

МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Технологии металлов»

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

*Методические рекомендации к практическим занятиям
для студентов специальностей 1-37 01 06 «Техническая
эксплуатация автомобилей (по направлениям)»
и 1-37 01 07 «Автосервис» очной и заочной форм обучения*

Часть 1



Могилев 2023

УДК 539.3/6
ББК 30.121
М55

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Технологии металлов» «23» ноября 2022 г.,
протокол № 7

Составители: канд. техн. наук, доц. В. А. Попковский;
ст. преподаватель С. В. Гонорова

Рецензент канд. техн. наук, доц. О. В. Благодарная

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины «Механика материалов» для студентов специальностей 1-37 01 06 «Техническая эксплуатация автомобилей (по направлениям)» и 1-37 01 07 «Автосервис» очной и заочной форм обучения. Содержат материалы к практическим занятиям.

Учебно-методическое издание

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

Часть 1

Ответственный за выпуск	Д. И. Якубович
Корректор	И. В. Голубцова
Компьютерная верстка	Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 26 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2023

Содержание

Введение.....	4
1 Геометрические характеристики поперечных сечений. Статический момент площади сечения. Определение центра тяжести составного и сложного сечения. Осевые, полярный и центробежный моменты инерции сечения. Определение моментов инерции при параллельном переносе осей. Моменты инерции простых сечений относительно центральных осей.....	5
2 Определение моментов инерции при повороте осей. Главные, центральные и главные центральные оси, определение их положения. Главные, центральные и главные центральные моменты инерции поперечного сечения.....	7
3 Расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии прямого бруса.....	12
4 Расчеты на прочность при прямом поперечном изгибе: проверочный, проектировочный расчет и определение допускаемой нагрузки.....	20
5 Расчет линейных и угловых перемещений при прямом поперечном изгибе	28
6 Определение главных напряжений и расчеты по теориям прочности. Расчеты на прочность и жесткость при кручении прямолинейного бруса круглого поперечного сечения.....	32
Список литературы	39
Приложение А.....	40
Приложение Б.....	41
Приложение В.....	42

Введение

Цель преподавания курса «Механика материалов» – получение теоретических знаний в объеме лекций по основам расчета на прочность, жесткость и устойчивость деталей и элементов конструкций.

Практические занятия позволяют закрепить теоретические знания и приобрести навыки расчета при различных видах нагружения.

Методические рекомендации содержат примеры решения задач по основным темам курса. Представлены задачи для самостоятельного решения с целью подготовки к занятиям, контрольным работам и экзамену. Также приведены контрольные вопросы по теории курса.

1 Геометрические характеристики поперечных сечений. Статический момент площади сечения. Определение центра тяжести составного и сложного сечения. Осевые, полярный и центробежный моменты инерции сечения. Определение моментов инерции при параллельном переносе осей. Моменты инерции простых сечений относительно центральных осей

Пример – Для сечения, изображенного на рисунке 1.1, определить осевые и центробежный моменты инерции относительно указанных осей.

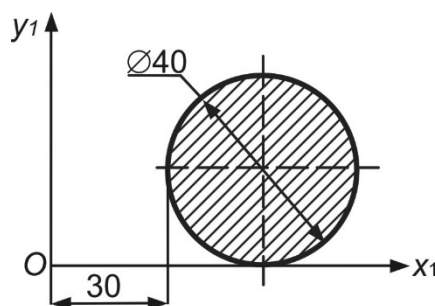


Рисунок 1.1

Решение

Заданное сечение имеет оси симметрии, которые являются собственными главными центральными осями [1–4]. На их пересечении находится центр тяжести – точка *C* (рисунок 1.2).

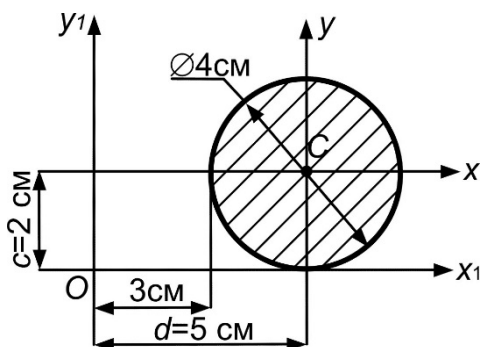


Рисунок 1.2 – Расчетная схема

Определим геометрические характеристики сечения относительно собственных главных центральных осей.

Площадь поперечного сечения

$$A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 4^2}{4} = 12,56 \text{ см}^2.$$

Осевые моменты инерции, в соответствии с таблицей А.1,

$$I_x = I_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot 4^4}{64} = 12,56 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции для симметричного сечения [1–4]
 $I_{x_c y_c} = 0$.

