МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технологии металлов»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

***Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов направлений подготовки
15.03.01 «Машиностроение», 15.03.03 «Прикладная механика»,
15.03.06 «Мехатроника и робототехника»
и 23.03.02 «Наземные транспортно-технологические комплексы»
дневной формы обучения***

Часть 1

Могилев 2021

УДК 531
ББК 22.21
Т33

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технологии металлов» «04» октября 2021 г., протокол № 3

Составители: канд. техн. наук, доц. Ю. В. Машин;
канд. техн. наук, доц. И. В. Трусов

Рецензент канд. техн. наук, доц. А. П. Прудников

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочими программами дисциплины «Теоретическая механика» для студентов направлений подготовки 15.03.01 «Машиностроение», 15.03.03 «Прикладная механика», 15.03.06 «Мехатроника и робототехника» и 23.03.02 «Наземные транспортно-технологические комплексы» дневной формы обучения. Содержат материал для аудиторной работы студентов.

Учебно-методическое издание

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Часть 1

Ответственный за выпуск	Д. И. Якубович
Корректор	И. В. Голубцова
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 36 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Указания по подготовке к практическим занятиям

Теоретическая механика – фундаментальная дисциплина, которая является базовой для ряда общетехнических и специальных дисциплин: сопротивление материалов, теория механизмов и машин, детали машин, гидравлика, строительная механика и металлические конструкции и др.

Целью курса является обучение студентов основным законам механики, совершенствование навыков, основанных на законах логического мышления и позволяющих специалисту в дальнейшем самостоятельно повышать свой профессиональный уровень.

Студенты направлений подготовки 15.03.01 «Машиностроение», 15.03.03 «Прикладная механика», 15.03.06 «Мехатроника и робототехника» и 23.03.02 «Наземные транспортно-технологические комплексы» изучают теоретическую механику на протяжении 2-го и 3-го семестров.

Рейтинг-контроль знаний студентов при изучении курса теоретической механики осуществляется по следующим видам работ:

– опрос по разделам лекционного курса;

– выполнение и защита индивидуальных заданий;

– выполнение контрольных работ.

На практических занятиях ведется учет активности студентов.

К каждому практическому занятию студент должен:

– проработать по конспекту лекций или учебнику теоретический материал;

– составить соответствующие расчетные схемы, вычислить заданные параметры.

На практических занятиях студенты решают задачи из [5].

Индивидуальные задания выполняются и сдаются в сроки, предусмотренные графиком учебного процесса. В установленные преподавателем сроки индивидуальные задания защищают во внеучебное время; защита проходит в виде собеседования по заданию.

Студенты, не защитившие индивидуальные задания, не допускаются к зачету (экзамену) по теоретической механике как не выполнившие график учебного процесса по данной дисциплине.

2 Статика

2.1 Общие понятия статики. Примеры распределенных сил

Сила, приложенная к какой-нибудь одной точке тела, называется сосредоточенной (рисунок 1, *а*).

Система распределенных сил характеризуется интенсивностью q, Н/м, т. е. значением силы, приходящейся на единицу длины нагруженного отрезка.

Распределенную нагрузку в виде прямоугольника (равномерно распределенная нагрузка) или треугольника заменяют одной сосредоточенной силой (равнодействующей), которую прикладывают в центре тяжести площади распределения (рисунок 1, *б*). Величина сосредоточенной равнодействующей силы численно равна площади фигуры, образованной распределенной нагрузкой. Для нагрузки, распределенной в виде прямоугольника, $Q = q \cdot l$, а в виде треугольника – $Q = \frac{1}{2} q \cdot l$.

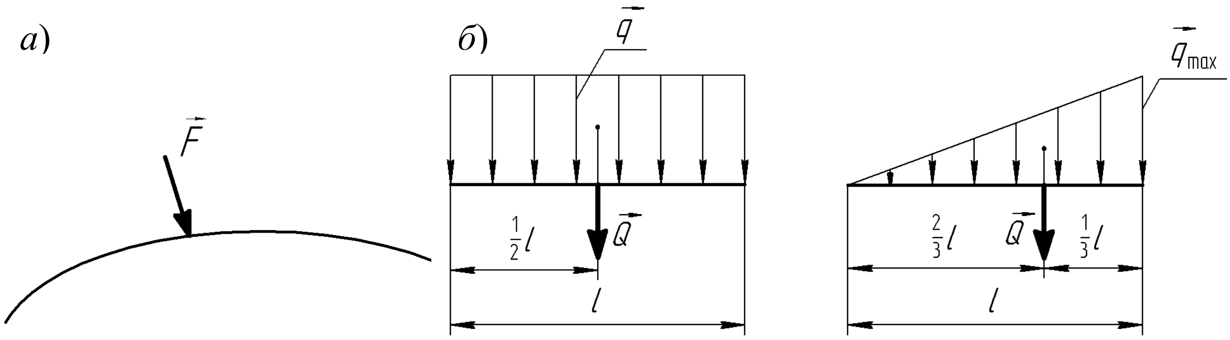


Рисунок 1

Задача 1. Какую по модулю силу $\vec{F}_3$ надо приложить к сходящимся силам $\vec{F}_1 = 2$ Н и $\vec{F}_2 = 4$ Н, образующим с осью *Ox* углы $\alpha = 30^{\circ}$ и $\beta = 60^{\circ}$, чтобы равнодействующая этих трех сил равнялась нулю (рисунок 2)?

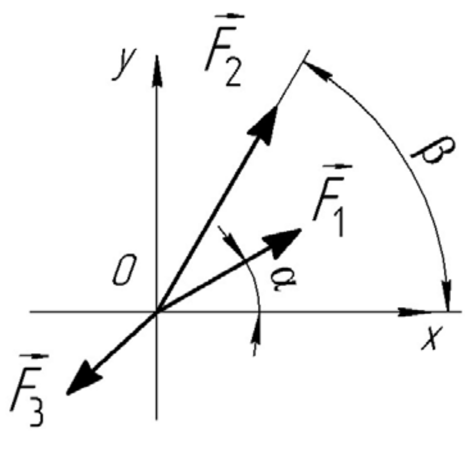


Рисунок 2

Решение

Для нахождения равнодействующей сил, расположенных произвольно в плоскости, необходимо спроецировать уравнение $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$ на координатные оси.

Проекция на ось *Ox*

$$R_X = F_1 \cdot \cos\alpha + F_2 \cdot \cos\beta - F_{3X}.$$

Проекция на ось *Oy*

$$R_Y = F_1 \cdot \sin\alpha + F_2 \cdot \sin\beta - F_{3Y}.$$

Так как $R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2}$, то равнодействующая будет равна нулю тогда, когда каждое слагаемое будет равно нулю.

$$0 = F_1 \cdot \cos\alpha + F_2 \cdot \cos\beta - F_{3X}; \qquad 0 = F_1 \cdot \sin\alpha + F_2 \cdot \sin\beta - F_{3Y}.$$

Из полученных уравнений находим проекции силы $\vec{F}_3$ на координатные оси:

$$F_{3X} = F_1 \cdot \cos\alpha + F_2 \cdot \cos\beta = 2\cos 30° + 4\cos 60° = 3{,}73 \text{ Н};$$

$$F_{3Y} = F_1 \cdot \sin\alpha + F_2 \cdot \sin\beta = 2\sin 30° + 4\sin 60° = 4{,}46 \text{ Н}.$$

Тогда

$$F_3 = \sqrt{F_{3X}^2 + F_{3Y}^2} = \sqrt{3{,}73^2 + 4{,}46^2} = 5{,}81 \text{ Н}.$$

Ответ: $F_3 = 5{,}81$ Н.

Решить задачи 1.1.5, 1.1.10, 1.1.12, 1.1.31, 1.3.4, 1.3.6, 1.3.9 из [5].

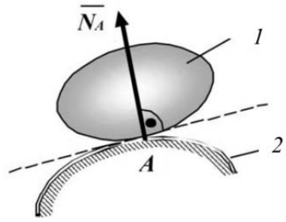
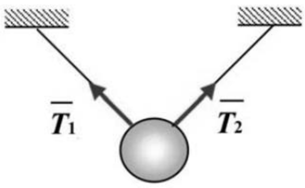
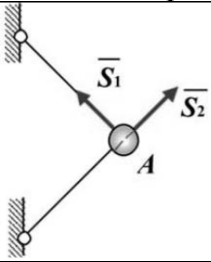
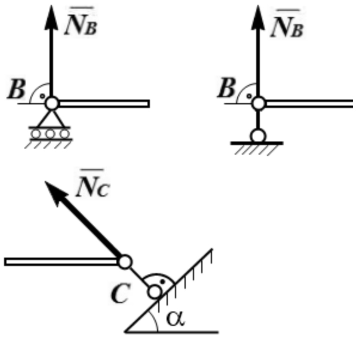
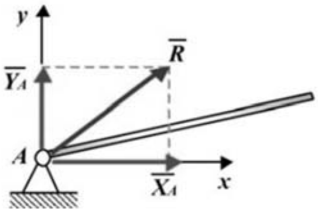
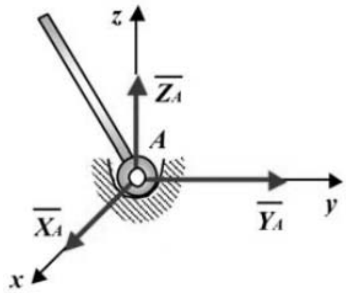
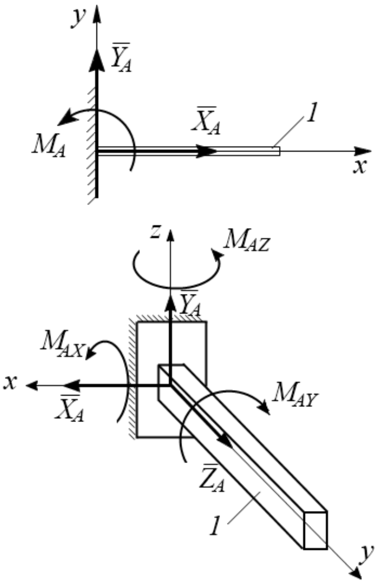
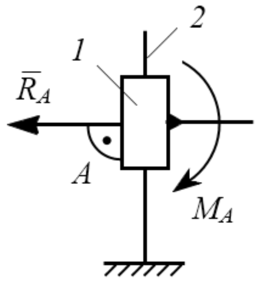
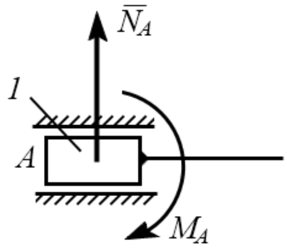
2.2 Основные типы связей и их реакции

Тела, которые ограничивают перемещения данного тела в пространстве, являются по отношению к нему связями. Эффект действия связей на данное тело учитывается введением в рассмотрение сил, действие которых на данное тело эквивалентно действию связей. Эти силы называются реакциями связей.

Реакция связи направлена противоположно тем перемещениям, которым данная связь не позволяет осуществиться.

Основные типы связей и их реакции представлены в таблице 1.

Таблица 1

Гладкая поверхность	Нить	Невесомый стержень
		
Шарнирно-подвижная опора	Цилиндрический шарнир	Сферический (шаровый) шарнир
		
Жесткая заделка	Ползун *1* на стержне *2*	Ползун *1* в направляющих
		

Задача 2. Шар *1* весом 16 Н и шар *2* связаны нитью, перекинутой через блок *D*, и удерживаются в равновесии. Определить вес шара *2*, если угол $\alpha = 30^{\circ}$ (рисунок 3).

