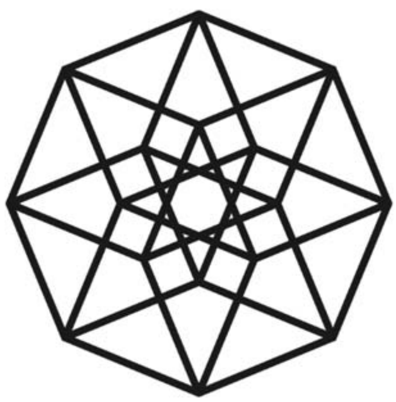
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации к практическим занятиям для студентов всех специальностей дневной и заочной форм обучения

ВЕКТОРЫ И ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ



Могилев 2022

УДК 514
ББК 22.151.5
В93

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «27» октября 2022 г., протокол № 2

Составители: доц. И. У. Примак;
доц. Д. В. Роголев;
ст. преподаватель А. Г. Козлов

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. И. И. Маковецкий

Методические рекомендации к практическим занятиям по теме «Векторы и элементы аналитической геометрии» предназначены для студентов всех специальностей и направлений подготовки дневной и заочной форм обучения. Изложены теоретические вопросы, разобраны образцы решения задач, приведены задачи для самостоятельного решения и задания для домашней работы.

Учебно-методическое издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. МАТЕМАТИКА

Ответственный за выпуск В. Г. Замураев

Корректор И. В. Голубцова

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ № .

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Линейные операции над векторами, линейная зависимость и независимость векторов

1.1 Теоретическая часть

Вектором (***геометрическим вектором***) называют множество всех одинаково направленных отрезков, имеющих одинаковую длину.

Пусть $\overrightarrow{AB}$ – направленный отрезок с началом в точке A и концом в точке B (рисунок 1). Этот отрезок $\overrightarrow{AB}$ однозначно определяет вектор $\vec{a}$. В дальнейшем вектор $\vec{a}$ и направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ будут отождествляться, а использоваться будет тот из них, который в данном случае удобнее. Итак, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$. Длина отрезка $\overrightarrow{AB}$ называется ***длиной*** или ***модулем*** вектора $\vec{a}$ и обозначается $|\vec{a}|=|\overrightarrow{AB}|$.

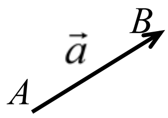


Рисунок 1

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Записывают $\vec{a}\,||\,\vec{b}$. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ***равными***, если они коллинеарны, одинаково направлены и равны по длине. Записывают $\vec{a}=\vec{b}$.

Ортом вектора называется единичный вектор, сонаправленный с вектором $\vec{a}$.

Суммой векторов $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ называется вектор, обозначаемый $\vec{a}+\vec{b}$ и равный $\overrightarrow{AC}$. То есть $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Сумма векторов может быть найдена по *правилу треугольника* (рисунок 2, *а*) либо по *правилу параллелограмма* (рисунок 2, *б*).

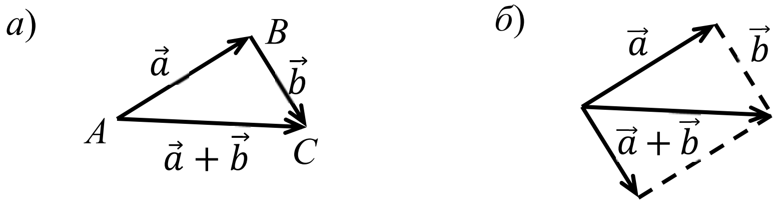


Рисунок 2

Свойства суммы векторов:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, $\forall\vec{a},\vec{b}$ (*коммутативность*);

2) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$, $\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ (*ассоциативность*);

3) существует единственный нулевой вектор $\vec{0}$, имеющий нулевую длину и

такой, что $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$, $\forall\vec{a}$;

4) для любого вектора $\vec{a}$ существует единственный ***противоположный*** вектор $-\vec{a}$ такой, что $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Произведением вектора $\vec{a}$ ***на действительное число*** α называется вектор $\alpha\vec{a}$, длина которого равна $|\alpha|\cdot|\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением $\vec{a}$, если $\alpha>0$, и противоположно $\vec{a}$, если $\alpha<0$.

Свойства произведения вектора на число:

1) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$;

2) $(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$;

3) $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$;

4) $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$;

5) $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$, $\forall\alpha,\beta,\vec{a},\vec{b}$.

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\vec{e}$ называется положительное число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overrightarrow{AB}$ и вектор $\vec{e}$ направлены одинаково, и отрицательное число $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overrightarrow{AB}$ и вектор $\vec{e}$ противоположно направлены (рисунок 3).

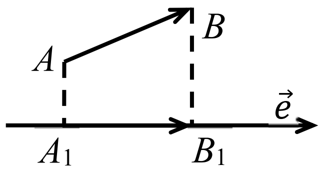


Рисунок 3

Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\vec{e}$ обозначается $\text{пр}_{\vec{e}}\overrightarrow{AB}$. Если $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ или $\overrightarrow{AB}\perp l$, то $\text{пр}_{\vec{e}}\overrightarrow{AB}=0$. Проекция вычисляется по формуле

$$\text{пр}_{\vec{e}}\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi,$$

где φ – угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{e}$ или между вектором $\overrightarrow{AB}$ и его проекцией на $\vec{e}$.

Векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ называются ***линейно зависимыми***, если существуют числа $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, не равные одновременно нулю, для которых выполняется равенство

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n=\vec{0}. \qquad (1)$$

Если же равенство (1) выполняется только для $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$, то векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_n$ называются ***линейно независимыми***.

Теорема (критерий линейной зависимости). Векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинацией остальных.

1.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Пусть задан параллелограмм $ABCD$, O – точка пересечения его диагоналей (рисунок 4). Доказать, что:

1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$; 2) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$; 3) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$.

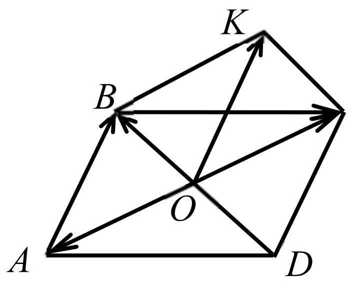


Рисунок 4

Решение

1 Известно, что диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам. Значит, $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OC}|$. Поскольку векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$ противоположно направлены, то $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC}$, т. е. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

2 По определению суммы векторов $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$. С другой стороны $\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$, поэтому $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.

3 На векторах $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ как на сторонах построим параллелограмм $OBKC$ (см. рисунок 4). Тогда $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BK}$, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{OK}$. Обратимся к четырёхугольнику $ABKO$. Это параллелограмм, т. к. $BK \parallel AO$, и поэтому $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OK}$. Теперь очевидно, что $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$.

Пример 2 **–** Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – ненулевые векторы. Доказать, что следующие условия равносильны:

1) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы;

2) $\exists\alpha\neq 0$: $\vec{a}=\alpha\vec{b}$;

3) $\vec{a}\parallel\vec{b}$.

Решение

1 Докажем, что из первого условия следует второе.

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы, то существуют числа α_1 и α_2 такие, что $\alpha_1\vec{a}+\alpha_2\vec{b}=\vec{0}$. Так как $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – ненулевые векторы, то в этом равенстве $\alpha_1\neq 0$ и $\alpha_2\neq 0$ и из него получим $\vec{a}=\alpha\vec{b}$, где $\alpha=\dfrac{-\alpha_2}{\alpha_1}$.

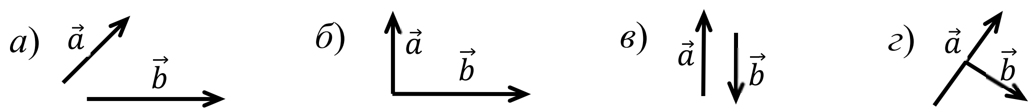
2 Докажем теперь, что из второго условия следует третье. Из равенства $\vec{a}=\alpha\vec{b}$ и условия $\alpha\vec{b}\parallel\vec{b}$ следует, что $\vec{a}\parallel\vec{b}$.

3 Докажем, что из третьего условия следует первое. Пусть $\vec{a} \| \vec{b}$. Умножим вектор $\vec{b}$ на число $\beta = 1$, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены, или на $\beta = -1$, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлены противоположно. Тогда векторы $\vec{a}$ и $\beta\vec{b}$ параллельны и одинаково направлены. Отсюда получим, что векторы $\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$ и $\beta\vec{b}$, имеющие одинаковые длины, равны, т. е. $\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a} = \beta\vec{b} \Rightarrow \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a} - \beta\vec{b} = \vec{0}$, что означает линейную зависимость векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Таким образом, любые два коллинеарных вектора линейно зависимы. То же самое можно сказать о любых трёх компланарных векторах.

1.3 Задания для самостоятельной работы

1 Построить векторы $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если:



2 Проверить геометрически справедливость следующих равенств:

а) $(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}$; в) $\dfrac{\vec{a}}{2} + \dfrac{\vec{b}}{2} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$;

б) $(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{b}$; г) $\dfrac{\vec{a} - \vec{b}}{2} + \vec{b} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$.