Заданные оси x_1 и y_1 и главные центральные оси x_c и y_c параллельны (см. рисунок 1.2). Поэтому осевые и центробежный моменты инерции относительно осей x_1 и y_1 определяем по формулам при параллельном переносе осей [1, 2]:

$$I_{x_1} = I_x + c^2 \cdot A = 12,56 + 2^2 \cdot 12,56 = 62,8 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_1} = I_y + d^2 \cdot A = 12,56 + 5^2 \cdot 12,56 = 326,56 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_1 y_1} = I_{xy} + c \cdot d \cdot A = 5 \cdot 2 \cdot 12,56 = 125,6 \text{ см}^4.$$

Контрольные вопросы

- 1 Запишите формулы для определения координат центра тяжести сечения.
- 2 В каких случаях положение центра тяжести сечения можно определить без соответствующих расчетов?
- 3 Какие оси называют центральными осями сечения?
- 4 Относительно каких осей сечения статические моменты инерции равны нулю?
- 5 Для каких сечений центробежный момент инерции будет равен нулю?
- 6 Запишите выражения для определения осевых моментов инерции при параллельном переносе осей.
- 7 Запишите выражения для определения центробежного момента инерции при параллельном переносе осей.
- 8 Как определить величину полярного момента инерции сечения, если известны величины осевых моментов инерции?

2 Определение моментов инерции при повороте осей. Главные, центральные и главные центральные оси, определение их положения. Главные, центральные и главные центральные моменты инерции поперечного сечения

Пример 1 – Для сложного сечения, изображенного на рисунке 2.1, определить главные центральные моменты инерции и положение главных центральных осей.

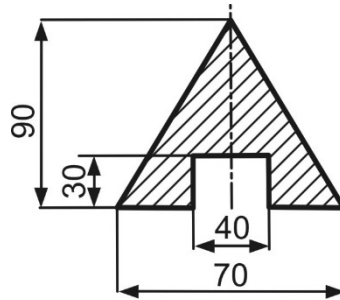


Рисунок 2.1 – Сложное сечение

Решение

Вычерчиваем заданное сечение, в котором выделим простые фигуры: 1 – треугольник, 2 – прямоугольник. Через центры тяжести этих фигур проведем собственные главные центральные оси (рисунок 2.2).

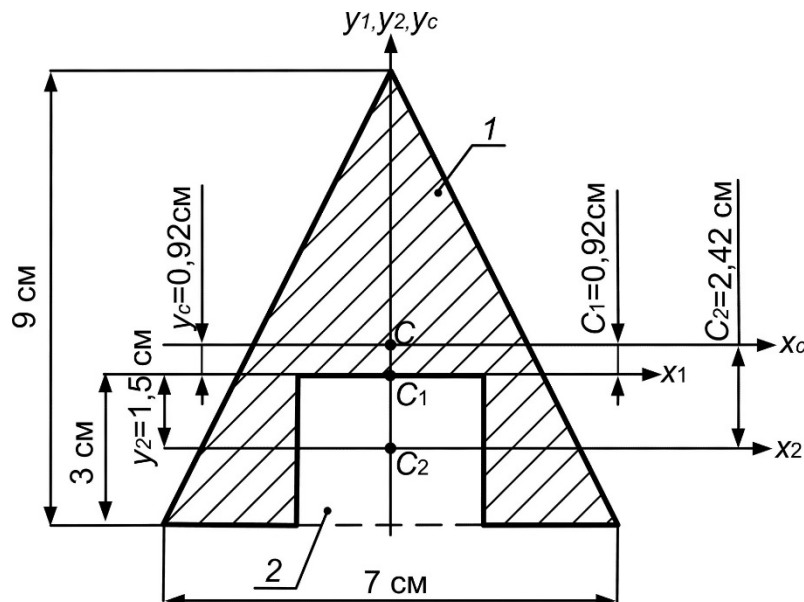


Рисунок 2.2 – Расчетная схема

Определим геометрические характеристики выделенных фигур в соответствии с таблицей А.1:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 7 = 31,5 \text{ см}^2; \quad A_2 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ см}^2.$$

Заданное сечение имеет ось симметрии, которая является главной центральной осью y_C .

Определим положение центра сечения относительно произвольно выбранных начальных осей x_1, y_C . Центр тяжести располагается на главной центральной оси y_C , следовательно,

$$x_C = 0;$$

$$y_C = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot y_1 - A_2 \cdot y_2}{A_1 - A_2} = \frac{31,5 \cdot 0 - 12 \cdot (-1,5)}{31,5 - 12} = 0,92 \text{ см},$$

где y_1, y_2 – координаты центров тяжести фигур, составляющих сечение относительно начальных осей x_1, y_C .

Полученные координаты откладываем на начальных осях и отмечаем центр тяжести – точку C (см. рисунок 2.2). Через данную точку проводим вторую главную центральную ось x_C .