Решение

Расставим все силы и реакции на расчетной схеме. Применим принцип освобождаемости от связей. Так как шар *1* удерживается в равновесии шаром *2*, то усилие в тросе между двумя шарами будет равно весу шара *2*. Шар *1* свободно опирается на наклонную поверхность. В точке касания возникает реакция связи *N*, направленная перпендикулярно опоре. Направим оси координат.

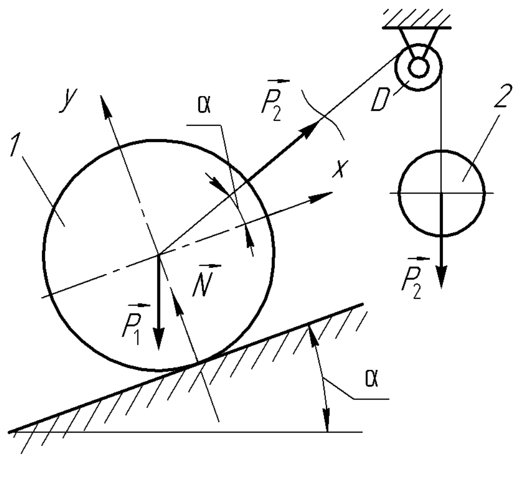


Рисунок 3

Для шара *1* составим уравнение равновесия, спроецировав все силы на координатную ось *Ox*:

$$\sum \vec{F}_{iX} = 0: -P_1 \cdot \sin\alpha + P_2 \cdot \cos\alpha = 0.$$

$$P_2 = \frac{P_1 \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha} = P_1 \cdot \mathrm{tg}\alpha = 16\mathrm{tg}30° = 9{,}24 \text{ Н}.$$

Ответ: $P_2 = 9{,}24$ Н.

Решить задачи 1.2.7, 1.2.10, 1.2.23, 1.4.3, 1.4.9 из [5].

2.3 Приведение системы сил к простейшему виду

Основная теорема статики о приведении произвольной системы сил к заданному центру: любая плоская система сил эквивалентна одной силе, равной главному вектору системы $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$, приложенному в некоторой точке (центре приведения), и паре сил, момент которой равен главному моменту сил системы относительно центра приведения $\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_i)$.

Случаи приведения пространственной системы сил к простейшему виду.

1 $\vec{R} = 0$, а $\vec{M}_O \neq 0$ – система приводится к одной паре сил с моментом, равным главному моменту системы, причем значение главного момента системы сил не зависит от выбора центра приведения.

2 $\vec{R} \neq 0$, а $\vec{M}_O = 0$ – система сил приводится к равнодействующей, равной главному вектору системы, линия действия которой проходит через центр *O* приведения.

3 $\vec{R} \neq 0$ и $\vec{M}_O = 0$ – такая система сил сводится к одной равнодействующей $\vec{R}$, равной главному вектору системы, линия действия которой смещена от

предыдущего центра приведения на расстояние $d = \dfrac{M_O}{R}$.

4 Если главный вектор $\vec{R} = 0$ и главный момент $\vec{M}_O = 0$, то система сил будет уравновешенной.

Задача 3. Привести систему сил, действующую на куб, к простейшему виду, если a = 2 м, F_1 = 8 Н, F_2 = 16 Н, F_3 = 8 Н, $F_4 = 8\sqrt{2}$ Н (рисунок 4).

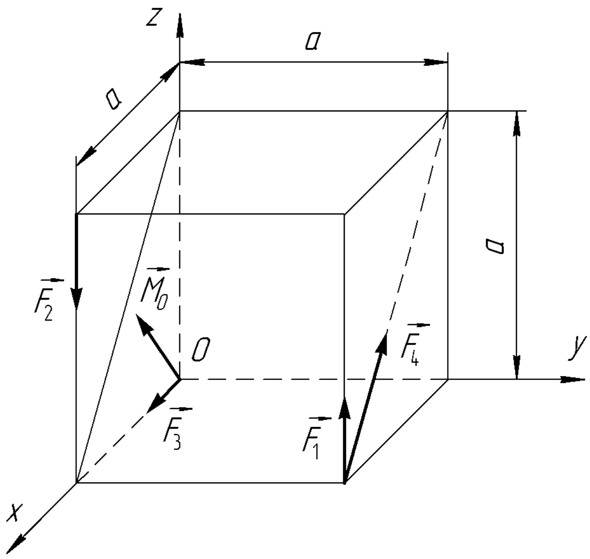


Рисунок 4

Решение

Определим модуль и направление главного вектора:

$$R_X = \sum_{i=1}^{n} F_{iX} = F_3 - F_4 \cdot \cos 45° = 8 - 8\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 0;$$

$$R_Y = \sum_{i=1}^{n} F_{iY} = 0;$$

$$R_Z = \sum_{i=1}^{n} F_{iZ} = F_1 - F_2 + F_4 \cdot \cos 45° = 8 - 16 + 8\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2} = 0.$$

Определим модуль и направление главного момента:

$$M_X = F_1 \cdot a + F_4 \cdot a \cdot \sin 45° = 8 \cdot 2 + 8\sqrt{2} \cdot 2\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 32 \text{ Н·м};$$

$$M_Y = F_2 \cdot a - F_2 \cdot a + F_4 \cdot a \cdot \cos 45° = 16 \cdot 2 - 8 \cdot 2 - 8\sqrt{2} \cdot 2\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \text{ Н·м};$$

$$M_Z = F_4 \cdot a \cdot \cos 45° = 8\sqrt{2} \cdot 2\frac{\sqrt{2}}{2} = 16 \text{ Н·м};$$

$$M_O = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2} = \sqrt{35^2 + 16^2} = 16\sqrt{5} \text{ Н·м};$$

$$\cos(x, \hat{\ } \vec{M}_O) = \frac{M_X}{M_O} = \frac{32}{16\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$\cos(z, \hat{\ } \vec{M}_O) = \frac{M_Z}{M_O} = \frac{16}{16\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Следовательно, система сил приводится к главному моменту, лежащему в плоскости *Oxz*. Направление главного момента определяется найденными косинусами.

Решить задачи 5.4.4–5.4.6, 5.4.22, 5.4.23 из [5].

2.4 Равновесие тела под действием систем сил

Для произвольной плоской системы сил можно составить три уравнения равновесия.

Первая форма уравнений равновесия

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iY} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{F}_i) = 0.$$

Уравнение моментов составляют относительно произвольной точки. Лучше всего брать точку, которую пересекает наибольшее количество линий действия неизвестных сил.

Вторая форма уравнений равновесия

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_B(\vec{F}_i) = 0.$$

При использовании второй формы уравнений равновесия необходимо, чтобы ось x не была перпендикулярна прямой AB.

Третья форма уравнений равновесия

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_B(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_C(\vec{F}_i) = 0.$$

При использовании третьей формы уравнений равновесия необходимо, чтобы точки A, B, C не лежали на одной прямой.

Задача 4. Определить реакции опор, если $F = 10$ кН, $q = 2$ кН/м, $M = 3$ кН·м (рисунок 5).

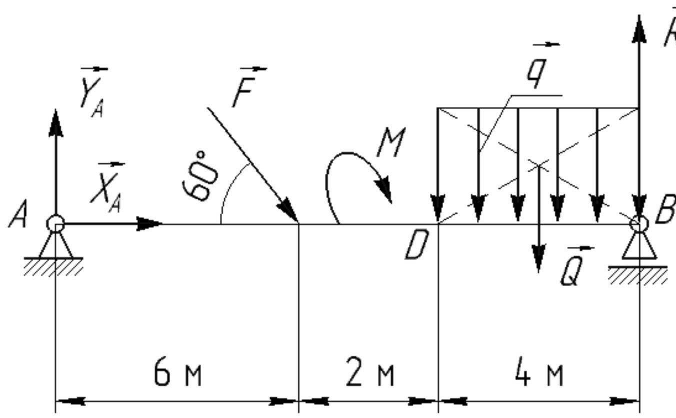


Рисунок 5

Решение

Рассмотрим равновесие балки AB под действием силы F, момента M, равномерно распределенной нагрузки и реакций связей $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{R}_B$.

Составим три уравнения равновесия по первой форме. Равномерно распределенную нагрузку заменим равнодействующей $Q = 4q = 8$ кН, которая приложена в середине участка BD:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX} = X_A + F \cdot \cos 60° = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iY} = Y_A - F \cdot \sin 60° - Q + R_B = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i) = -6 \cdot F \cdot \sin 60° - M - 10 \cdot Q + 12 \cdot R_B = 0.$$

Из первого уравнения находим

$$X_A = -F \cdot \cos 60° = -10 \cdot 0{,}5 = -5 \text{ кН},$$

из третьего

$$R_B = \frac{6F \cdot \sin 60° + M + 10Q}{12} = \frac{6 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 + 10 \cdot 8}{12} = 11{,}25 \text{ кН},$$

из второго

$$Y_A = F \cdot \sin 60° + Q - R_B = 10\frac{\sqrt{3}}{2} + 8 - 11{,}25 = 5{,}41 \text{ кН}.$$

Ответ: $X_A = -5$ кН, $Y_A = 5{,}41$ кН, $R_B = 11{,}25$ кН.

Знак «минус» означает, что направление X_A противоположно направлению, показанному на рисунке 5.

Решить задачи 2.4.5, 2.4.6, 2.4.8, 2.4.10, 2.4.17, 2.4.27 из [5].

2.5 Равновесие системы тел

Инженерные конструкции часто представляют собой системы тел, соединенные друг с другом какими-нибудь связями. Связи, соединяющие части данной конструкции, называются внутренними в отличие от внешних связей, скрепляющих конструкцию с другими телами, в нее не входящими. Соответственно, силы взаимодействия между телами системы являются внутренними, а силы, действующие на рассматриваемую систему тел со стороны других тел, – внешними.

Если система тел находится в равновесии, то рассматриваем равновесие каждого тела в отдельности, учитывая внутренние силы взаимодействия между телами. Если задана плоская произвольная система n тел, то для этой системы можно составить $3n$ уравнений равновесия. Задача будет статически определимой, если число неизвестных не будет превышать числа уравнений равновесия. При решении задач на равновесие системы тел можно также рассматривать равновесие системы как для тел в целом, так и для любых сочетаний тел. В случае рассмотрения равновесия системы в целом внутренние силы взаимодействия между телами не учитываются на основании аксиомы о равенстве сил действия и противодействия.

Задача 5. Определить реакции опор A, B и шарнира C составной балки, если M = 8 кН/м, q = 2 кН/м, P = 6 кН (рисунок 6).

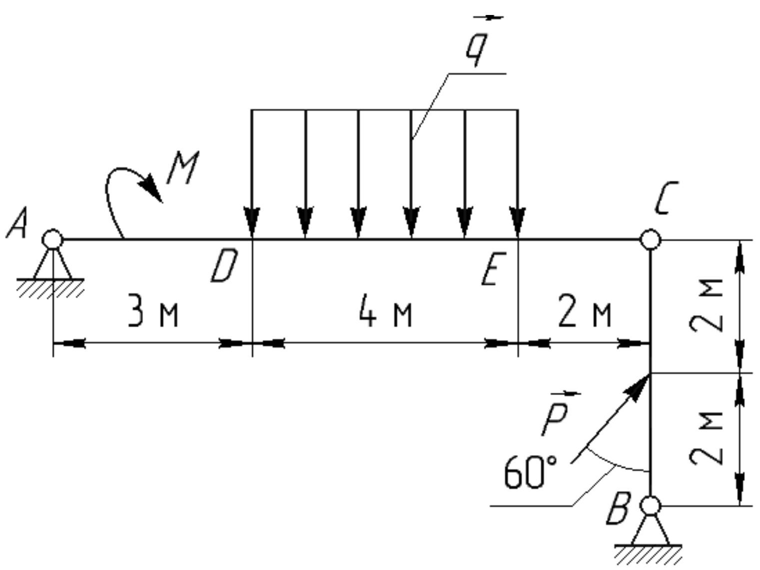


Рисунок 6

Решение

Расчленим составную балку по шарниру C и рассмотрим равновесие балки AC под действием момента M, равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q и реакций $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, шарнирно-неподвижной опоры A и реакций $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$ шарнира C (рисунок 7).