3 Найти условия, которым должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

а) $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$; в) $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a} - \vec{b}|$.

б) $|\vec{a} + \vec{b}| > |\vec{a} - \vec{b}|$;

4 Пусть ΔABC – произвольный треугольник, K, L, M – середины сторон BC, AC, AB соответственно, O – точка пересечения медиан этого треугольника. Доказать, что:

а) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$; в) $\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OM} = \vec{0}$;

б) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$; г) $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BL} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

5 Дан параллелограмм $ABCD$. Пусть $\overrightarrow{AC} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{BD} = \vec{e}_2$. Выразить векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.

6 Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$, $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{q}$. Выразить через $\vec{p}$ и $\vec{q}$ векторы $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AE}$.

7 Доказать, что векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейно зависимы, если хотя бы один из них нулевой.

8 Доказать, что если некоторое непустое подмножество векторов из

множества $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейно зависимо, то и все векторы в целом линейно зависимы.

9 Доказать, что векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейно зависимы, если среди них есть хотя бы два противоположных вектора.

10 Доказать, что если векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейно независимы, то любое непустое подмножество из них также линейно независимо.

1.4 Домашнее задание

Рекомендуемая литература: [1, гл. 1, § 1; 2, гл. 2, § 2.1–2.4; 3, гл. 1, § 1.3].

1 Выбрать два произвольных неколлинеарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и построить вектор $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, где:

а) $\alpha=1,\ \beta=1$;
б) $\alpha=-1,\ \beta=1$;
в) $\alpha=-1,\ \beta=-1$;
г) $\alpha=-0{,}5,\ \beta=3$.

2 Пусть $ABCD$ – параллелограмм, O – точка пересечения его диагоналей AC и BD. Доказать, что:

а) $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$;
б) $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$;
в) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{AB}$;
г) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{AD}$;
д) $\vec{p}$ коллинеарен $\vec{q}$, где $\vec{p}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}$, $\vec{q}=1{,}5\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}$.

3 Пусть $ABCD$ – произвольный четырёхугольник, F и E – середины сторон AB и CD соответственно. Доказать, что $\overrightarrow{FE}=0{,}5\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.

4 Пусть ABC – треугольник, M – точка пересечения его медиан, O – произвольная точка плоскости, $\overrightarrow{OA}=\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OB}=\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OC}=\vec{e}_3$. Выразить вектор $\overrightarrow{OM}$ через векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

5 В параллелограмме $ABCD$ обозначены: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Выразить через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MD}$, где M – точка пересечения диагоналей параллелограмма.

6* Доказать, что векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейно зависимы, если хотя бы два из них равны.

Ответы к заданиям

***Подраздел 1.3*:**

5 $\overrightarrow{AB}=\dfrac{\vec{e}_1-\vec{e}_2}{2}$, $\overrightarrow{BC}=\dfrac{\vec{e}_1+\vec{e}_2}{2}$, $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{BC}$;

6 $\overrightarrow{CD}=\vec{q}-\vec{p}$, $\overrightarrow{DE}=-\vec{p}$, $\overrightarrow{EF}=-\vec{q}$, $\overrightarrow{FA}=\vec{p}-\vec{q}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{p}+\vec{q}$, $\overrightarrow{AD}=2\vec{q}$, $\overrightarrow{AE}=2\vec{q}-\vec{p}$.

***Подраздел 1.4*:**

4 $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3}{3}$;

5 $\overrightarrow{MA}=-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{MB}=\dfrac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MB}$.

2 Базисы и координаты векторов. Скалярное произведение векторов

2.1 Теоретическая часть

2.1.1 Базисы и координаты векторов.

Два любых линейно независимых вектора $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ некоторой плоскости называются ***базисом этой плоскости***; три любых линейно независимых вектора $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ – ***базисом пространства***.

В пространстве нужно различать правые и левые базисы. Базис $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ называется ***правым*** (***левым***), если при наблюдении с конца вектора $\vec{e}_3$ вращение вектора $\vec{e}_1$ по кратчайшему пути к вектору $\vec{e}_2$ происходит против часовой стрелки (по часовой стрелке).

На рисунке 5, *а* изображён левый базис (вектор $\vec{e}_1$ направлен от наблюдателя), а на рисунке 5, *б* – правый (вектор $\vec{e}_2$ направлен от наблюдателя).

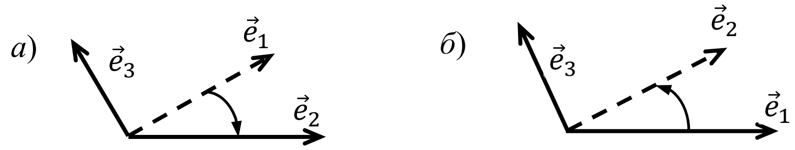


Рисунок 5

Если векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ попарно ортогональны, то базис $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ называется ***прямоугольным***. Прямоугольный базис называется ***ортонормированным***, если все его векторы имеют единичную длину. Обычно ортонормированный базис обозначается $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Аналогично на плоскости. Если к базису на плоскости (в пространстве) добавить точку O (начало отсчёта), то возникает система координат на плоскости (в пространстве).

Теорема 1. Пусть $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ – произвольный базис в пространстве. Тогда для любого вектора $\vec{x}$ пространства имеет место единственное разложение по базису $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$:

$$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3. \quad (2)$$

Аналогичное разложение имеет место для любого вектора некоторой плоскости P относительно любого базиса $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2\right)$ этой плоскости. Далее формулируем результаты для векторов в пространстве; соответствующие результаты для плоскости очевидны.

Коэффициенты x_1, x_2, x_3 в разложении (2) называют ***координатами вектора*** $\vec{x}$ ***в базисе*** $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ и записывают $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3)$. ***Координатами точки*** M_0 в системе координат $\left\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right\}$ называют координаты вектора $\overrightarrow{OM_0}$ в базисе $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ (рисунок 6).

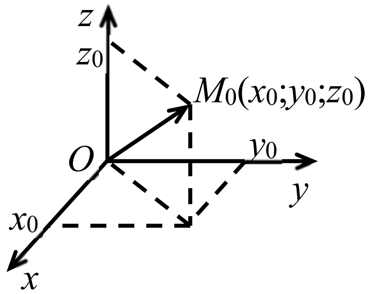


Рисунок 6

Зная координаты вектора, можно найти его модуль:

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\,. \tag{3}$$

Теорема 2. Координаты вектора, являющегося линейной комбинацией других векторов, равны таким же линейным комбинациям соответствующих координат этих векторов.

Важным является вопрос о связи координат вектора в различных базисах. Пусть в пространстве заданы два базиса $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$ и $\left(\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\right)$, причём

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \alpha_{11}\vec{e}\,'_1 + \alpha_{12}\vec{e}\,'_2 + \alpha_{13}\vec{e}\,'_3; \\ \vec{e}_2 = \alpha_{21}\vec{e}\,'_1 + \alpha_{22}\vec{e}\,'_2 + \alpha_{23}\vec{e}\,'_3; \\ \vec{e}_3 = \alpha_{31}\vec{e}\,'_1 + \alpha_{32}\vec{e}\,'_2 + \alpha_{33}\vec{e}\,'_3. \end{cases} \tag{4}$$

Если известны координаты x_1, x_2, x_3 вектора $\vec{x}$ в «новом» базисе $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$, то координаты x'_1, x'_2, x'_3 этого вектора в «старом» базисе $\left(\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\right)$ можно найти по формулам

$$\begin{cases} x'_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \alpha_{31}x_3; \\ x'_2 = \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{32}x_3; \\ x'_3 = \alpha_{13}x_1 + \alpha_{23}x_2 + \alpha_{33}x_3. \end{cases} \tag{5}$$

Более того, можно решить и обратную задачу. Если известны координаты x'_1, x'_2, x'_3 вектора $\vec{x}$ в базисе $\left(\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3\right)$, то координаты x_1, x_2, x_3 этого вектора $\vec{x}$ в «новом» базисе $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ можно найти, решая систему линейных уравнений (5).

2.1.2 Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, обозначаемое $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $(\vec{a},\vec{b})$, равное $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, где φ – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi,\ \varphi=\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right). \qquad (6)$$

Свойства скалярного произведения:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

2) $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}=\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\alpha\vec{b})$;

3) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$;

4) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$;

5) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$.

Если векторы $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ и $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ заданы в ортонормированном базисе $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, то можно записать скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$ с помощью координат этих векторов:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3. \qquad (7)$$

Угол между векторами

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \qquad (8)$$

Как известно, проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ равна $\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$. Тогда из формул (6) и (8) имеем

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{b}. \qquad (9)$$

Пусть углы вектора $\vec{a}$ с осями Ox, Oy, Oz равны соответственно α, β, γ. Числа

$$\cos\alpha=\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{i}}\right)=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}};\ \cos\beta=\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{j}}\right)=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}};$$

$$\cos\gamma=\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{k}}\right)=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

называются ***направляющими косинусами*** вектора $\vec{a}$.