Определим межосевые расстояния:

$$c_1 = 0,92 \text{ см}, \quad d_1 = 0;$$

$$c_2 = 2,42 \text{ см}, \quad d_2 = 0.$$

Для расчета главных центральных моментов инерции используем формулы при параллельном переносе осей. С учетом данных таблицы А.1

$$I_{x_C} = \sum_1^n (I_{x_i} + c_i^2 \cdot A_i) = (I_{x_1} + c_1^2 \cdot A_1) - (I_{x_2} + c_2^2 \cdot A_2) = \left(\frac{7 \cdot 9^3}{36} + 0,92^2 \cdot 31,5 \right) - \left(\frac{4 \cdot 3^3}{12} + 2,42^2 \cdot 12 \right) = 89,14 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_C} = \sum_1^n (I_{y_i} + d_i^2 \cdot A_i) = (I_{y_1} + d_1^2 \cdot A_1) - (I_{y_2} + d_2^2 \cdot A_2) = \frac{7^3 \cdot 9}{48} - \frac{4^3 \cdot 3}{12} = 48,31 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции $I_{x_C y_C} = 0$.

Главные центральные моменты инерции

$$I_{\max} = I_{x_C} = 89,14 \text{ см}^4; \quad I_{\min} = I_{y_C} = 48,31 \text{ см}^4.$$

Ось x_C проходит через плоскость максимальной жесткости, а ось y_C – минимальной.

Пример 2 – Для сечения, изображенного на рисунке 2.3, определить главные центральные моменты инерции и положение главных центральных осей.

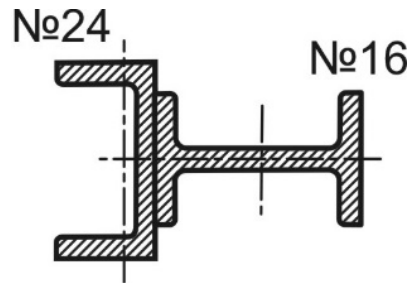


Рисунок 2.3 – Составное сечение

Решение

Заданное сечение (см. рисунок 2.3) состоит из профилей проката: швеллера и двутавра, для которых запишем геометрические характеристики относительно собственных главных центральных осей.

Для швеллера из таблиц ГОСТ 8240–97

$$A_1 = 30,6 \text{ см}^2; I_{x_1} = 2900 \text{ см}^4; I_{y_1} = 208 \text{ см}^4.$$

Для двутавра из таблиц ГОСТ 8239–89, с учетом горизонтального расположения профиля в сечении,

$$A_2 = 15,9 \text{ см}^2; I_{x_2} = 58,6 \text{ см}^4; I_{y_2} = 873 \text{ см}^4.$$

Вычерчиваем заданное сечение. Через центры тяжести профилей проведем собственные главные центральные оси (рисунок 2.4).

Заданное сечение имеет ось симметрии, которая является главной центральной осью x_C .

Определим положение центра сечения относительно произвольно выбранных начальных осей y_1, x_C .

Центр тяжести располагается на главной центральной оси x_C , следовательно,

$$x_C = \frac{\sum A_i \cdot x_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{A_1 + A_2} = \frac{30,6 \cdot 0 + 15,9 \cdot 10,42}{30,6 + 15,9} = 3,56 \text{ см};$$

$$y_C = 0,$$

где x_1, x_2 – координаты центров тяжести фигур, составляющих сечение относительно начальных осей x_C, y_1 .