Для полученной уравновешенной плоской произвольной системы сил составим три уравнения равновесия. Заменим равномерно распределенную нагрузку сосредоточенной силой $Q = 4q = 8$ кН, приложенной к середине нагруженного участка DE. Направление осей координат показано на рисунке 7.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX} = X_A + X_C = 0; \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iY} = Y_A + Y_C - Q = 0; \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i) = -M - Q \cdot 5 + Y_C \cdot 9 = 0. \tag{3}$$

Теперь рассмотрим равновесие другой части, на которую действуют сила $\vec{P}$, реакции $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$ шарнирно-неподвижной опоры B и реакции $\vec{X}'_C$, $\vec{Y}'_C$ шарнира C (рисунок 8).

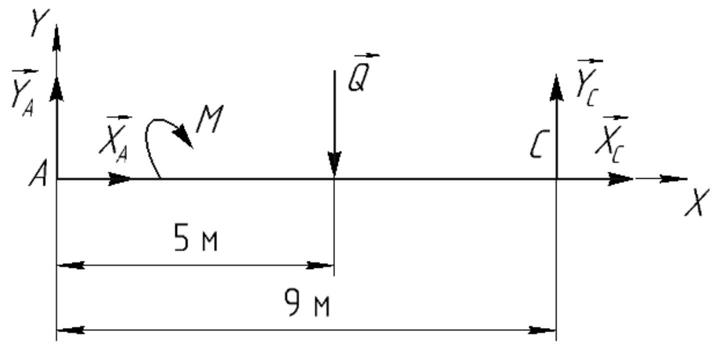


Рисунок 7

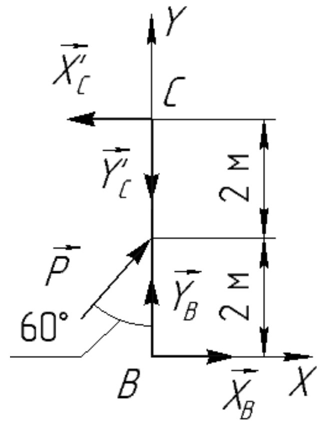


Рисунок 8

На основании аксиомы действия-противодействия реакции в шарнире C равны по модулю и противоположно направлены:

$$X_C = X'_C, \quad Y_C = Y'_C;$$

$$\vec{X}_C = -\vec{X}'_C, \quad \vec{Y}_C = -\vec{Y}'_C.$$

Для полученной уравновешенной плоской произвольной системы сил составим три уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iX} = X_B - X'_C + P\cdot\cos 30° = 0; \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iY} = -Y'_C + P\cdot\sin 30° + Y_B = 0; \qquad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_C(\vec{F}_i) = P\cdot 2\cos 30° + X_B\cdot 4 = 0. \qquad (6)$$

Находим из уравнения (6)

$$X_B = \frac{-P\cdot 2\cos 30°}{4} = \frac{-6\cdot 2\cos 30°}{4} = -2{,}6 \text{ кН},$$

из (4)

$$X'_C = X_B + P\cdot\cos 30° = -2{,}6 + 6\cos 30° = 2{,}6 \text{ кН},$$

из (3)

$$Y_C = \frac{M + Q\cdot 5}{9} = \frac{8 + 8\cdot 5}{9} = 5{,}33 \text{ кН},$$

из (5)

$$Y_B = -P\cdot\sin 30° + Y'_C = -6\sin 30° + 5{,}33 = 2{,}33 \text{ кН},$$

из (2)

$$Y_A = -Y_C + Q = -5{,}33 + 8 = 2{,}67 \text{ кН},$$

из (1)

$$X_A = -X_C = -2{,}6 \text{кН}.$$

Ответ: X_A = – 2,6 кН, Y_A = 2,67 кН, $X_в$ = – 2,6 кН, $Y_в$ = 2,33 кН, X_c = 2,6 кН, Y_c = 5,33 кН.

Знак «минус» означает, что реакции $\vec{X}_B$ и $\vec{X}_A$ направлены противоположно направлению, показанному на рисунке 8.

Решить задачи 3.3.4, 3.3.7–3.3.9 из [5].

2.6 Расчет плоских ферм

Фермой называется геометрически неизменяемая конструкция, состоящая из невесомых стержней, соединенных между собой шарнирами.

Места соединения стержней фермы называются узлами. Все внешние нагрузки к ферме прикладываются только в узлах. При расчете фермы трением в узлах и весом стержней пренебрегают. Стержни фермы работают только на растяжение или на сжатие.

Конструкция фермы должна удовлетворять условиям ее геометрической неизменяемости. Соединение стержней в виде треугольника представляет собой простейшую геометрически неизменяемую систему (рисунок 9).

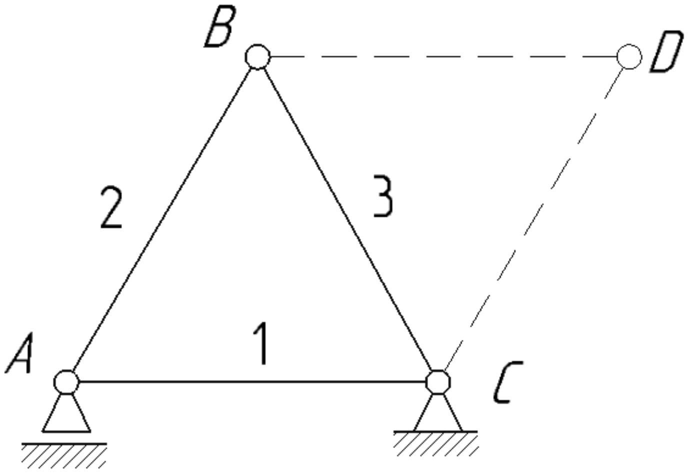


Рисунок 9

Конструкция фермы образуется последовательным присоединением к основному треугольнику узлов с помощью двух стержней, оси которых не лежат на одной прямой (на рисунке 9 эти стержни показаны штриховой линией).

Зависимость между числом стержней S и числом узлов n геометрически неизменяемой фермы определяется следующим выражением:

$$S = 2n - 3,$$

где S – число стержней;
n – число узлов.

Ферма является статически определимой, если число независимых уравнений равновесия равно числу неизвестных величин, которые надо определить.

Расчет ферм включает в себя определение опорных реакций и усилий в ее стержнях.

Опорные реакции фермы находят обычными методами статики, рассматривая ферму в целом как твердое тело.

Определение усилий в стержнях фермы можно выполнять способом вырезания узлов и способом сечений (способ Риттера).

Способ вырезания узлов заключается в последовательном рассмотрении равновесия каждого узла фермы под действием сил, сходящихся в соответствующем узле (плоская система сходящихся сил). Для каждого узла составляют два уравнения равновесия в проекциях на оси координат. Усилия в стержнях направляют от узла фермы, предполагая, что стержень растянут. Если в результате расчета получают в ответе знак «минус», то соответствующий стержень сжат. Последовательность действий вырезания узлов диктуется тем, что число неизвестных усилий в каждом узле не должно превышать двух.

Задача 6. Определить опорные реакции и усилия в стержнях фермы, если $P_1 = 20$ Н, $P_2 = 40$ Н, $\alpha = 30°$, $a = 4$ м (рисунок 10).

Решение

Рассмотрим равновесие фермы, считая ее абсолютно твердым телом. Отбросим связи и заменим их реакциями связей.

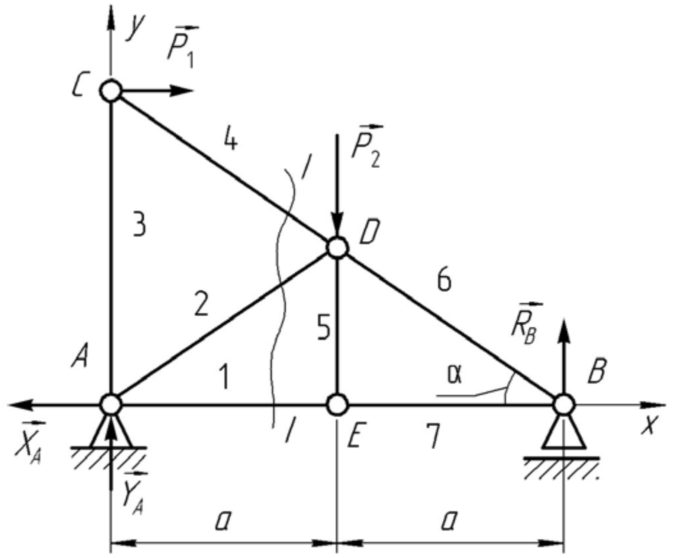


Рисунок 10

На опоре A имеются две составляющие $\vec{X}_A$ и $\vec{Y}_A$, на опоре B – одна составляющая $\vec{R}_B$. Для полученной уравновешенной плоской произвольной системы сил составим три уравнения равновесия и найдем реакции связей:

$$\sum F_{iX} = -X_A + P_1 = 0;$$

$$\sum F_{iY} = Y_A + R_B - P_2 = 0;$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = -P_1 \cdot 2a \cdot \mathrm{tg}\alpha - P_2 \cdot a + R_B \cdot 2a = 0.$$

Находим из первого уравнения

$$X_A = P_1 = 20 \text{ Н},$$

из третьего

$$R_B = \frac{P_1 \cdot 2a \cdot \mathrm{tg}\alpha + P_2 \cdot a}{2a} = \frac{20 \cdot 2 \cdot 4\,\mathrm{tg}\,30° + 40 \cdot 4}{2 \cdot 4} = 31{,}55 \text{ Н},$$

из второго

$$Y_A = -R_B + P_2 = -31{,}55 + 40 = 8{,}45 \text{ Н}.$$

Определение усилий в стержнях начинаем с узла B (рисунок 11), где число неизвестных равно двум. Составим для узла B два уравнения равновесия в проекции на оси X и Y. Направление осей показано на рисунке 10.

$$\sum F_{iX} = -S_7 - S_6 \cdot \cos\alpha = 0\,;$$

$$\sum F_{iY} = R_B + S_6 \cdot \sin\alpha = 0\,.$$

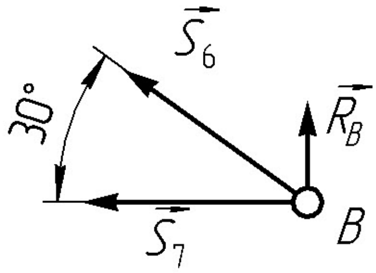


Рисунок 11

Находим из второго уравнения

$$S_6 = \frac{-R_B}{\sin\alpha} = \frac{-31,55}{\sin 30°} = -63,1 \text{ Н},$$

из первого

$$S_7 = -S_6 \cdot \cos\alpha = 63,1\cos 30° = 54,65 \text{ Н}.$$

Рассмотрим узел E (рисунок 12).

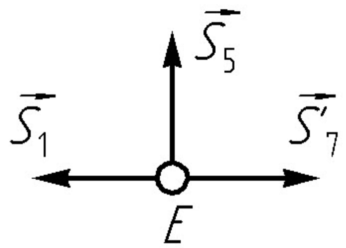


Рисунок 12

Составим два уравнения равновесия:

$$\sum F_{iX} = S'_7 - S_1 = 0\,;$$

$$\sum F_{iY} = S_5 = 0\,.$$

Из первого уравнения находим

$$S_1 = S'_7 = 54,65 \text{ Н}.$$

Рассмотрим узел C (рисунок 13).