Сумма квадратов направляющих косинусов равна единице:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Физический смысл скалярного произведения связан с понятием работы постоянной силы. Если материальная точка под действием силы $\vec{F}$ переместилась из положения A в положение B, то работа силы $\vec{F}$ численно равна скалярному произведению $\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$.

2.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Даны векторы $\vec{e}_1 = (0;1;-1)$, $\vec{e}_2 = (0;5;1)$, $\vec{e}_3 = (1;-4;1)$, $\vec{a} = (2;5;1)$. Доказать, что векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ образуют базис в пространстве, и найти координаты вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

Решение

Убедимся, что векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ линейно независимы, т. е. векторное равенство $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3 = \vec{0}$ возможно лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Действительно, в соответствии с теоремой 2

$$\alpha_1(0;1;-1) + \alpha_2(0;5;1) + \alpha_3(1;-4;1) = (0;0;0) \Leftrightarrow \begin{cases} 0\cdot\alpha_1 + 0\cdot\alpha_2 + \alpha_3 = 0; \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 - 4\alpha_3 = 0; \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Данная система имеет единственное тривиальное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, если её определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Убеждаемся, что $\Delta = 6 \neq 0$. Таким образом, тройка векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ линейно независима и образует базис. Нам известны координаты вектора $\vec{a}$ в некотором «старом» базисе $\left(\vec{e}_1\,', \vec{e}_2\,', \vec{e}_3\,'\right)$. Для того чтобы найти координаты вектора $\vec{a}$ в «новом» базисе $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$, составим систему уравнений вида (5) и решим её. В этой системе координаты векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ располагаются по столбцам:

$$\begin{cases} 2 = 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + x_3; \\ 5 = x_1 + 5\cdot x_2 - 4\cdot x_3; \\ 1 = -x_1 + x_2 + x_3. \end{cases}$$

Вычисляем x_1, x_2, x_3 по формулам Крамера. Определитель данной системы уже найден: $\Delta = 6$. Далее имеем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 18;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12;\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12.$$

Отсюда $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 3$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 2$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = 2$.

Пример 2 **–** Найти скалярное произведение $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 6\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

Решение

Согласно свойствам скалярного произведения векторов

$$(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 6\vec{b}) = 15\vec{a} \cdot \vec{a} - 18\vec{a} \cdot \vec{b} - 10\vec{a} \cdot \vec{b} + 12\vec{b} \cdot \vec{b} =$$

$$= 15|\vec{a}|^2 - 28|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\pi/3) + 12|\vec{b}|^2 = 15 \cdot 16 - 28 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 0{,}5 + 12 \cdot 36 =$$

$$= 240 - 336 + 432 = 672 - 336 = 336.$$

Пример 3 **–** Найти угол между векторами $\vec{a} = (3;4;5)$, $\vec{b} = (4;-5;3)$.

Решение

По формуле (8) получаем

$$\cos\varphi = \frac{3 \cdot 4 + 4 \cdot (-5) + 5 \cdot 3}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}\sqrt{4^2 + (-5)^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{50}} = \frac{7}{50},\ \varphi = \arccos\frac{7}{50}.$$

Пример 4 **–** Доказать, что векторы $\vec{a} = (1;2;3)$, $\vec{b} = (8;-1;-2)$ перпендикулярны.

Решение

По формуле (7) находим $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 8 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) = 0$. Следовательно, по свойству 5 скалярного произведения векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны.

2.3 Задания для самостоятельной работы

1 Найти координаты линейной комбинации $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

а) $\alpha=2$, $\beta=3$, $\vec{a}=(1;-1;0)$, $\vec{b}=(0;1;1)$;

б) $\alpha=4$, $\beta=-5$, $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(1;1;2)$.

2 Векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{x}$ лежат в одной плоскости, известны их координаты в некотором базисе этой плоскости. Показать, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ образуют базис, найти координаты вектора $\vec{x}$ в этом базисе:

а) $\vec{e}_1=(1;-1)$, $\vec{e}_2=(-1;2)$, $\vec{x}=(3;-2)$;

б) $\vec{e}_1=(2;1)$, $\vec{e}_2=(3;1)$, $\vec{x}=(6;-5)$.

3 Даны векторы $\vec{e}_1=(5;3)$, $\vec{e}_2=(2;1)$, $\vec{x}=\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2$. Показать, что векторы $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ образуют базис на плоскости. Найти координаты вектора $\vec{x}$ в «старом» базисе $\left(\vec{e}_1',\vec{e}_2'\right)$, если:

а) $\alpha=-2$, $\beta=2$;

б) $\alpha=3$, $\beta=-1$.

4 Векторы $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$, $\vec{a}$ заданы своими координатами в некотором базисе пространства. Показать, что векторы $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ образуют базис пространства, и найти координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right)$:

а) $\vec{e}_1=(-3;2;-1)$, $\vec{e}_2=(4;1;0)$, $\vec{e}_3=(-3;-1;1)$, $\vec{a}=(-7;1;9)$;

б) $\vec{e}_1=(1;-1;2)$, $\vec{e}_2=(-1;-1;1)$, $\vec{e}_3=(2;1;-1)$, $\vec{a}=(-1;0;1)$.

5 Вычислить $\vec{a}\cdot\vec{b}$, если $\vec{a}=2\vec{p}-3\vec{q}$, $\vec{b}=4\vec{p}+2\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ – единичные векторы, угол между которыми равен $\dfrac{\pi}{3}$.

6 Даны точки $A(1;2;3)$ и $B(4;2;0)$. Найти: а) $\left|\overrightarrow{AB}\right|$; б) направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$; в) величину проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на базисный вектор $\vec{j}=(0,1,0)$.

7 Найти неизвестную координату вектора $\vec{a}=(4;-12;z)$, если $|\vec{a}|=13$.

8 Найти угол между векторами $\vec{a}=(2;-4;4)$ и $\vec{b}=(-3;2;6)$.

9 При каких значениях x векторы $\vec{a}=(2;x-3;0)$ и $\vec{b}=\left(1;x;x^2\right)$ ортогональны?

10 Даны вершины четырёхугольника $A(1;2;3)$, $B(7;3;2)$, $C(-3;0;6)$, $D(9;2;4)$. Доказать, что его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны.

11 Найти $|\vec{a}-\vec{b}|$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{a}+\vec{b}|=5$.

12 Доказать, что векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

13 Даны силы $\vec{F}_1=(5;3;-2)$, $\vec{F}_2=(1;-4;6)$ и $\vec{F}_3=(1;7;2)$, приложенные в одной точке. Вычислить, какую работу производит равнодействующая этих сил, когда

точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $A(1;2;-4)$ в положение $B(2;6;-2)$.

2.4 Домашнее задание

Рекомендуемая литература: [1, гл. 1, § 2–3; 2, гл. 2, § 2.5, 2.6, 2.10–2.12; 3, гл. 1, § 1.3, 1.4].

1 Доказать, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пространства равны тогда и только тогда, когда их координаты равны в любом базисе.

2 Векторы $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$, $\vec{x}$ заданы в некотором базисе пространства. Показать, что векторы $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ образуют базис пространства, найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$:

а) $\vec{e}_1=(7;2;1)$, $\vec{e}_2=(4;3;5)$, $\vec{e}_3=(3;4;-2)$, $\vec{x}=(2;-5;-13)$;

б) $\vec{e}_1=(1;2;3)$, $\vec{e}_2=(-1;3;2)$, $\vec{e}_3=(7;-3;5)$, $\vec{x}=(6;10;17)$.

3 Найти скалярное произведение векторов $(-3\vec{a}+4\vec{b})$ и $(2\vec{a}+3\vec{b})$, где $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$, $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

4 При каких x векторы $\vec{a}=\left(\dfrac{1}{x};x^2-1;x\right)$ и $\vec{b}=\left(-6;\dfrac{1}{x+1};1\right)$ ортогональны?

5 Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}=(1;2;-3)$ и удовлетворяющий равенству $\vec{a}\cdot\vec{x}=28$.

6 Даны векторы $\vec{a}=(3;2;-3)$ и $\vec{b}=(1;3;5)$. Найти проекцию вектора $3\vec{a}-2\vec{b}$ на вектор $\vec{a}+\vec{b}$.

7 Вычислить работу силы $\vec{F}=\vec{i}-3\vec{j}+7\vec{k}$ при перемещении материальной точки под действием этой силы из точки $A(0;-2;3)$ в точку $B(1;1;5)$ вдоль $\overrightarrow{AB}$.

