -10,4.$$

Составим таблицу 18.

Таблица 18

$A \setminus B$	$B_1(11)$	$B_2(12)$	$B_3(13)$	$B_4(14)$	$\overline{a}_i$
$A_1(11)$	0	–2,5	–5	–7,5	–4,25
$A_2(12)$	–8	0	–2,5	–5	–2,8
$A_3(13)$	–16	–8	0	–2,5	–4,5
$A_4(14)$	–24	–16	–8	0	–10,4
q_j	0,1	0,3	0,4	0,2	

Значит, $\overline{a} = -2,8$. Следовательно, по критерию Байеса в качестве оптимальной чистой стратегии следует взять стратегию A_2, т. е. руководству супермаркета следует заказывать и завозить 12 единиц товара;

б) согласно критерию Лапласа оптимальной считается чистая стратегия, обеспечивающая максимум выигрыша при равновероятных состояниях покупательского спроса на товар (при $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 0,25$), т. е. обеспечивающая $\max\limits_i \overline{a}_i = \frac{1}{n} \cdot \max \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$, $i = \overline{1,m}$. Вычислим следующее:

$$a_1 = 0,25 \cdot \left(0 - 2,5 - 5 - 7,5\right) = -3,75; \qquad a_2 = 0,25 \cdot \left(-8 + 0 - 2,5 - 5\right) = -3,875;$$

$$a_3 = 0,25 \cdot \left(-16 - 8 + 0 - 2,5\right) = -6,625; \qquad a_4 = 0,25 \cdot \left(-24 - 16 - 8 + 0\right) = -12.$$

Таким образом, $a = -3,75$. Следовательно, по критерию Лапласа в качестве оптимальной чистой стратегии следует взять стратегию A_1, т. е. руководству супермаркета следует заказывать и завозить 11 единиц товара.

Задания для самостоятельной работы

1 Платежная матрица имеет вид, представленный в таблице 19.

Таблица 19

$A \setminus B$	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	–1,5	–4	–6,5
A_2	–7	0	–1,5	–4
A_3	–14	–7	0	–1,5
A_4	–21	–14	–7	0

Определить оптимальные чистые стратегии, пользуясь критериями Байеса и Лапласа.

2 В новом жилом массиве создается телевизионное ателье для ремонта в стационарных условиях не более 8 тысяч телевизоров в год. Для упрощения примем, что поток заявок на ремонт в условиях стационара выражается числами 2, 4, 6 и 8 тысяч в год. Накопленный опыт аналогичных предприятий показывает, что прибыль от ремонта телевизора составляет 9 денежных единиц, потери, вызванные отказом в ремонте из-за недостатка мощностей, оцениваются в 5 денежных единиц, а убытки от простоя специалистов и оборудования при отсутствии заявок обходятся в 6 денежных единиц в расчете на каждый телевизор. Придав рассматриваемой ситуации игровую схему, составить платежную матрицу. Дать рекомендации о мощности создаваемого ателье.

Список литературы

1 **Кузнецов, А. В.** Высшая математика. Математическое программирование / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод. – Минск: Вышэйшая школа, 1994. – 286 с.

2 **Мину, М.** Математическое программирование. Теория и алгоритмы / М. Мину. – Москва : Наука, 1990. – 486 с.

3 **Северцев, Н. А.** Исследование операций: принципы принятия решений и обеспечение безопасности / Н. А. Северцев, А. Н. Катулев; под ред. П. С. Краснощекова. – Москва: Юрайт, 2021. – 319 с.