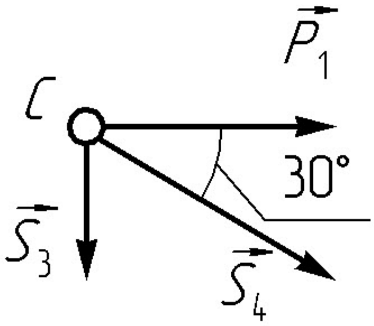


Рисунок 13

Составим два уравнения равновесия:

$$\sum F_{iX} = S_4 \cdot \cos\alpha + P_1 = 0;$$

$$\sum F_{iY} = -S_3 - S_4 \cdot \sin\alpha = 0.$$

Находим из первого уравнения

$$S_4 = \frac{-P_1}{\cos\alpha} = \frac{-20}{\cos 30°} = -23{,}09 \text{ Н},$$

из второго

$$S_3 = -S_4 \cdot \sin\alpha = 23{,}09 \sin 30° = 11{,}55 \text{ Н}.$$

Рассмотрим узел *A* (рисунок 14).

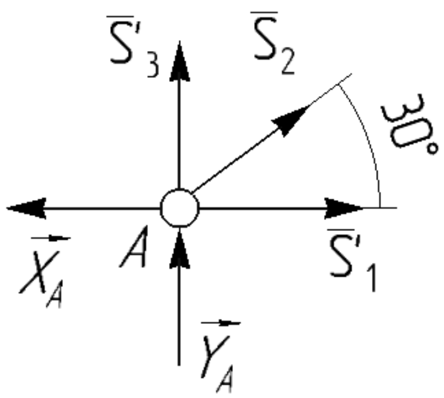


Рисунок 14

Составим одно уравнение равновесия:

$$\sum F_{iY} = Y_A + S_3 + S_2 \cdot \sin\alpha = 0.$$

Находим

$$S_2 = \frac{-Y_A - S_3}{\sin\alpha} = \frac{-8{,}45 - 11{,}55}{\sin 30°} = -40 \text{ Н}.$$

Результаты вычислений усилий в стержнях плоской фермы сведем в таблицу 2.

Таблица 2

Параметры	Номер стержня						
	1	2	3	4	5	6	7
Знак усилия	+	–	+	–		–	+
Усилие, Н	54,56	40	11,55	23,1	0	63,1	54,65

Знак «минус» показывает, что стержни 2, 4 и 6 сжаты, а не растянуты, как предполагалось.

Способ сечений (способ Риттера) позволяет найти усилие в любом стержне независимо от усилий в других стержнях. Этот способ заключается в мысленном рассечении фермы на две части. Сечение проводят таким образом, чтобы оно пересекало не более трех стержней. Затем рассматривают равновесие любой части, учитывая реакции связей и усилия разрезаемых стержней, которые направляют от сечения, предполагая, что стержни растянуты. Уравнение равновесия составляют таким образом, чтобы оно содержало лишь одно неизвестное усилие.

Задача 7. Для фермы, рассмотренной в задаче 6, необходимо найти усилия в стержнях *1*, *2*, *4* способом сечений.

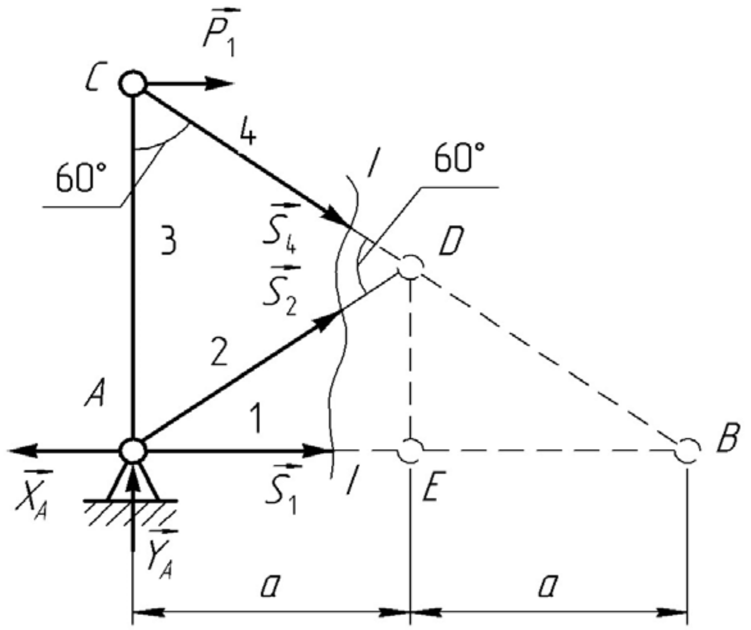


Рисунок 15

Решение

Проведем сечение *I–I* через стержни *1*, *2* и *4* и рассмотрим равновесие сечения, лежащего слева (рисунок 15).

Составим уравнение моментов относительно точки D:

$$\sum M_D(\vec{F}_i) = -X_A \cdot a \cdot \mathrm{tg}\alpha - P_1 \cdot a \cdot \mathrm{tg}\alpha - Y_A \cdot a + S_1 \cdot a \cdot \mathrm{tg}\alpha = 0\,.$$

Находим

$$S_1 = \frac{X_A \cdot a \cdot \mathrm{tg}\alpha + P_1 \cdot a \cdot \mathrm{tg}\alpha + Y_A \cdot a}{a \cdot \mathrm{tg}\alpha} = \frac{20 \cdot 4\mathrm{tg}30° + 20 \cdot 4\mathrm{tg}30° + 8{,}45 \cdot 4}{4\mathrm{tg}30°} = 54{,}64 \text{ Н.}$$

Составим уравнение моментов относительно точки A:

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = -P_1 \cdot AC - S_4 \cdot AC \cdot \cos\alpha = 0\,.$$

Находим

$$S_4 = \frac{-P_1 \cdot AC}{AC \cdot \cos\alpha} = \frac{-20}{\cos 30°} = -23{,}1 \text{ Н.}$$

Для определения S_2 рассмотрим равновесие сечения I–I, лежащего справа (рисунок 16).

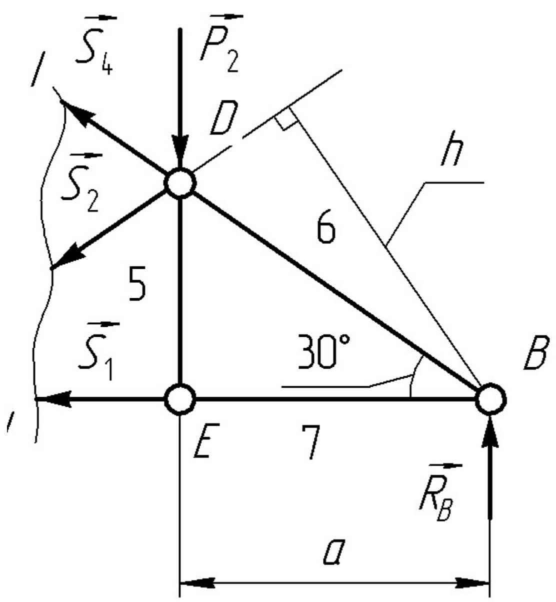


Рисунок 16

Составим уравнение моментов относительно точки B:

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = P_2 \cdot a + S_2 \cdot \cos\alpha \cdot a \cdot \mathrm{tg}\alpha + S_2 \cdot \sin\alpha \cdot a = 0\,.$$

Находим

$$S_2 = \frac{-P_2 \cdot a}{\cos\alpha \cdot a \cdot \mathrm{tg}\alpha + \sin\alpha \cdot a} = \frac{-40}{\sin 30° + \sin 30°} = -40 \text{ Н.}$$

Результаты, полученные способами вырезания узлов и Риттера, совпадают.

Решить задачи 4.2.8, 4.2.10, 4.3.5, 4.3.9, 4.3.14 из [5].

2.7 Условия равновесия при наличии сил трения

Трение покоя. При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в местах их соприкосновения возникает сила сцепления (сила трения покоя), препятствующая движению тел друг относительно друга. При увеличении сдвигающей силы тело какое-то время будет находиться в покое. При превышении определенного (предельного) значения сдвигающей силы тело выйдет из состояния покоя и начнет двигаться.

Трение скольжения. При скольжении тела по поверхности другого также возникает сила, препятствующая этому движению, – сила трения скольжения.

Законы трения

1 Сила трения скольжения направлена противоположно возможному движению тела.

2 Сила трения не зависит от площади соприкасающихся поверхностей.

3 Максимальная сила трения пропорциональна нормальному давлению. Под нормальным давлением понимают полное давление на всю площадь соприкосновения трущихся поверхностей:

$$F_{\max} = f \cdot N .$$

4 Коэффициент трения скольжения f зависит от материала и физического состояния трущихся поверхностей.

Коэффициент трения скольжения несколько меньше коэффициента трения покоя. В технических расчетах принимают, что эти коэффициенты равны. С увеличением скорости движения для большинства материалов коэффициент трения скольжения уменьшается. Данный коэффициент определяют экспериментально.

Трение качения. Сопротивление качению одного тела по поверхности другого называется трением качения. Трение качения возникает в результате деформации катящегося тела и опорной поверхности, которые в действительности не являются абсолютно твердыми. Поэтому контакт между телом и поверхностью происходит по некоторой площадке (рисунок 17, *а*). Нормальная реакция смещается относительно центра катка в сторону его движения на некоторую величину $f_к$, которая при выходе тела из состояния равновесия достигает максимума и называется коэффициентом трения качения (рисунок 17, *б*). Коэффициент трения качения имеет размерность длины в отличие от безразмерного коэффициента трения скольжения. Обычно нормальную реакцию проводят через центр катка, добавляя при этом к телу пару сил с моментом (рисунок 17, *в*), который называют моментом трения качения:

$$M_T = f_K \cdot N\,.$$

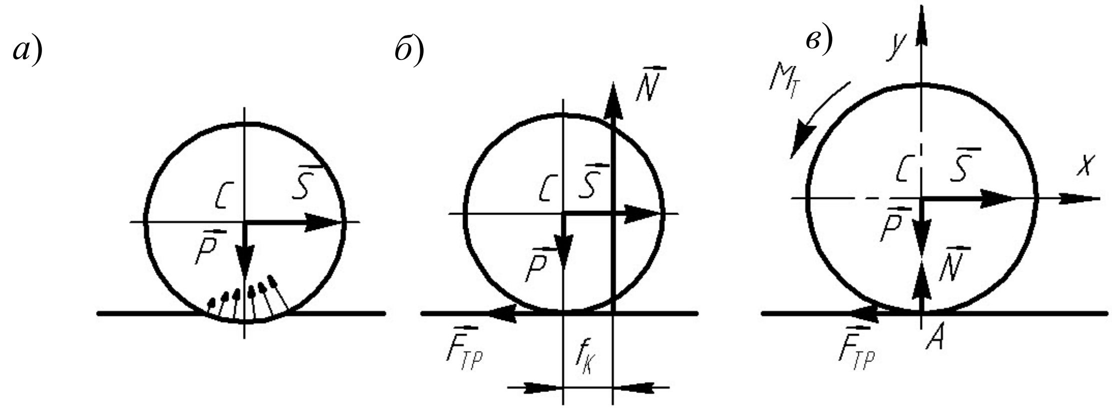


Рисунок 17

Задача 8. На наклонной поверхности находится цилиндр радиусом r (рисунок 18). Определить, при каких значениях угла наклона плоскости к горизонту α цилиндр будет находиться в равновесии, если f – коэффициент трения скольжения, $f_к$ – коэффициент трения качения.