Ответы к заданиям

***Подраздел 2.3*:**

1 а) $(2;1;3)$; б) $(-1;3;2)$;

2 а) $(4;1)$; б) $(-21;16)$;

3 а) $(-6;-4)$; б) $(13;8)$;

4 а) $(2;8;11)$; б) $(1;-4;-3)$;

5 –2;

6 а) $3\sqrt{2}$; б) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 0, $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; в) 0;

7 3; –3;

8 $\arccos\left(\dfrac{5}{21}\right)\approx 76{,}2^\circ$;

9 1; 2;
11 $\sqrt{15}$;
13 43.
***Подраздел 2.4*:**
2 а) $(2;-3;0)$; б) $(2;3;1)$;
3 –2;
4 2; $-3/2$;
5 $(2;4;-6)$;
6 $-\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$;
7 6.

3 Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов

3.1 Теоретическая часть

3.1.1 Векторное произведение векторов.

Векторным произведением неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый $\vec{a}\times\vec{b}$ или $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, удовлетворяющий следующим требованиям:

1) длина вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ равна $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, где $\varphi=\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$, $0\le\varphi\le\pi$;

2) вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ ортогонален обоим векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ является правой.

Свойства векторного произведения:

1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$;

2) $(\alpha\vec{a})\times\vec{b}=\alpha\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{a}\times\left(\alpha\vec{b}\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}$;

3) $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$;

4) если $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны;

5) длина $|\vec{a}\times\vec{b}|$ векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами относительно правого ортонормированного базиса $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, т. е. $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. Тогда

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}. \qquad (10)$$

Физический смысл векторного произведения связан с понятием момента силы. *Моментом силы* $\vec{F}$, приложенной к точке *B*, относительно некоторой точки *A* называется векторное произведение $\overrightarrow{AB}\times\vec{F}$.

3.1.2 Смешанное произведение векторов.

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – произвольные векторы. Возьмём векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$; далее – скалярное произведение $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$ векторов $\vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{c}$. Полученное число называется ***смешанным произведением*** векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (в указанном порядке) и обозначается $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$ или $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Основные свойства смешанного произведения:

1) если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не компланарны и образуют правую тройку, то их смешанное произведение численно равно объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах как на рёбрах, т. е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=V.$$

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не компланарны и образуют левую тройку, то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-V;$$

2) $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$;

3) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}$;

4) $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}$;

5) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0.$$

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ заданы в ортонормированном базисе $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$, $\vec{c}=(c_1;c_2;c_3)$. Тогда

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Свойство 1 позволяет непосредственно или с помощью формулы (11) вычислять объёмы некоторых тел. В частности, объём пирамиды с вершинами в точках $A(a_1;a_2;a_3)$, $B(b_1;b_2;b_3)$, $C(c_1;c_2;c_3)$, $D(d_1;d_2;d_3)$ выражается следующим образом:

$$V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \\ d_1-a_1 & d_2-a_2 & d_3-a_3 \end{vmatrix}\right|. \tag{12}$$

Свойство 5 позволяет устанавливать, компланарны или не компланарны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не компланарны, то с помощью свойства 1 можно установить, какую тройку они образуют. А именно, если $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}>0$, то тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ правая, если же $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}<0$, то левая.

3.2 Образцы решения примеров

Пример 1 **–** Заданы векторы $\vec{a}_1=(3;-1;2)$, $\vec{a}_2=(1;2;-1)$. Найти координаты векторов $\vec{a}_1\times\vec{a}_2$, $(2\vec{a}_1+\vec{a}_2)\times\vec{a}_2$.

Решение

Вычисляем координаты вектора $\vec{a}_1\times\vec{a}_2$ по формуле (10):

$$\vec{a}_1\times\vec{a}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-3\vec{i}+5\vec{j}+7\vec{k}.$$

Координаты вектора $(2\vec{a}_1+\vec{a}_2)\times\vec{a}_2$ определим с помощью свойств векторного произведения векторов. Имеем

$$(2\vec{a}_1+\vec{a}_2)\times\vec{a}_2=2(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)+(\vec{a}_2\times\vec{a}_2)=2(\vec{a}_1\times\vec{a}_2)=-6\vec{i}+10\vec{j}+14\vec{k},$$

поскольку $\vec{a}_2\times\vec{a}_2=\vec{0}$.

Пример 2 **–** Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}+3\vec{b}$, $3\vec{a}+\vec{b}$, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=30°$.

Решение

Имеем

$$(\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}+\vec{b})=3\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}+9\vec{b}\times\vec{a}+3\vec{b}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}+9\vec{b}\times\vec{a}=8\vec{b}\times\vec{a},$$

поскольку $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{b}\times\vec{b}=\vec{0}$, $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$. Итак, $S=8|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\sin 30°=4$.

Пример 3 **–** Доказать, что точки $A(5;7;-2)$, $B(3;1;-1)$, $C(9;4;-4)$, $D(1;5;0)$ лежат в одной плоскости.

Решение

Найдём координаты векторов $\overrightarrow{AB}=(-2;-6;1)$, $\overrightarrow{AC}=(4;-3;-2)$, $\overrightarrow{AD}=(-4;-2;2)$. Найдём смешанное произведение полученных векторов:

$$\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-2 & -6 & 1\\ 4 & -3 & -2\\ -4 & -2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & -6 & 1\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 10 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -6 & 1\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 10 & 0\end{vmatrix}=0.$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно, точки *A*, *B*, *C* и *D* лежат в одной плоскости.

Пример 4 **–** Вычислить объём пирамиды с вершинами в точках $A(2;3;-1)$, $B(2;-2;4)$, $C(-1;1;3)$, $D(1;1;2)$.

Решение

Рассмотрим векторы $\vec{a}=\overrightarrow{DA}=(1;2;-3)$, $\vec{b}=\overrightarrow{DB}=(1;-3;2)$, $\vec{c}=\overrightarrow{DC}=(-2;0;1)$ (рисунок 7).

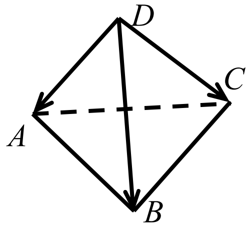


Рисунок 7

У пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, та же высота, что и у параллелепипеда, а площадь основания в 2 раза меньше, поэтому

$$V=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1 & 2 & -3\\ 1 & -3 & 2\\ -2 & 0 & 1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|-3-8+18-2\right|=\frac{5}{6}.$$

Заметим, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку, т. к. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}>0$. Объём пирамиды можно было найти сразу по формуле (12), однако, если нужно найти и другие параметры тела, удобнее начинать решение с построения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

3.3 Задания для самостоятельной работы

1 Даны векторы $\vec{a}=(0;1;-2)$, $\vec{b}=(-3;1;0)$, $\vec{c}=(0;3;-1)$. Найти координаты следующих векторов:

а) $\vec{a}\times\vec{b}$; в) $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$;

б) $\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)\times\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)$; г) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}$.

2 Найти $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, если известны $|\vec{a}|$, $\left|\vec{b}\right|$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$:

а) $|\vec{a}|=5$, $\left|\vec{b}\right|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=9$; б) $|\vec{a}|=13$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=10$.

3 Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=(1;2;-1)$, $\vec{b}=(2;0;-2)$ как на сторонах.

4 Найти площадь треугольника *ABC*, если:

а) $A(-1;0;2)$, $B(1;-2;5)$, $C(3;0;-4)$;

б) $A(4;2;3)$, $B(5;7;0)$, $C(2;8;-1)$.

5 Найти длину высоты AD треугольника *ABC*, если:

а) $A(-1;0;2)$, $B(1;-2;5)$, $C(3;0;-4)$;

б) $A(-3;1;4)$, $B(-5;2;4)$, $C(-7;0;4)$.

6 Проверить, что векторы $\vec{p}=\vec{a}-\vec{d}$, $\vec{q}=\vec{b}-\vec{c}$ коллинеарны, если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ связаны соотношениями $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d}$, $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$.

7 Упростить выражения:

а) $(\vec{a}+b)\times\vec{c}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\times\vec{a}+(\vec{a}+\vec{c})\times\vec{b}$;

б) $\left(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)\times\vec{a}-\left(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}\right)\times\vec{b}+\left(\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}\right)\times\vec{c}$.

8 Решить уравнение $\vec{a}\times\vec{y}=\vec{b}$, где $\vec{a}=(3;-1;2)$, $\vec{b}=(0;2;1)$.

9 Силы $\overrightarrow{F_1}=(1;1;1)$, $\overrightarrow{F_2}=(-2;-3;1)$, $\overrightarrow{F_3}=(-1;-2;1)$ приложены в точке $B(2;1;2)$. Определить момент равнодействующей этих сил относительно точки $A(0;-1;-1)$.

10 Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку, взаимно перпендикулярны и $|\vec{a}|=4$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $|\vec{c}|=3$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

11 Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – произвольные векторы. Доказать, что:

а) $\left(\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\right)(\vec{c}-\vec{a})=0$;

б) $\left(\left(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\right)\vec{c}=2\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

12 Найти объём параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=(4;3;6)$, $\vec{b}=\left(2;\dfrac{3}{2};5\right)$, $\vec{c}=\left(7;\dfrac{5}{2};4\right)$ как на сторонах. Установить, какую тройку образуют векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

13 Используя условие компланарности векторов, проверить, лежат ли точки *A*, *B*, *C*, *D* в одной плоскости:

а) $A(1;-1;39)$, $B(-2;5;-3)$, $C(0;3;3)$, $D(4;0;4)$;

б) $A(1;1;0)$, $B(-3;-1;2)$, $C(-3;1;8)$, $D(0;2;5)$.

14 Вычислить объём пирамиды, вершинами которой являются точки $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$, $C(2;2;2)$, $D(3;4;-3)$.

15 В пирамиде с вершинами *A*, *B*, *C*, *D* найти длину высоты, проведённой из вершины *D* к грани *ABC*:

а) $A(3;2;-1)$, $B(-1;2;2)$, $C(1;5;-1)$, $D(4;3;0)$;

б) $A(2;4;-1)$, $B(1;4;2)$, $C(-1;2;-1)$, $D(2;-1;1)$.

3.4 Домашнее задание

Рекомендуемая литература: [1, гл. 1, § 3; 2, гл. 2, § 2.13–2.17; 3, гл. 1, § 1.13].

1 Показать, что четырёхугольник *ABCD* есть параллелограмм, и найти его площадь, если $A(1;4;4)$, $B(3;7;8)$, $C(8;8;11)$, $D(6;5;7)$.

2 Определить площадь ΔABC с вершинами в точках $A(5;-6;2)$, $B(1;-1;2)$, $C(1;3;-1)$.

3 Упростить выражение $\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)$.

4 Решить уравнение $\vec{a}\times\vec{y}=\vec{b}$, если известны $\vec{a}=(1;-1;2)$, $\vec{b}=(1;-5;-3)$ и первая координата вектора $\vec{y}$ равна 0.

5 Найти значение выражения $((2\vec{i}+\vec{j})\times(2\vec{j}-\vec{k}))\cdot(\vec{i}-2\vec{k})$, где $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ – правый ортонормированный базис.

6 Доказать, что точки $A(1;1;2)$, $B(5;4;4)$, $C(2;1;1)$, $D(-1;-2;-2)$ лежат в одной плоскости.

7 Вычислить объём пирамиды, вершинами которой являются точки $A(1;2;1)$, $B(3;2;2)$, $C(-7;3;-6)$, $D(3;2;1)$.

Ответы к заданиям

***Подраздел 3.3*:**

1 а) $(2;6;3)$; б) $(-10;-30;-15)$; в) $(-15;2;1)$; г) $(-15;2;6)$;

2 а) 12; б) 24;

3 $4\sqrt{2}$;

4 а) 14; б) $3\sqrt{10}$;

5 а) $\dfrac{28}{\sqrt{89}}$; б) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$;

7 а) $\vec{0}$; б) $2\vec{a}\times\vec{c}$;

8 $\vec{y}=(1;0;0)$;

9 $(18;-12;-4)$;

10 24;

12 $V=22$, правая;

13 а) лежат; б) лежат;

14 $\frac{2}{3}$;

15 а) $\frac{27}{\sqrt{261}}$; б) $\frac{49}{\sqrt{126}}$.

***Подраздел 3.4*:**

1 $\sqrt{390}$;

2 $12{,}5$;

3 $2\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})$;

4 $\vec{y}=(0;-3;5)$;

5 –9;

7 $\frac{1}{3}$.

4 Прямая на плоскости

4.1 Теоретическая часть

4.1.1 Уравнения прямых на плоскости.

Пусть на плоскости задана ортонормированная система координат $\{O;\vec{i},\vec{j}\}$. Координаты произвольной точки M обозначаем $M(x;y)$.

Укажем основные способы задания прямой на плоскости.

1 Любая прямая на плоскости может быть задана ***общим уравнением*** вида

$$Ax+By+C=0. \tag{13}$$

И наоборот, любое уравнение вида (13) задаёт на плоскости некоторую прямую.

Вектор $\vec{n}=(A;B)$ ортогонален прямой (13) и называется ***нормальным***. Различные модификации уравнения (13) связаны с различными способами задания прямых.

2 Прямая L определяется одной своей точкой $M_0(x_0;y_0)$ и нормальным вектором $\vec{n}=(A;B)$. Её уравнение имеет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \tag{14}$$

3 Прямая L определяется двумя своими точками $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$. Её уравнение имеет вид:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \tag{15}$$

4 Число $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ во втором выражении (15) называется ***угловым коэффициентом*** прямой L. Известно, что $k=\mathrm{tg}\,\varphi$, где φ – угол между прямой L и осью Ox (или между L и вектором $\vec{i}$). ***Уравнение прямой с угловым коэффициентом***

$$y=kx+b, \tag{16}$$

где b – ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

5 Прямая L определяется одной своей точкой $M_0(x_0;y_0)$ и угловым коэффициентом k. Её уравнение имеет вид:

$$y-y_0=k(x-x_0). \tag{17}$$

6 Прямая L определяется одной своей точкой $M_0(x_0;y_0)$ и вектором $\vec{a}=(a_1;a_2)$, параллельным L. Её уравнение имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}. \tag{18}$$

Вектор $\vec{a}$ называется ***направляющим вектором*** прямой L, а равенство (18) – ***каноническим уравнением*** прямой L.

Отметим, что выражения в равенстве (18) являются отношениями. Если $a_1=0$ или $a_2=0$, то прямая параллельна оси Oy или Ox соответственно.

7 Если известны точка $M_0(x_0;y_0)$ прямой L и её направляющий вектор, то она может быть задана ***параметрическими уравнениями***

$$\begin{cases} x=x_0+a_1t; \\ y=y_0+a_2t, \end{cases} \tag{19}$$

где t – параметр, $t\in(-\infty,+\infty)$.

8 Параметрические уравнения прямой можно представить в ***векторной форме***

$$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{a}\cdot t, \tag{20}$$

где $\vec{r}=(x;y)$ – радиус-вектор текущей точки $M(x;y)$ прямой;

$\vec{r}_0=(x_0;y_0)$ – радиус-вектор точки $M_0(x_0;y_0)$;

$\vec{a}=(a_1;a_2)$ – направляющий вектор прямой.

9 Уравнение прямой ***в отрезках***

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \tag{21}$$

где a и b – величины направленных отрезков, отсекаемых прямой на координатных осях Ox и Oy соответственно.

10 ***Нормальное уравнение*** прямой

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0, \qquad (22)$$

где α – угол между осью Ox и перпендикуляром к прямой, проведённым из начала координат;

$p > 0$ – расстояние от начала координат до прямой (рисунок 8);

значения $\cos\alpha$ и $\cos\beta = \sin\alpha$ – направляющие косинусы нормального вектора $\vec{n}$, направленного из начала координат в сторону прямой.

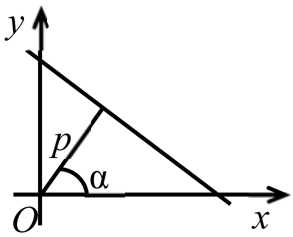


Рисунок 8

Общее уравнение (13) приводится к нормальному путём умножения на нормирующий множитель

$$\lambda = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного члена C общего уравнения прямой.

11 Уравнение прямой ***в полярных координатах***

$$r \cdot \cos(\varphi - \alpha) = p, \qquad (23)$$

где α – угол между полярной осью и осью l, проведённой из полюса O перпендикулярно к прямой;

$p > 0$ – расстояние от полюса до прямой;

r и φ – координаты текущей точки прямой (рисунок 9).

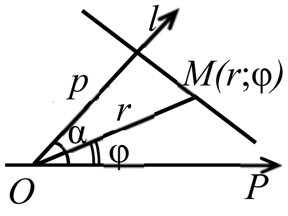


Рисунок 9

4.1.2 Взаимное расположение прямых на плоскости.

Пусть заданы прямые $L_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Возможны следующие случаи их взаимного расположения:

1) они совпадают, если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$;

2) они параллельны, если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$ $\left(\neq \dfrac{C_1}{C_2}\right)$;

3) они пересекаются, если $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$.

Угол между прямыми L_1 и L_2 удобнее всего находить как угол между их направляющими векторами. Если же известны угловые коэффициенты k_1 и k_2 прямых L_1 и L_2, то угол φ между ними можно найти по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \qquad (24)$$

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ *до прямой* $Ax + By + C = 0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (25)$$

4.2 Образцы решения примеров

Пример 1 **–** Даны две вершины $A(2;2)$, $B(6;7)$ треугольника ABC и точка $N(3;1)$ пересечения его высот (рисунок 10). Найти уравнения сторон AB, CA и CB, внутренний угол при вершине C, координаты точки C.