Решение

Изобразим действующие на цилиндр силы. Силу трения скольжения направим вверх по наклонной поверхности, момент трения качения – по часовой стрелке, одну из осей направим по наклонной поверхности (рисунок 18).

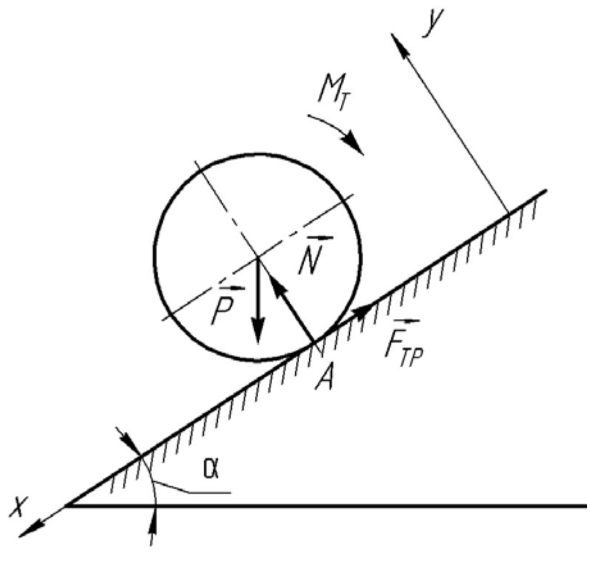


Рисунок 18

Составим три уравнения равновесия для уравновешенной плоской произвольной системы сил:

$$\sum F_{iX} = -F_{TP} + P \cdot \sin\alpha = 0\,;$$

$$\sum F_{iY} = N - P \cdot \cos\alpha = 0;$$

$$\sum M_A(\vec{F}_i) = M_T - P \cdot \sin\alpha \cdot r = 0.$$

Находим из первого уравнения

$$F_{TP} = P \cdot \sin\alpha,$$

из второго

$$N = P \cdot \cos\alpha,$$

из третьего

$$M_T = P \cdot \sin\alpha \cdot r.$$

Для равновесия необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

$$F_{TP} \le f \cdot N; \qquad M_T = f_K \cdot N.$$

С учетом полученных зависимостей

$$P \cdot \sin\alpha \le f \cdot P \cdot \cos\alpha \to \mathrm{tg}\alpha \le f; \qquad P \cdot \sin\alpha \cdot r \le f_K \cdot P \cdot \cos\alpha \to \mathrm{tg}\alpha \le \frac{f_K}{r}.$$

Для равновесия цилиндра на наклонной поверхности необходимо, чтобы оба условия выполнялись одновременно.

2.8 Плоская произвольная система сил. Решение смешанных задач по статике

1 Сформулировать принцип освобождаемости от связей.

2 Как определяется проекция силы на ось?

3 Как определяется момент силы относительно точки?

4 Условия равновесия плоской системы (сходящихся, параллельных, произвольно расположенных) сил.

5 Решение контрольных задач по статике.

3 Кинематика

3.1 Кинематика точки

Кинематикой называется раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения тел без учета их массы и действующих на них сил.

Под движением в механике понимается изменение с течением времени положения данного тела в пространстве по отношению к другим телам.

Материальной точкой считают твердое тело, размерами которого в данном случае можно пренебречь. Движение точки считают заданным, если известен способ, позволяющий установить ее положение относительно выбранной системы отсчета в любой момент времени.

Непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка относительно данной системы отсчета, называется траекторией точки. Если траекторией является прямая линия, движение точки называется прямолинейным, а если кривая – криволинейным.

Существуют три способа задания движения точки: векторный, координатный, естественный.

Векторный способ задания движения заключается в определении положения точки в пространстве радиус-вектором, который является векторной функцией времени, относительно выбранной системы отсчета.

Координатный способ задания движения заключается в задании координат точки в виде известных, непрерывных, дважды дифференцируемых функций времени.

Естественный способ задания движения считается известным, если заданы траектория движения точки, начало отсчета, положительное и отрицательное направления движения, закон движения точки по траектории $S = S(t)$.

Закон движения $S = S(t)$ также называют дуговой координатой, которую отсчитывают от начального положения. Дуговую координату не следует смешивать с длиной пути, пройденного точкой, т. к. за начало отсчета может быть выбрана любая точка или движение может быть колебательным.

При естественном способе задания движения точки в качестве координатных осей принимают естественные (оси естественного трехгранника): $\vec{\tau}$ – касательная, $\vec{n}$ – нормаль, $\vec{b}$ – бинормаль. Данные оси связывают непосредственно с движущейся точкой.

Переход от координатного к естественному способу задания движения

Если движение точки задано координатным способом: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, то для перехода к естественному необходимо:

– установить траекторию, если возможно, т. е. получить уравнение траектории в явном виде:

$$y = f_1(x),\ z = f_2(x);$$

– определить закон движения точки по этой траектории $S = S(t)$ по формуле

$$\int_0^t \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}\, dt \; ;$$

– установить начало отсчета, подставив в уравнение движения начальное время. Если это время не задано, то подставляют $t_0 = 0$;

– определить положительное направление движения, которое можно узнать или по вектору скорости, или подставляя значения времени в уравнения движения, чтобы получить новую точку на траектории.

Задача 1. Определить ускорение точки через 2 с после начала движения из состояния покоя, если движение задано уравнениями $x = 3t^2$, $y = 4t^2$.

Решение

Находим проекции скорости и ускорения на координатные оси:

$$V_X = \dot{x} = 6t, \quad V_X = 12 \text{ м/с}; \quad V_Y = \dot{y} = 8t, \quad V_Y = 16 \text{ м/с};$$

$$V = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20 \text{ м/с};$$

$$a_X = \ddot{x} = 6 \text{ м/с}^2, \quad a_Y = \ddot{y} = 8 \text{ м/с}^2;$$

$$a_\tau = \frac{|V_X \cdot a_X + V_Y \cdot a_Y|}{V} = \frac{12 \cdot 6 + 16 \cdot 8}{20} = 10 \text{ м/с}^2;$$

$$a_n = \frac{|V_X \cdot a_Y - V_Y \cdot a_X|}{V} = \frac{|12 \cdot 8 - 16 \cdot 6|}{20} = 0 \text{ м/с}^2;$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{10^2 + 0^2} = 10 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_\tau = 10$ м/с², $a_n = 0$ м/с², $a = 10$ м/с².

Решить задачи 7.3.6, 7.4.9, 7.4.20, 7.5.8, 7.5.10, 7.6.9, 7.7.17, 7.8.8 из [5].

3.2 Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором прямая, соединяющая две любые точки этого тела, перемещается, оставаясь параллельной своему начальному направлению.

Точки твердого тела, совершающего поступательное движение, перемещаются как по прямолинейным, так и по криволинейным траекториям.

Поступательное движение твердого тела характеризуется заданием движения одной его точки, обычно центра тяжести, и может быть задано любым из изученных способов. Для задания поступательного движения тела в декартовой системе координат достаточно записать $x_c = f_1(t)$, $y_c = f_2(t)$, $z_c = f_3(t)$. Эти выражения будут законом поступательного движения.

Основные свойства поступательного движения твердого тела определяются теоремой: при поступательном движении твердого тела все его точки описывают одинаковые траектории и в каждый момент времени имеют одинаковые по величине и направлению скорости и ускорения.

Скорость и ускорение твердого тела находят по формулам, применяемым в кинематике точки.

Задача 2. Точка A шарнирного четырехзвенника $OABO_1$ движется по закону $S = 0,5\pi t^2$ (рисунок 19). Определить скорость и ускорение точки C стержня AB, если $AC = BC$, $O_1B = OA = 0,4$ м, $t = 2$ с.

Решение

Стержень AB совершает поступательное движение, т. к. в любой момент времени прямая AB остается параллельной самой себе.

Следовательно, скорости и ускорения точек A, B, C будут одинаковы:

$$V_C = V_A = \dot{S} = \pi t;$$

$$a_A^\tau = \dot{V}_A = \pi = 3,14;$$

$$a_A^n = \frac{V_A^2}{AO} = \frac{4\pi^2}{0,4} = 10\pi^2 = 98,6;$$

$$a_C = a_A = \sqrt{\left(a_A^\tau\right)^2 + \left(a_A^n\right)^2} = \sqrt{3,14^2 + 98,6^2} = 98,65.$$

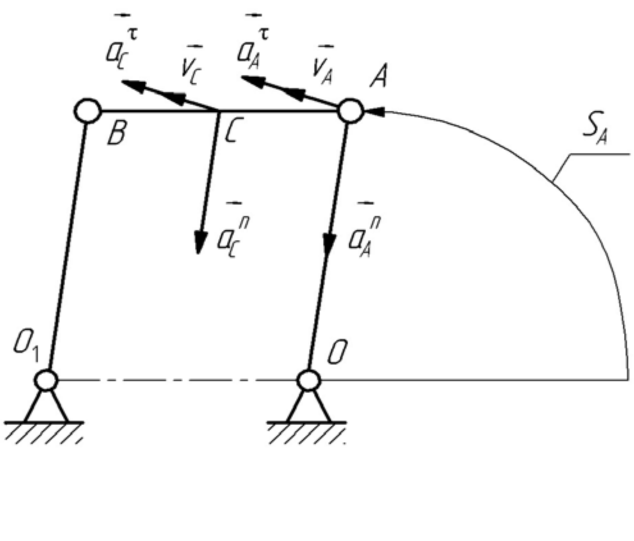


Рисунок 19

Ответ: $V_C = 2\pi$ м/с, $a_C = 98,65$ м/с^2.

Решить задачи: 8.1.4, 8.1.5, 8.1.8, 8.1.14 из [5].

3.3 Вращательное движение твердого тела

Вращательным движением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое его движение, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу (или неизменно с ним связанные), остаются во все время движения неподвижными.

Прямая, проходящая через данные неподвижные точки, называется осью вращения. Точки тела, не принадлежащие оси вращения, двигаются в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, описывая окружности с центрами на этой оси.

Угловая скорость характеризует быстроту и направление изменения угла поворота в данный момент времени. Величина угловой скорости равна первой производной от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$

Полученный знак при дифференцировании угла поворота по времени определяет направление вращения. Если $\omega > 0$, то вращение происходит против хода часовой стрелки, если $\omega < 0$, то вращение – по ходу часовой стрелки.

Угловое ускорение характеризует быстроту и направление изменения угловой скорости в данный момент времени. Величина углового ускорения равна первой производной от угловой скорости или второй производной от угла поворота по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}.$$

Полученный знак производной определяет направление углового ускорения. Если $\varepsilon > 0$, то угловое ускорение направлено против хода часовой стрелки, если $\varepsilon < 0$, то угловое ускорение – по ходу часовой стрелки.

Задача 3. Груз *1* опускается по закону $x = 2{,}4t^2 - 4t$. Определить угловую скорость, угловое ускорение барабана, а также скорость и ускорение точки *M* в момент времени t = 1 с, если $R = 3r = 0{,}6$ м (рисунок 20).