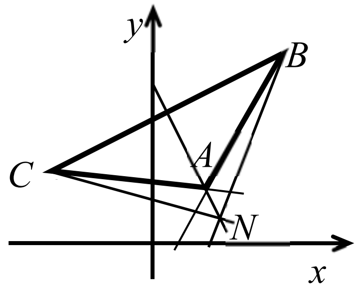


Рисунок 10

Решение

1 Воспользовавшись уравнением (15) прямой, проходящей через две точки, получим уравнение стороны AB

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-2}{5} \text{ или } 5x-4y-2=0.$$

Далее, так как $\overrightarrow{NB}\perp\overrightarrow{CA}$, а $\overrightarrow{NA}\perp\overrightarrow{CB}$, запишем уравнения сторон CA и CB в виде (14), где $\vec{n}=(A;B)$ – нормальный вектор прямой, а $(x_0;y_0)$ – фиксированная точка на ней. Учитывая, что $\overrightarrow{NA}=(-1;1)$ и $\overrightarrow{NB}=(3;6)$, имеем

CA: $3(x-2)+6(y-2)=0$, откуда $3x+6y-18=0$;

CB: $-1(x-6)+1(y-7)=0$, откуда $x-y+1=0$.

2 Угол φ при вершине C есть угол между сторонами CA и CB, который можно определить, воспользовавшись выражением (24). Для этого запишем уравнения этих сторон в виде (17), т. е.

$$y-2=-0,5(x-2); \qquad y-7=x-6.$$

В этом случае, согласно формуле (17), имеем $k_1=-0,5$, $k_2=1$ и, в соответствии с (24), $\mathrm{tg}\,\varphi=\dfrac{1-(-0,5)}{1+(-0,5\cdot 1)}=3$ или $\varphi=\mathrm{arctg}\,3$.

3 Для нахождения координат точки C составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x+6y-18=0; \\ x-\ y+\ 10=0. \end{cases}$$

Решая её, получаем $C\left(\dfrac{-14}{3};\dfrac{16}{3}\right)$.

Пример 2 – Задана прямая $-2x+y-1=0$. Найти расстояние от точки $M(-1;2)$ до данной прямой.

Решение

Прежде всего проверим, принадлежит ли точка M данной прямой L. Имеем $(-2)\cdot(-1)+2-1\neq 0$, значит, $M\notin L$. Для нахождения расстояния от M до L воспользуемся скалярным произведением векторов. Расстояние от M до L есть длина отрезка MB, $MB\perp L$. На прямой L выберем произвольно точку A, например $A(0;1)$.

Длина отрезка MB равна проекции вектора $\overrightarrow{MA}=(1;-1)$ на направление нормального вектора $\vec{n}=(-2;1)$ прямой L (рисунок 11). Очевидно, $\varphi=\dfrac{\pi}{2}+\alpha$.

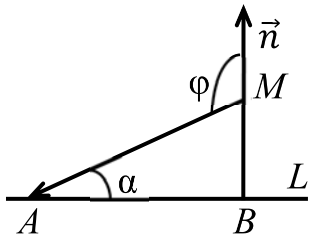


Рисунок 11

Тогда, с учётом (9), имеем $|MB|=\left|\left|\overrightarrow{MA}\right|\cdot\sin\alpha\right|=\left|\left|\overrightarrow{MA}\right|\cdot\cos\varphi\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{MA}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}$, т. е.

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{MA}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|}. \qquad (26)$$

В соответствии с формулой (26) получаем

$$d=|MB|=\frac{|1\cdot(-2)+(-1)\cdot 1|}{\sqrt{4+1}}=\frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Отметим, что данное решение представляет собой вывод формулы (25). Указанный способ нахождения расстояний применим и в случае плоскости, и в случае прямой в пространстве. В этом смысле он универсален и его можно использовать во всех аналогичных ситуациях.

4.3 Задания для самостоятельной работы

1 Составить уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2, сделать чертёж:

а) $M_1(2;-5)$, $M_2(-2;3)$; б) $M_1(-1;3)$, $M_1(1;9)$.

2 Составить параметрические уравнения прямой $x+5y-8=0$.

3 Прямая задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x=1-3t; \\ y=-2+9t. \end{cases}$

Найти нормальный вектор этой прямой и записать её уравнение.

4 Дана прямая $x-5y+6=0$. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(-3;4)$ параллельно и перпендикулярно данной прямой.

5 Даны вершины треугольника $A(-2;3)$, $B(-2;-1)$, $C(10;3)$. Требуется:

а) написать уравнения сторон этого треугольника;

б) написать уравнение высоты AD и найти её длину;

в) написать уравнение медианы BF и найти её длину;

г) найти угол при вершине A треугольника;

д) найти угол между высотой AD и медианой BF.

6 Вычислить расстояние от точки $M(3;-4)$ до прямой $5x-3y-15=0$.

7 Написать уравнение прямой, проходящей посередине между параллельными прямыми $5x+2y+8=0$ и $5x+2y-10=0$.

8 Написать уравнение прямой, параллельной прямой $x-2y+7=0$ и отстоящей от неё на расстояние $d=4$.

9 Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(0;-1)$ под углом $\pi/4$ к прямой $2x-y+2=0$.

10 Известны уравнения одной из сторон ромба и одной из его диагоналей: $x-5y+3=0$, $2x-y-3=0$. Известна точка пересечения его диагоналей $M(1;-1)$. Найти уравнения остальных сторон ромба.

4.4 Домашнее задание

Рекомендуемая литература: [1, гл. 2, § 2–3; 2, гл. 5, § 5.1–5.7].

1 Даны вершины треугольника $A(-1;3)$, $B(3;-2)$, $C(5;3)$. Требуется:

а) написать уравнения сторон этого треугольника;

б) написать уравнение высоты CD, проведённой из вершины C;

в) написать уравнение медианы BF, проведённой из вершины B;

г) найти угол при вершине A треугольника;

д) построить на чертеже ΔABC, высоту CD и медиану BF.

2 Вычислить расстояние от точки $M(1;1)$ до прямой $x+6y+4=0$.

3 Известны уравнение одной из сторон параллелограмма $2x-5y-3=0$ и уравнения двух его диагоналей $-x+2y+2=0$, $x-y=0$. Найти уравнения остальных сторон параллелограмма.

Ответы к заданиям

***Подраздел 4.3*:**

1 а) $\dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y+5}{8}$; б) $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y-3}{6}$;

2 $\begin{cases} x=8t; \\ y=1{,}6\cdot(1-t); \end{cases}$

3 $\vec{n}=(3;1)$, $3x+y-1=0$;

4 $x-5y+23=0$, $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-4}{-5}$;

5 а) $AB: x=2$, $AC: y=3$, $BC: x-3y-1=0$; б) $AD: 3x+y+3=0$, $|AD|=\dfrac{12}{\sqrt{10}}$; в) $BF: \dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-3}{2}$, $|BF|=\sqrt{52}$; г) $\dfrac{\pi}{2}$; д) $\arccos\dfrac{3}{\sqrt{130}}$;

6 2,4;

7 $5x+2y-1=0$;

8 $x-2y+7-4\sqrt{5}=0$, $x-2y+7+4\sqrt{5}=0$;

9 $3x+y+1=0,\ x+y+1=0$;

10 $x-5y-15=0$, $23x+11y+33=0$, $23x+11y-57=0$.

***Подраздел 4.4*:**

1 а) $AB:\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-3}{-5}$, $AC:\dfrac{x+1}{6}=\dfrac{y-3}{0}$, $BC:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{5}$;

б) $CD:4x-5y-5=0$; в) $BF:\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+2}{5}$; г) $\arccos\dfrac{4}{\sqrt{41}}$;

2 $\dfrac{11}{\sqrt{37}}$;

3 $4x-7y-9=0$, $4x-7y-3=0$, $2x-5y-9=0$.

5 Плоскость в пространстве

5.1 Теоретическая часть

5.1.1 Уравнения плоскостей.

Пусть в пространстве задана ортонормированная система координат $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$. Координаты произвольной точки *M* обозначаем $M(x;y;z)$.

Перечислим основные способы задания плоскостей.

1 Любая плоскость в пространстве может быть задана ***общим уравнением*** вида

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{27}$$

И наоборот, каждое уравнение вида (27) задаёт в пространстве некоторую плоскость.

Вектор $\vec{N}=(A,B,C)$ ортогонален плоскости (27) и называется её ***нормальным вектором***. Различные модификации уравнения (27) связаны с различными способами задания плоскости.

2 Плоскость *P* определяется одной своей точкой $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и своим нормальным вектором $\vec{N}=(A;B;C)$. Уравнение плоскости имеет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{28}$$

3 Плоскость *P* определяется тремя своими точками $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$. Её уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (29)$$

4 Плоскость P определяется двумя своими точками $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ и вектором $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, параллельным этой плоскости. Уравнение плоскости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}=0. \qquad (30)$$

5 Плоскость P определяется одной своей точкой $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и двумя векторами $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$, параллельными этой плоскости. Уравнение плоскости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0. \qquad (31)$$

5.1.2 Взаимное расположение плоскостей.

При решении задач полезно использовать ***признаки взаимного расположения плоскостей***. Пусть $P_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $P_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ – две плоскости. Эти плоскости:

1) совпадают, если $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$;

2) параллельны, если $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\ \left(\neq\frac{D_1}{D_2}\right)$, т. е. если векторы $\vec{N}_1=(A_1;B_1;C_1)$ и $\vec{N}_2=(A_2;B_2;C_2)$ коллинеарны;

3) пересекаются, если их нормальные векторы $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ не коллинеарны.