Решение

Определим скорость груза:

$$V = \dot{x} = 4{,}8t - 4.$$

Находим угловую скорость и угловое ускорение:

$$\omega = \frac{V}{r} = \frac{4,8t - 4}{0,2} = 24t - 20\,;$$

$$\varepsilon = \dot{\omega} = 24 \text{ рад/с}^2,\ \omega = 24t - 20 = 4 \text{ рад/с}.$$

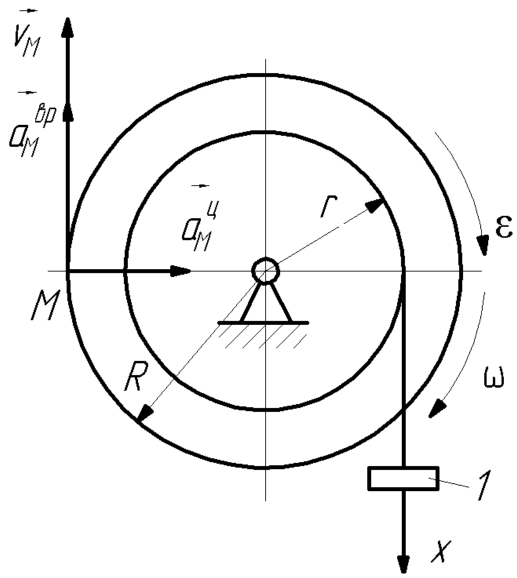


Рисунок 20

Скорость точки *M*

$$V_M = \omega \cdot R = 4 \cdot 0,6 = 2,4 \text{ м/с}.$$

Вращательное ускорение точки *M*

$$a_M^{BP} = \varepsilon \cdot R = 24 \cdot 0,6 = 14,4 \text{ м/с}^2.$$

Центростремительное ускорение точки *M*

$$a_M^{Ц} = \omega^2 \cdot R = 4^2 \cdot 0,6 = 9,6 \text{ м/с}^2.$$

Модуль полного ускорения точки *M*

$$a = \sqrt{a_{BP}^2 + a_{Ц}^2} = \sqrt{14,4^2 + 9,6^2} = 17,31 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $\omega = 4$ рад/с, $\varepsilon = 24$ рад/с^2, $V_M = 2,4$ м/с, $a = 17,31$ м/с^2.

Решить задачи: 8.2.2, 8.2.8, 8.3.3, 8.3.13, 8.3.15, 8.3.16 из [5].

3.4 Плоскопараллельное движение твердого тела. Определение скоростей точек плоской фигуры

Плоским или плоскопараллельным называют такое движение твердого тела, при котором все его точки перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Уравнения плоского движения твердого тела

Для задания движения сечения твердого тела достаточно описать движение какого-либо отрезка *CA*, принадлежащего этому сечению. Положение отрезка *CA* определяется координатами точки *C*, выбранной за полюс, и углом поворота отрезка, который отсчитывается от выбранного начального положения (рисунок 21). Тогда уравнениями плоского движения твердого тела будут следующие:

$$X_C = f_1(t); \quad Y_C = f_2(t); \quad \varphi = f_3(t).$$

Первые два уравнения описывают поступательное движение плоской фигуры, определяемое движением полюса *C*. Поступательное движение плоской фигуры зависит от выбора полюса. Третье уравнение описывает вращательное движение плоской фигуры вокруг полюса.

Скорость любой точки тела в плоском движении равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки во вращательном движении вместе с телом вокруг полюса.

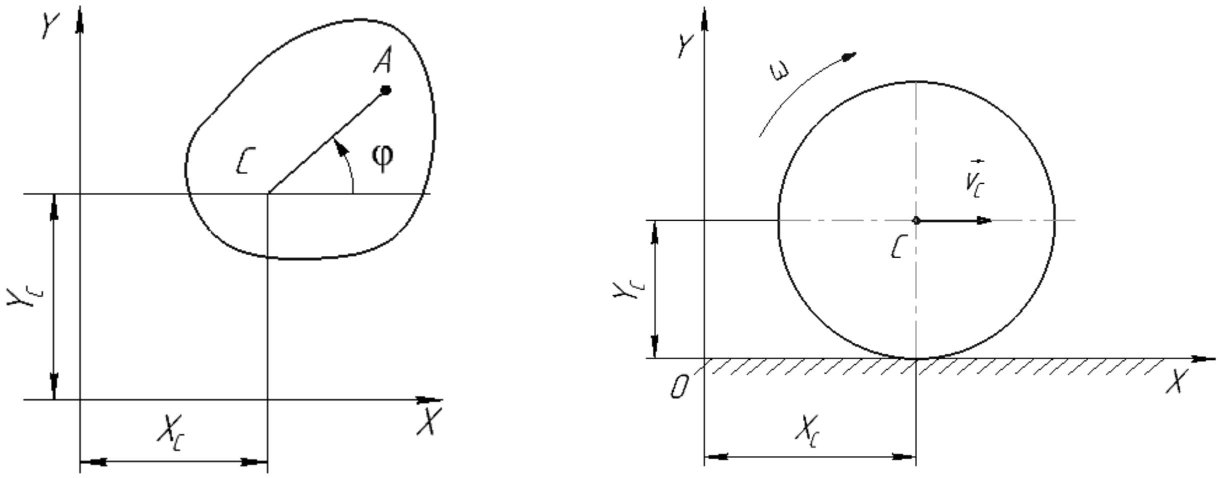


Рисунок 21

Проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, соединяющие эти точки, равны между собой. При этом проекции должны иметь одинаковый знак.

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка в плоскости движения плоской фигуры, скорость которой в данный момент равна нулю.

Если известны направления векторов скоростей двух точек плоской фигуры, то МЦС находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных к векторам скоростей в точках их приложения.

Если известны МЦС и угловая скорость вращения, то вектор скорости любой точки будет перпендикулярен отрезку, соединяющему МЦС с данной точкой, и направлен в соответствии с угловой скоростью. Модуль скорости равен произведению угловой скорости на расстояние от точки до МЦС.

Задача 4. Колесо радиусом R = 0,4 м катится по прямолинейному горизонтальному рельсу с постоянной угловой скоростью ω = 2 рад/с (рисунок 22). Центр колеса имеет постоянную скорость V_c = 0,8 м/с. Определить скорость точки M обода колеса.

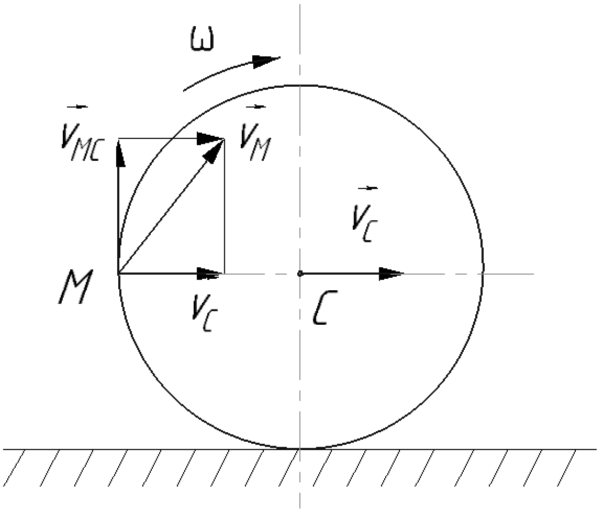


Рисунок 22

Решение

За полюс примем точку C, скорость которой известна. Тогда

$$\vec{V}_M = \vec{V}_C + \vec{V}_{MC}.$$

Вращательная скорость мочки M относительно полюса C

$$V_{MC} = \omega \cdot MC = 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}8 \text{ м/с.}$$

Вектор $\vec{V}_{MC}$ перпендикулярен отрезку MC и направлен в соответствии с угловой скоростью. Поэтому вектор $\vec{V}_{MC}$ относительно полюса C должен показывать направление угловой скорости (см. рисунок 22).

Так как $\vec{V}_{MC} \perp \vec{V}_C$, то

$$V_M = \sqrt{V_C^2 + V_{MC}^2} = \sqrt{0{,}8^2 + 0{,}8^2} = 1{,}13 \text{ м/с.}$$

Ответ: $V_M = 1{,}13$ м/с.

Задача 5. В положении механизма, схема которого приведена на рисунке 23, определить угловую скорость шатуна *AB* и скорость точки *B*, если $\omega_{OA} = 2$ рад/с, *OA* = 0,2 м, *AB* = 1,6 м, *BC* = 0,8 м, *h* = 0,8 м.

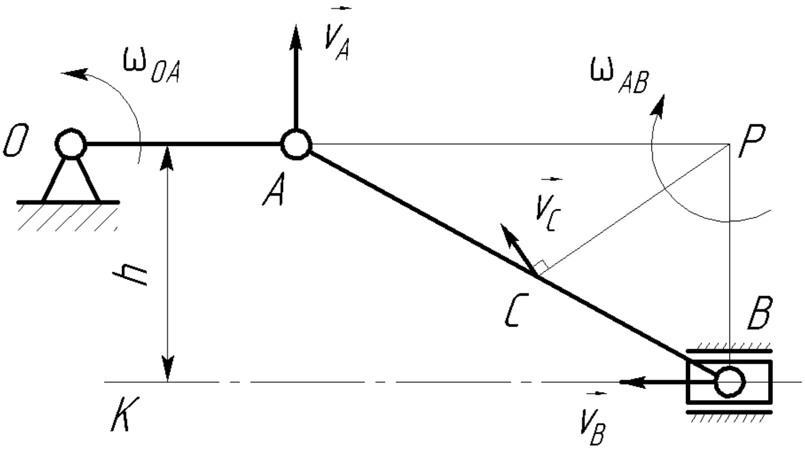


Рисунок 23

Решение

Найдем скорость точки *A*:

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 0,2 = 0,4 \text{ м/с}; \qquad \vec{V}_A \perp OA.$$

Скорость ползуна *B* должна быть направлена по прямой *KB*.

Мгновенный центр шатуна *AB* находится в точке *P* пересечения перпендикуляров, восстановленных к направлениям векторов скоростей точек *A* и *B*.

Угловая скорость шатуна *AB*

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP}.$$

Определим величины *AP*, *BP* и *CP* с учетом того, что $BP = h = 0,8$ м:

$$AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = \sqrt{1,6^2 - 0,8^2} = 1,39 \text{ м}.$$

$$\cos\angle PBC = \frac{h}{AB} = \frac{0,8}{1,6} = 0,5 \to \angle PBC = 60°.$$

Треугольник ΔPBC равносторонний, следовательно,

$$CP = BP = BC = 0,8 \text{ м}.$$

Находим угловую скорость:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{0,4}{1,39} = 0,29 \text{ рад/с}.$$

Определяем скорости точек B и C:

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BP = 0,29 \cdot 0,8 = 0,23 \text{ м/с};$$

$$V_C = \omega_{AB} \cdot CP = 0,29 \cdot 0,8 = 0,23 \text{ м/с}.$$

Направление угловой скорости шатуна ω_{AB} определяется по направлению вращения вектора $\vec{V}_A$ скорости точки A относительно мгновенного центра скоростей P. Угловая скорость шатуна AB направлена по часовой стрелке. Скорости точек B и C должны показывать такое же направление. Для построения вектора $\vec{V}_C$ восстанавливаем перпендикуляр к отрезку CP и направляем вектор $\vec{V}_C$ в соответствии с направлением ω_{AB}.

Ответ: $\omega_{AB} = 0,29$ рад/с, $V_B = V_C = 0,23$ м/с.

Решить задачи 9.2.2, 9.2.4, 9.2.6, 9.5.7, 9.5.10, 9.4.10 из [5].

3.5 Плоскопараллельное движение твердого тела. Определение ускорений точек плоской фигуры

Ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения данной точки во вращательном движении плоской фигуры вокруг данного полюса:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_C + \vec{a}_{MC} \quad \text{или} \quad \vec{a}_M = \vec{a}_C + \vec{a}_{MC}^{ВР} + \vec{a}_{MC}^{Ц}.$$

Задача 6. Используя условие задачи 5, определить ускорение точки B.

Решение

За полюс выберем точку A, т. к. ускорение этой точки можно найти:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^{ВР} + \vec{a}_A^{Ц}.$$

Так как кривошип OA вращается равномерно, $\omega = \text{const} \to \varepsilon = \dot{\omega} = 0$, получим

$$a_A^{Ц} = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 2^2 \cdot 0,2 = 0,8 \text{ м/с}^2; \quad \vec{a}_A^{ВР} = \varepsilon \cdot AO = 0.$$

Вектор $\vec{a}_A^{Ц}$ направлен по AO от точки A к точке O (рисунок 24).

Находим ускорение точки B:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^{ВР} + \vec{a}_A^{Ц} + \vec{a}_{BA}^{ВР} + \vec{a}_{BA}^{Ц}.$$

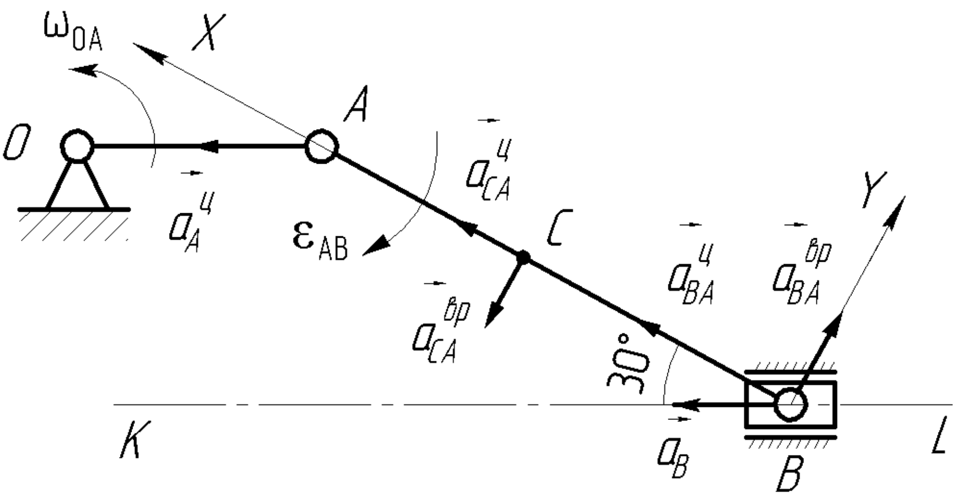


Рисунок 24

Находим $\vec{a}_{BA}^{BP}$ и $\vec{a}_{BA}^{Ц}$:

$$\vec{a}_A^{BP} = |\varepsilon_{AB}| \cdot AB.$$

Так как ε_{AB} неизвестно, то зададим направление вектора $\vec{a}_{BA}^{BP}$, учитывая, что $\vec{a}_{BA}^{BP} \perp BA$.

$$\vec{a}_{BA}^{Ц} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0{,}29^2 \cdot 1{,}6 = 0{,}135 \text{ м/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_{BA}^{Ц}$ направлен по BA от точки B к полюсу A. Проецируем выражение для определения ускорения точки B на выбранные оси (X, Y):

$$\text{ось } X\text{: } a_B \cdot \cos 30° = a_A^{Ц} \cdot \cos 30° + a_{BA}^{Ц};$$

$$\text{ось } Y\text{: } -a_B \cdot \cos 60° = a_{BA}^{BP} - a_A^{Ц} \cdot \cos 60°.$$

Из предпоследнего равенства находим

$$a_B = \frac{a_A^{Ц} \cdot \cos 30° + a_{BA}^{Ц}}{\cos 30°} = \frac{0{,}8\cos 30° + 0{,}135}{\cos 30°} = 0{,}96 \text{ м/с}^2,$$

из последнего

$$a_{BA}^{BP} = a_A^{Ц} \cdot \cos 60° - a_B \cdot \cos 60° = 0{,}8\cos 60° - 0{,}96\cos 60° = -0{,}08 \text{ м/с}^2.$$

Знак «минус» показывает, что вектор $\vec{a}_{BA}^{BP}$ направлен в противоположную сторону, выбранную на рисунке 24.

Определим угловое ускорение шатуна AB:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\left|a_{BA}^{BP}\right|}{AB} = \frac{0{,}08}{1{,}6} = 0{,}05 \text{ рад/с}^2.$$

Направление ε_{AB} будет по часовой стрелке.

Ответ: $a_B = 0{,}96$ м/с^2.

Решить задачи 9.7.16, 9.7.17, 9.7.20, 9.7.21 из [5].

3.6 Сложное движение точки. Теорема о сложении скоростей

Сложным движением называют такое движение, при котором точка одновременно участвует в двух или более движениях (рисунок 25).

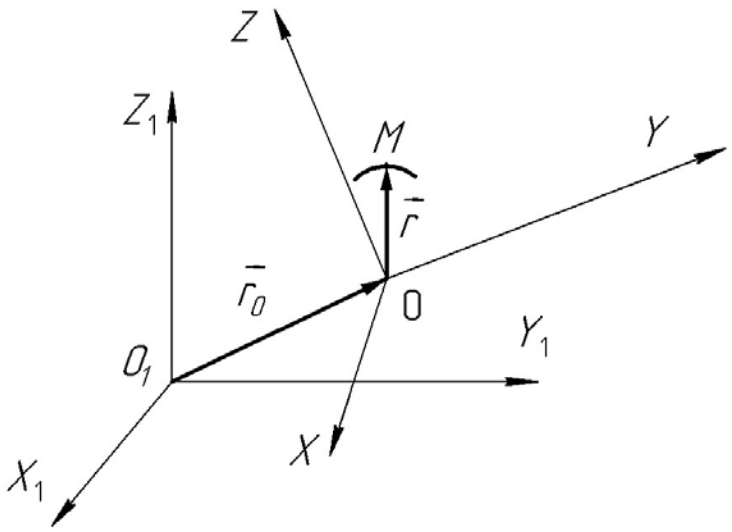


Рисунок 25

Абсолютным движением называют движение точки M по отношению к основной системе отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$, которую условно принимают за неподвижную.

Относительным движением называют движение точки M по отношению к подвижной системе отсчета $OXYZ$.

Переносным движением называют движение подвижной системы отсчета $OXYZ$ относительно основной (неподвижной) системы отсчета $O_1X_1Y_1Z_1$.

Абсолютной скоростью называют скорость точки M относительно основной системы координат $O_1X_1Y_1Z_1$ и обозначают $\vec{V}_a$.

Относительной скоростью называют скорость точки M относительно подвижной системы координат $OXYZ$ и обозначают $\vec{V}_r$.

Переносной скоростью точки M называют скорость движения подвижной системой координат вместе с неизменно связанными с ней точками и обозначают $\vec{V}_e$.

Абсолютная скорость точки в сложном движении равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r.$$

Модуль абсолютной скорости в общем случае находят проецированием последнего равенства на оси координат, т. к. угол между векторами относительной и переносной скоростей может быть различный:

$$V_a = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2},$$

где $V_X = V_{ex} + V_{rx}$; $V_Y = V_{ey} + V_{ry}$.

Определение скоростей относительного и переносного движений начинают с нахождения положения точки на траектории относительного движения. Затем мысленно останавливают относительное движение и определяют скорость той точки подвижной системы координат, в которой зафиксирована движущаяся точка. Это будет переносная скорость. Для определения относительной скорости мысленно останавливают движение подвижной системы координат, т. е. переносное движение, и известными способами находят скорость точки относительно подвижной системы координат.

Задача 7. Диск радиусом R = 50 см вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 3t^3 - 6t^2$ рад. По ободу движется точка M по закону $OM = S = \frac{\pi}{2} R \cdot (2t^2 - t^3)$ (рисунок 26). Определить абсолютную скорость точки в момент времени t_1 = 1 с.

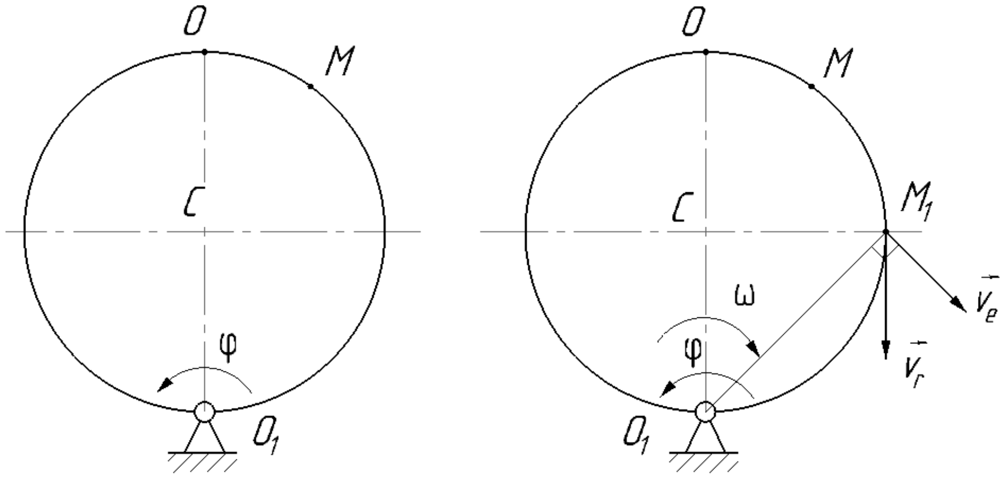


Рисунок 26

Решение

Точка M совершает сложное движение. Движение точки M по ободу диска будет относительным, а вращение диска вокруг точки O_1 – переносным.

Определим положение точки M на траектории относительного движения при t_1 = 1 с:

$$OM = S = \frac{\pi}{2} R \cdot (2t^2 - t^3) = \frac{\pi \cdot R}{2}.$$

Находим угол O_1CM_1:

$$\angle O_1CM_1 = \frac{OM_1}{R} = \frac{\pi}{2}.$$

Находим скорость относительного движения:

$$V_r = \dot{S} = \frac{\pi}{2} R \cdot (4t - 3t^2).$$

При t_1 = 1 с получим

$$V_r = \dot{S} = \frac{50\pi}{2} \cdot (4-3) = 25\pi = 78{,}5 \text{ см/с.}$$

Так как $V_r > 0$, то вектор $\vec{V}_r$ направлен по касательной к окружности в точке M_1 в сторону увеличения дуги OM (см. рисунок 26).

Находим скорость переносного движения:

$$V_e = |\omega| \cdot h,$$

где $\omega = \dot{\varphi} = 9t^2 - 12t$.

При t_1 = 1 с значение $\omega = -3$ рад/с. Знак «минус» показывает, что направление ω противоположно направлению положительного отсчета угла φ.

Так как

$$h = O_1M_1 = R\sqrt{2} = 50\sqrt{2} = 70{,}5 \text{ см,}$$

то

$$V_e = |-3| \cdot 70{,}5 = 211{,}5 \text{ см/с.}$$

Вектор $\vec{V}_e$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{M_1O_1}$ и направлен в соответствии с угловой скоростью (см. рисунок 26).

Так как $\angle \vec{V}_e, \vec{V}_r = 45°$, то

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_r \cdot V_e \cdot \cos 45°} = \sqrt{211{,}5^2 + 78{,}5^2 + 2 \cdot 211{,}5 \cdot 78{,}5 \cdot 0{,}71} = 272{,}89 \text{ см/с.}$$

Ответ: $V_a = 272{,}89$ см/с.