Угол между двумя плоскостями P_1 и P_2 следует искать как угол между их нормальными векторами $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$.

Расстояние от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *до плоскости* $Ax+By+Cz+D=0$

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (32)$$

Также можно использовать универсальную формулу (26).

5.2 Образцы решения примеров

Пример 1 **–** Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(2;-1;1)$ и перпендикулярна плоскостям $2x-y+3z-1=0$, $x+2y+z=0$.

Решение

Нормальные векторы $\vec{N}_1=(2;-1;3)$ и $\vec{N}_2=(1;2;1)$ не параллельны, поэтому плоскости P_1 и P_2 пересекаются. Плоскость P, перпендикулярная к каждой из плоскостей P_1 и P_2, перпендикулярна и к линии их пересечения (рисунок 12). На основании этого найдём нормальный вектор $\vec{N}$ искомой плоскости P как векторное произведение $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$:

$$\vec{N}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-7\vec{i}+\vec{j}+5\vec{k},\ \ \vec{N}=(-7,1,5).$$

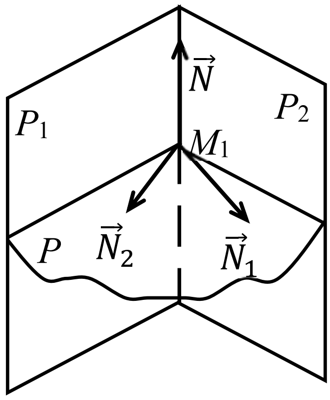


Рисунок 12

Используя (28), запишем уравнение плоскости P:

$$-7(x-2)+(y+1)+5(z-1)=0 \text{ или } -7x+y+5z+10=0.$$

Возможен и другой вариант решения. Пусть $M(x;y;z)$ – произвольная точка искомой плоскости. Тогда векторы $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, $\overrightarrow{M_1M}$ компланарны, поэтому

$$\begin{vmatrix}x-2 & y+1 & z-1\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=0,\ -7(x-2)+(y+1)+5(z-1)=0,\ -7x+y+5z+10=0.$$

5.3 Задания для самостоятельной работы

1 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;2;-3)$ и перпендикулярной вектору $\vec{N}=(1;-2;3)$.

2 Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(5;2;-1)$, $B(4;2;1)$, $C(6;3;0)$.

3 Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-2;1;-1)$, $B(-1;5;-1)$ и перпендикулярной плоскости $x-3y+z-5=0$.

4 Найти расстояние от точки $A(1;2;1)$ до плоскостей:

а) $2x-3y+6z-7=0$;

б) $2x+y-2z-1=0$.

5 Исследовать взаимное расположение плоскостей. В случае, если плоскости P_1 и P_2 пересекаются, найти угол между ними:

а) $4x+2y-4z+5=0$; $2x+y-2z-1=0$;

б) $x-2z+2=0$; $2x-6z-7=0$;

в) $2x-3y+5z-7=0$; $4x-6y+10z-14=0$;

г) $2x-3y+5z-4=0$; $4x-3y+10z-8=0$.

6 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;3;-4)$ и параллельной плоскости Oyz.

7 Построить плоскости:

а) $2x+y-z+6=0$; в) $y-2z+8=0$;

б) $x-y+z=0$; г) $2x-5=0$.

8 Через ось Oz провести плоскость, составляющую с плоскостью $2x+y+\sqrt{5}z=0$ угол $\alpha=60^\circ$.

5.4 Домашнее задание

Рекомендуемая литература: [1, гл. 2, § 2–3; 2, гл. 5, § 5.2, 5.3, 5.10, 5.11; 3, гл. 1, § 1.5].

1 Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(6;-4;-3)$ и $B(5;-3;-2)$ и перпендикулярной плоскости $2x-y-z+1=0$.

2 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;-3;5)$ перпендикулярно линии пересечения плоскостей $2x+y-2z+1=0$ и $x+y+z-5=0$.

3 Вычислить расстояние между параллельными плоскостями $x-2y-2z-1=0$ и $x-2y-2z-6=0$.

4 Построить плоскости:

а) $2x-6y-5z-2=0$; б) $3x-y-3=0$.

Ответы к заданиям

***Подраздел 5.3*:**

1 $x-2y+3z+12=0$;

2 $2x+3y+z-15=0$;

3 $4x-y-7z+3=0$;

4 а) $\frac{5}{7}$; б) $\frac{1}{3}$;

5 а) параллельны; б) пересекаются, $\varphi=\arccos\left(\frac{7}{\sqrt{50}}\right)$; в) совпадают; г) пересекаются, $\varphi=\arccos\left(\frac{3}{\sqrt{38}}\right)$;

6 $x-2=0$.

***Подраздел 5.4*:**

1 $2x+y+3z+1=0$;

2 $3x-4y+z-23=0$;

3 5.

6 Прямая в пространстве

6.1 Теоретическая часть

6.1.1 Уравнения прямой в пространстве.

Пусть в пространстве задана ортонормированная система координат $\{O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$. Координаты произвольной точки *M* обозначают x, y, z и записывают $M(x;y;z)$. Любой вектор $\vec{a}\neq\vec{0}$, параллельный прямой *L*, называют ***направляющим вектором*** этой прямой.

Перечислим основные способы задания прямых в пространстве.

1 Прямая *L* определяется как линия пересечения плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Её уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{33}$$

Уравнения (33) называют ***общими уравнениями*** прямой *L*.

2 Прямая *L* определяется одной своей точкой $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и направляющим вектором $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$. Её уравнения имеют вид:

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}. \quad (34)$$

Уравнения (34) называют ***каноническими уравнениями*** прямой L.

3 Если прямая L определяется одной своей точкой $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и направляющим вектором $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, то она может быть задана ***параметрическими уравнениями*** вида

$$\begin{cases} x=x_1+a_1t; \\ y=y_1+a_2t; \\ z=z_1+a_3t, \end{cases} \quad (35)$$

где t – параметр, $t\in(-\infty,+\infty)$.

4 Прямая определяется двумя своими точками $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_1\neq M_2$. Она может быть задана уравнениями следующего вида:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \quad (36)$$

6.1.2 Взаимное расположение двух прямых в пространстве.

Во многих задачах, связанных с прямыми в пространстве, необходимо выяснить взаимное расположение двух прямых. Это удобно осуществлять, используя направляющие векторы прямых.

Если направляющие векторы $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ и $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ прямых L_1 и L_2 коллинеарны, то прямые L_1 и L_2 совпадают или параллельны:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}\Leftrightarrow L_1 \,||\, L_2.$$

Далее наличие или отсутствие общей точки у прямых L_1 и L_2 покажет, совпадают они или параллельны.

Если же направляющие векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то это равносильно тому, что прямые L_1 и L_2 пересекаются или скрещиваются. В первом случае прямые L_1 и L_2 имеют одну общую точку, а во втором случае общих точек они не имеют.

В ситуациях, когда прямые параллельны или скрещиваются, можно говорить о расстоянии между этими прямыми. Напомним, что расстоянием между скрещивающимися прямыми L_1 и L_2 называется наименьшее из расстояний между различными точками $M_1\in L_1$ и $M_2\in L_2$.

Рассмотрим также проблему взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве. Для того чтобы выяснить взаимное расположение прямой L и плоскости P, проще всего воспользоваться направляющим вектором $\vec{a}$ прямой L и нормальным вектором $\vec{n}$ плоскости P. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{n}$ не ортогональны, то это равносильно тому, что L и P пересекаются в единственной точке. Если же векторы $\vec{a}$ и $\vec{n}$ ортогональны, то это равносильно тому, что прямая L параллельна плоскости P или лежит в ней.

6.2 Образцы решения примеров

Пример 1 – Записать канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-1;-2;2)$ параллельно оси Ox.

Решение

Так как искомая прямая L параллельна оси Ox, то вектор $\vec{i}=(1;0;0)$, расположенный на оси Ox, можно считать направляющим вектором прямой L. Согласно (34) получаем канонические уравнения прямой L

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-2}{0}.$$

Заметим, что нули в знаменателях дробей в канонических уравнениях означают только то, что $y+2=0$ и $z-2=0$. Согласно (35) получаем параметрические уравнения прямой L

$$\begin{cases} x=-1+t; \\ y=-2; \\ z=2. \end{cases}$$

Пример 2 – Записать канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями $\begin{cases} x-2y+3z+1=0; \\ 2x+y-4z-8=0. \end{cases}$

Решение

Чтобы записать канонические уравнения прямой L, требуется найти какую-либо точку на ней и её направляющий вектор или найти две различные точки этой прямой. Выберем точку на прямой L. Полагаем $z=0$ в общих уравнениях прямой. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y+1=0; \\ 2x+y-8=0, \end{cases} \text{откуда } x=3,\ y=2.$$

Итак, точка $M(3;2;0)$ принадлежит L. Направляющий вектор $\vec{a}$ прямой L должен быть перпендикулярен обоим нормальным векторам $\vec{n}_1=(1;-2;3)$ и $\vec{n}_2=(2;1;-4)$ плоскостей $x-2y+3z+1=0$ и $2x+y-4z-8=0$. Значит, в качестве направляющего вектора можно взять векторное произведение $\vec{n}_1\times\vec{n}_2$, т. е.

$$\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -4\end{vmatrix}=5\vec{i}+10\vec{j}+5\vec{k}.$$

Согласно (34) записываем канонические уравнения L:

$$\frac{x-3}{5}=\frac{y-2}{10}=\frac{z}{5}.$$

Пример 3 **–** Заданы прямые

$$L_1:\ \frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}\ \text{ и }\ L_2:\ \frac{x-3}{a}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}.$$

При каком значении a они пересекаются?

Решение

Обозначим через $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ направляющие векторы прямых L_1 и L_2: $\vec{a}_1=(2;-3;4)$, $\vec{a}_2=(a;4;2)$. Прямые L_1 и L_2 пересекаются тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не коллинеарны, а векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ компланарны, где M_1 − точка прямой L_1, M_2 − точка прямой L_2. Возьмем $M_1(-2;0;1)\in L_1$, $M_2(3;1;7)\in L_2$ (рисунок 13).

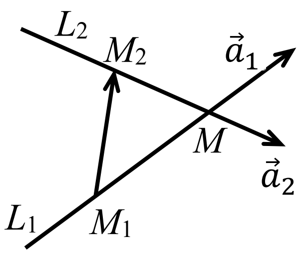


Рисунок 13

Ясно, что векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не коллинеарны, т. к. $-3/4\neq 4/2$. Находим координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}=(5;1;6)$. Вычисляем смешанное произведение векторов $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$:

$$(\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{a}_1)\cdot\vec{a}_2=\begin{vmatrix}5 & 1 & 6\\ 2 & -3 & 4\\ a & 4 & 2\end{vmatrix}=22a-66.$$

Для компланарности векторов $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ необходимо и достаточно, чтобы $22a-66=0$, т. е. $a=3$. Итак, при $a=3$ прямые L_1 и L_2 пересекаются. При других значениях a прямые L_1 и L_2 не пересекаются и не параллельны, т. е. скрещиваются.

Пример 4 **–** Заданы прямые

$$L_1:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}\ \text{ и }\ L_2:\ \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+4}{1}.$$

Доказать, что прямые L_1 и L_2 скрещиваются, найти расстояние между ними.

Решение

Выпишем направляющие векторы прямых L_1 и L_2: $\vec{a}_1=(1;2;3)$, $\vec{a}_2=(1;-1;1)$. Векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не коллинеарны, поэтому L_1 и L_2 пересекаются или скрещиваются.

Докажем, что пересечения нет. Для этого достаточно показать, что L_1 и L_2 не лежат в одной плоскости. С этой целью построим плоскость *P*, проходящую через L_2 и параллельную прямой L_1 (рисунок 14). Плоскость *P* поможет нам в нахождении расстояния между L_1 и L_2.

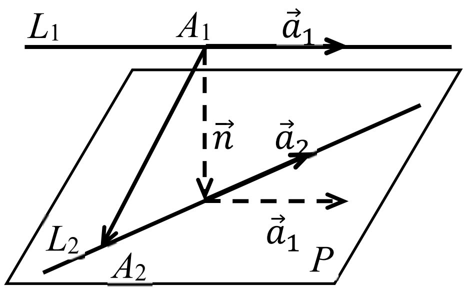


Рисунок 14

Выберем произвольно две точки на прямых L_1 и L_2, например $A_1(1;2;3)\in L_1$, $A_2(1;-1;-4)\in L_2$. Искомая плоскость *P* проходит через точку A_2 параллельно векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, поэтому её уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix}x-1 & y+1 & z+4\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Отсюда получаем $P: 5x+2y-3z-15=0$. Очевидно, что $A_1 \in P$, поэтому $L_1 \notin P$, значит, прямые L_1 и L_2 скрещиваются. Искомое расстояние между L_1 и L_2 равно расстоянию от A_1 до плоскости P (см. рисунок 14). Расстояние d от точки A до плоскости P вычисляем по формуле (26):

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \vec{n}\right|}{|\vec{n}|},$$

где $\overrightarrow{A_1A_2} = (0;-3;-7)$, $\vec{n} = (5;2;-3)$.

Получаем

$$d = \frac{\left|0 \cdot 5 + (-3) \cdot 2 + (-7) \cdot (-3)\right|}{\sqrt{5^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{15}{\sqrt{38}}.$$

6.3 Задания для самостоятельной работы

1 Записать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1;0;-1)$ параллельно вектору $\vec{a} = (2;3;5)$.

2 Записать параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1;-1;-3)$ параллельно вектору $\vec{a} = (2;1;5)$.

3 Записать канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями
$$\begin{cases} x-2y+3z-4=0; \\ 3x+2y-5z-4=0. \end{cases}$$

4 Заданы прямые

$$L_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}} \text{ и } L_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

Выяснить их взаимное расположение.

5 Заданы прямые

$$L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-2} \text{ и } L_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y+11}{2} = \frac{z+6}{1}.$$

Доказать, что прямые пересекаются, и найти точку их пересечения.

6 Заданы прямые

$$L_1: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3} \text{ и } L_2: \begin{cases} 3x+y-5z+1=0; \\ 2x+3y-8z+1=0. \end{cases}$$

Доказать, что прямые L_1 и L_2 перпендикулярны.

7 Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{3}$ и точку $M(3;4;0)$.

8 Найти ортогональную проекцию точки $A(3;1;-1)$ на плоскость $x+2y+3z+8=0$.

9 Найти ортогональную проекцию прямой $\frac{x}{4}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+1}{-2}$ на плоскость $x+2y+4z-7=0$.

10 Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и составляющей с плоскостью $2x+y-\sqrt{5}z=0$ угол 60°.

11 Заданы прямые

$$L_1:\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-2} \text{ и } L_2:\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{2}.$$

Доказать, что прямые L_1 и L_2 параллельны, найти расстояние между ними.

12 Заданы прямые

$$L_1:\frac{x-0{,}5}{-3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{-2} \text{ и } L_2:\frac{x+0{,}5}{5}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{3}.$$

Доказать, что L_1 и L_2 скрещиваются, найти расстояние между ними.

6.4 Домашнее задание

Рекомендуемая литература: [1, гл. 2, § 2–3; 2, гл. 5, § 5.8, 5.9, 5.12, 5.18].

1 Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(1;2;-2)$ и параллельной прямой $\begin{cases} x-y-2=0; \\ y-2z-1=0. \end{cases}$

2 Заданы прямая и плоскость:

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y}{12}=\frac{z-1}{-3},\ 6x-3y+2z=0.$$

Найти точку их пересечения и угол между ними.

3 Заданы прямые

$$L_1:\begin{cases} 2x+2y-z-10=0; \\ x-y-z-22=0 \end{cases} \text{ и } L_2:\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4}.$$

Доказать, что прямые L_1 и L_2 параллельны, найти расстояние между ними.

4 Заданы прямые

$$L_1: \frac{x-7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2} \text{ и } L_2: \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}.$$

Доказать, что прямые L_1 и L_2 скрещиваются, найти расстояние между ними.

Ответы к заданиям

***Подраздел 6.3*:**

1 $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{5}$;

2 $\begin{cases} x = 1 + 2t; \\ y = -1 + t; \\ z = -3 + 5t; \end{cases}$

3 $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}$;

4 пересекаются;

5 $(3;-3;-2)$;

7 $x - 2y + z + 3 = 0$;

8 $(-1;-3;-3)$;

9 $(4;7;-3)$;

10 $x - 2y = 0$;

11 $\sqrt{29}$;

12 $\frac{1}{\sqrt{390}}$.

***Подраздел 6.4*:**

1 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{1}$;

2 $\left(\frac{25}{9}; \frac{16}{3}; \frac{-1}{3}\right)$, $\varphi = \arcsin\left(\frac{18}{91}\right)$;

3 $15\sqrt{3}$;

4 $\frac{43}{\sqrt{29}}$.

Список литературы

1 **Беклемишев, Д. В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – Санкт-Петербург : Лань, 2015. – 448 с.

2 **Гурский, Е. И**. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии / Е. И. Гурский. – Минск : Вышэйшая школа, 1982. – 272 с.

3 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика: в 3 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Вышэйшая школа, 1984. – Ч. 1. – 383 с.

4 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике : полный курс / Д. Т. Письменный. – 10-е изд. – Москва : Айрис-пресс, 2011. – 608 с.

5 Сборник задач по математике для втузов: в 2 ч. / В. А. Болтов [и др.]; под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича. – 2-е изд. – Москва : Наука, 1986. – Ч. 1. – 464 с.