3.7 Сложное движение точки. Теорема о сложении ускорений

Абсолютное ускорение точки в сложном движении равно геометрической сумме переносного, относительного и кориолисова ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_к \quad \text{или} \quad \vec{a} = \vec{a}_e^{ц} + \vec{a}_e^{вр} + \vec{a}_r^{n} + \vec{a}_r^{\tau} + \vec{a}_к,$$

где $\vec{a}_e$ – ускорение переносного движения;
$\vec{a}_r$ – ускорение относительного движения;
$\vec{a}_к$ – ускорение Кориолиса,

$$\vec{a}_к = 2\left(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r\right).$$

Ускорение Кориолиса характеризует:

– изменение величины переносной скорости точки вследствие ее относительного движения;

– изменение направления вектора относительной скорости вследствие вращательного переносного движения.

Направление ускорения Кориолиса определяют либо по правилу векторного произведения, либо по правилу Жуковского.

Правило Жуковского: проецируем вектор относительной скорости $\vec{V}_r$ на плоскость, перпендикулярную вектору переносной угловой скорости, и поворачиваем эту проекцию в той же плоскости на угол 90° в сторону переносной угловой скорости.

Модуль ускорения Кориолиса

$$a_к = 2\omega_e \cdot V_r \cdot \sin\left(\vec{\omega}_e \,\widehat{\ }\, \vec{V}_r\right).$$

Ускорение Кориолиса равно нулю, если:

– $\omega_e = 0$ – переносное движение является поступательным;

– $V_r = 0$ – относительная скорость в данный момент равна нулю;

– $\sin\left(\vec{\omega}_e \,\widehat{\ }\, \vec{V}_r\right) = 0$ – вектор угловой скорости переносного движения $\vec{\omega}_e$ параллелен вектору относительной скорости $\vec{V}_r$.

Модуль абсолютного ускорения точки можно найти через проекции на выбранные оси координат. Тогда

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Задача 8. Используя условие и решение задачи 7, необходимо определить абсолютное ускорение точки *M*.

Решение

Рассмотрим переносное движение точки *M*.

Центростремительное переносное ускорение

$$\vec{a}_e^{ц} = \omega_e^2 \cdot h = 3^2 \cdot 70{,}5 = 634{,}5 \text{ см/с}^2.$$

Вращательное переносное ускорение

$$\vec{a}_e^{вр} = \varepsilon \cdot h = 6 \cdot 70{,}5 = 423 \text{ см/с}^2,$$

где $\varepsilon = \dot{\omega} = 18t - 12$; $\varepsilon = 6$ рад/с^2 при $t_1 = 1$ с.

Угловое ускорение направлено противоположно угловой скорости (рисунок 27), т. к. производная имеет другой знак. Вектор $\vec{a}_e^{ц}$ направлен по M_1O_1 к оси переносного вращения. Вектор $\vec{a}_e^{вр}$ перпендикулярен M_1O_1 и направлен в соответствии с угловым ускорением.

Относительное тангенциальное ускорение

$$a_r^{\tau} = \dot{V}_r = \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{2} R \cdot \left(4t - 3t^2\right)\right) = \frac{\pi}{2} R \cdot (4 - 6t).$$

При $t_1 = 1$ с значение $a_r^{\tau} = -\pi R = -\pi \cdot 50 = -157$ см/с^2.

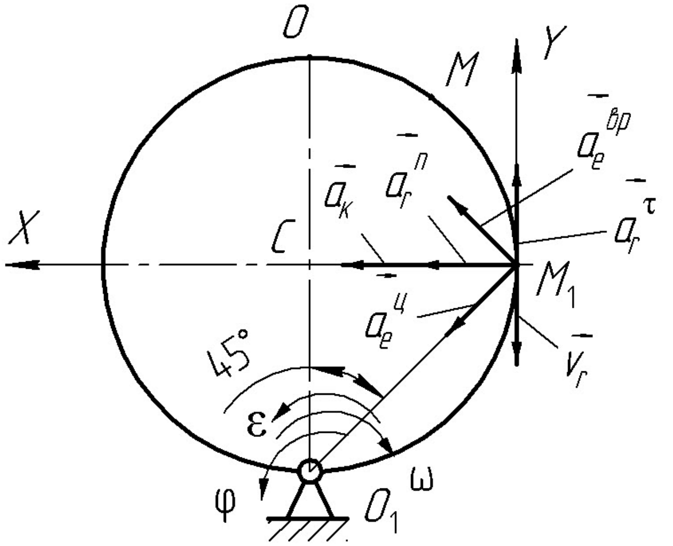


Рисунок 27

Нормальное относительное ускорение

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{r} = \frac{25\pi^2}{50} = 123{,}25 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_r^n$ направлен по M_1C от точки M_1 к точке C. Вектор $\vec{a}_r^\tau$ направлен противоположно вектору $\vec{V}_r$, т. к. a_r^τ меньше нуля.

Находим ускорение Кориолиса:

$$a_к = 2 \cdot 3 \cdot 78{,}5 \sin 90° = 471 \text{ м/с}^2.$$

Направление $\vec{a}_к$ находим по правилу Жуковского. Так как вектор $\vec{V}_r$ находится в плоскости, перпендикулярной оси переносного вращения, то повернем $\vec{V}_r$ на 90° в направлении ω_e, т. е. по ходу часовой стрелки. Вектор $\vec{a}_к$ будет направлен от M_1 к C.

Проецируем полученные ускорения на выбранные координатные оси:

$$a_x = a_e^{вр} \cdot \cos 45° + a_e^{ц} \cdot \cos 45° + a_r^n + a_к =$$

$$= 423 \cos 45° + 634{,}5 \cos 45° + 123{,}25 + 471 = 1341{,}9 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = a_e^{вр} \cdot \cos 45 || -a_e^{ц} \cdot \cos 45° + a_r^\tau =$$

$$= 423 \cos 45° - 634{,}5 \cos 45° + 157 = 7{,}47 \text{ см/с}^2.$$

Абсолютное ускорение точки M

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{1341{,}9^2 + 7{,}47^2} = 1341{,}92 \text{ см / с}^2.$$

Ответ: a = 1341,92 см/с^2.

3.8 Сложное движение тела

Движение твердого тела называют сложным, если тело одновременно участвует как минимум в двух движениях. Относительным движением твердого тела называют его движение относительно подвижной системы координат. Переносным движением твердого тела называют его движение вместе с подвижной системой координат относительно неподвижной.

Сложение поступательных движений твердого тела. При сложении двух поступательных движений твердого тела получаем поступательное движение со скоростью, равной геометрической сумме скоростей составляющих поступательных движений:

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2.$$

Сложение вращений вокруг параллельных осей. Сложение двух одинаково направленных вращений вокруг параллельных осей приводит к одному вращению вокруг параллельной мгновенной оси вращения с угловой скоростью, равной сумме угловых скоростей составляющих вращений. Мгновенная ось проходит через точку, которая делит внутренним образом расстояние между осями на части, обратно пропорциональные угловым скоростям составляющих вращений. Абсолютное угловое ускорение направлено по мгновенной оси вращения.

Задача 9. Кривошип *OA* вращается с постоянной скоростью $\omega_{OA} = 2$ рад/с и приводит в движение колесо *2* (рисунок 28). Определить положение мгновенной оси вращения и абсолютную угловую скорость, если *OA* = 40 см, r_2 = 10 см, $\omega_2 = 6$ рад/с.

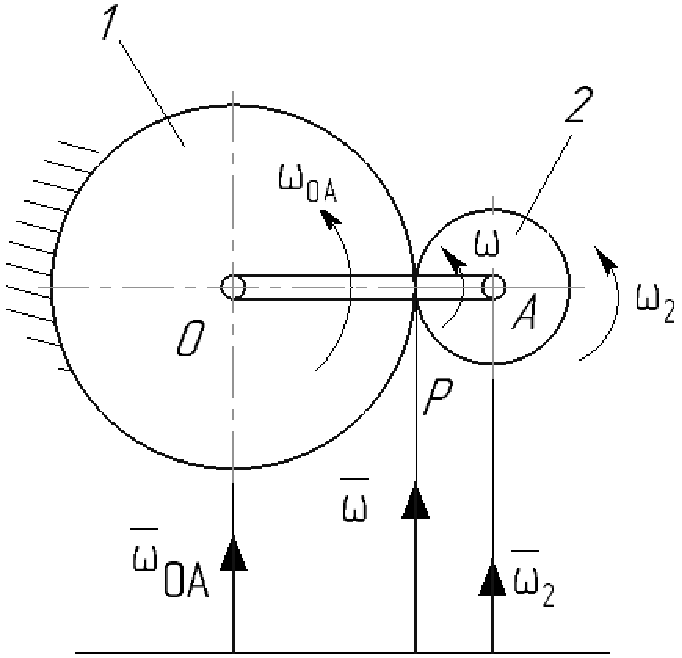


Рисунок 28

Решение

Так как угловые скорости имеют одинаковое направление, то абсолютная угловая скорость равна сумме угловых скоростей кривошипа и колеса *2*:

$$\omega = \omega_{OA} + \omega_2 = 2 + 6 = 8 \text{ рад/с.}$$

Для определения положения мгновенной оси вращения составим пропорцию:

$$\frac{\omega_{OA}}{\omega_2} = \frac{AP}{OP},\; AP = OA - OP;$$

$$\omega_{OA} \cdot OP = \omega_2 \cdot AP = \omega_2 \cdot (OA - OP);$$

$$OP(\omega_{OA} + \omega_2) = \omega_2 \cdot OA;$$

$$OP = \frac{\omega_2 \cdot OA}{\omega_{OA} + \omega_2} = \frac{40 \cdot 6}{2 + 6} = 30 \text{ см.}$$

Следовательно, мгновенная ось вращения будет проходить через точку соприкосновения подвижного *1* и неподвижного 2 колеса (см. рисунок 28).

Ответ: $\omega = 8$ рад/с, *OP* = 30 см.

3.9 Кинематика точки, поступательное и вращательное движения тела. Решение смешанных задач по кинематике

1 Как определяются скорости и ускорения при векторном и координатном способах задания движения точки?

2 Как определяются скорости и ускорения при естественном способе задания движения?

3 Что можно сказать о скоростях и ускорениях точек тела, движущегося поступательно?

4 Как определить кинематические характеристики вращающегося тела:

а) угловую скорость (направление вектора, величину);

б) угловое ускорение (направление вектора, величину)?

5 Как определить кинематические характеристики точек тела, совершающего вращательное движение:

а) скорость точки (направление вектора, величину);

б) ускорение точки (направление вектора, величину)?

6 Решение контрольных задач по кинематике точки, поступательному и вращательному движениям тела.

Список литературы

1 **Цывильский, В. Л.** Теоретическая механика: учебник / В. Л. Цывильский. – 5-е изд., перераб. и доп. – Москва: КУРС; ИНФРА-М, 2020. – 368 с.

2 **Чигарев, А. В.** Теоретическая механика. Решение задач: учебное пособие / А. В. Чигарев, Ю. В. Чигарев, И. С. Крук. – Минск: Минфин, 2016. – 478 с.

3 **Мещерский, И. В.** Задачи по теоретической механике: учебное пособие / И. В. Мещерский; под ред. В. А. Пальмова, Д. Р. Меркина. – 46-е изд., стереотип. – Москва: Лань, 2006. – 448 с.

4 **Кирсанов, М. Н.** Теоретическая механика. Сборник задач: учебное пособие / М. Н. Кирсанов. – Москва: ИНФРА-М, 2015. – 430 с.

5 Сборник коротких задач по теоретической механике: учебное пособие для вузов / Под ред. О. Э. Кепе. – 4-е изд., испр. – Санкт-Петербург: Лань, 2016. – 368 с.: ил.

6 **Тарг, С. М.** Краткий курс теоретической механики: учебник / С. М. Тарг. – Москва: Высшая школа, 1995. – 416 с.