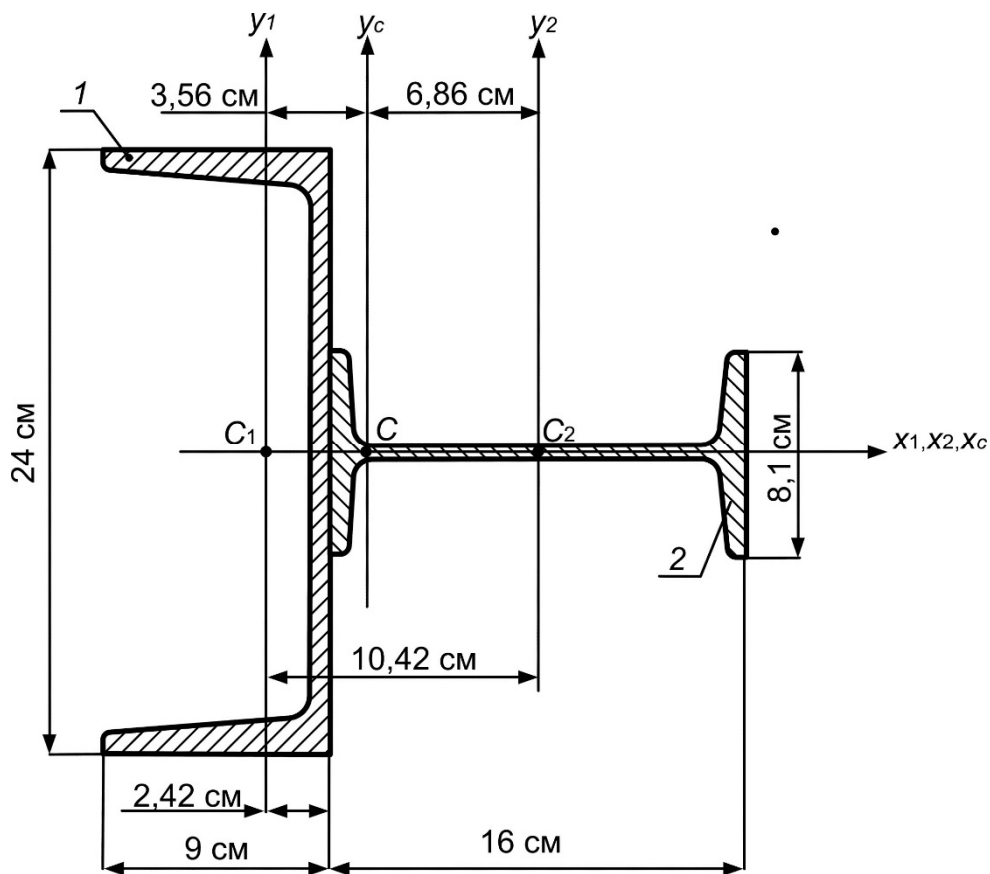


Рисунок 2.4 – Расчетная схема

Полученные координаты откладываем на начальных осях и отмечаем центр тяжести – точку C (см. рисунок 2.4). Через данную точку проводим вторую главную центральную ось y_C .

Определим межосевые расстояния:

$$c_1 = 0 \text{ см}, \quad d_1 = 3,56 \text{ см}; \quad c_2 = 0, \quad d_2 = 6,86 \text{ см}.$$

Для расчета главных центральных моментов инерции используем формулы при параллельном переносе осей:

$$I_{x_C} = \sum_1^n (I_{x_i} + c_i^2 \cdot A_i) = (I_{x_1} + c_1^2 \cdot A_1) + (I_{x_2} + c_2^2 \cdot A_2) = 2900 + 58,6 = 2958,6 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_C} = \sum_1^n (I_{y_i} + d_i^2 \cdot A_i) = (I_{y_1} + d_1^2 \cdot A_1) + (I_{y_2} + d_2^2 \cdot A_2) = (208 + 3,56^2 \cdot 30,6) +$$

$$+ (873 + 6,86^2 \cdot 15,9) = 2217,1 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции $I_{x_C y_C} = 0$.

Главные центральные моменты инерции

$$I_{\max} = I_{x_C} = 2958,6 \text{ см}^4; \quad I_{\min} = I_{y_C} = 2217,1 \text{ см}^4.$$

Ось x_C проходит через плоскость максимальной жесткости, а ось y_C — минимальной.

Пример 3 (для самостоятельного решения) — Для сечений, изображенных на рисунке 2.5, определить главные центральные моменты инерции и положение главных центральных осей.

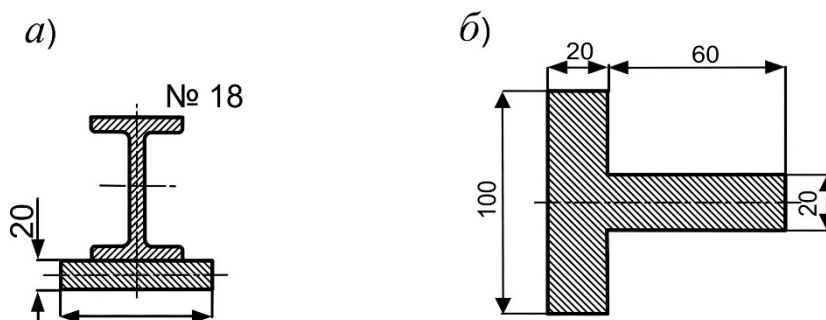


Рисунок 2.5

Контрольные вопросы

- 1 Какие оси называют главными центральными осями сечения?
- 2 В каких случаях можно установить положение главных центральных осей без соответствующих расчетов?
- 3 Изменится ли сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей при повороте этих осей?
- 4 Запишите выражения для определения величин главных центральных моментов инерции сечения.
- 5 Какие существуют зависимости между геометрическими характеристиками при повороте осей?
- 6 Как определить угол поворота центральных осей в положение главных центральных осей?

3 Расчеты на прочность и жесткость при растяжении-сжатии прямого бруса

Пример 1 – Проверить прочность стального стержня, изображенного на рисунке 3.1. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа. Построить эпюру перемещений.

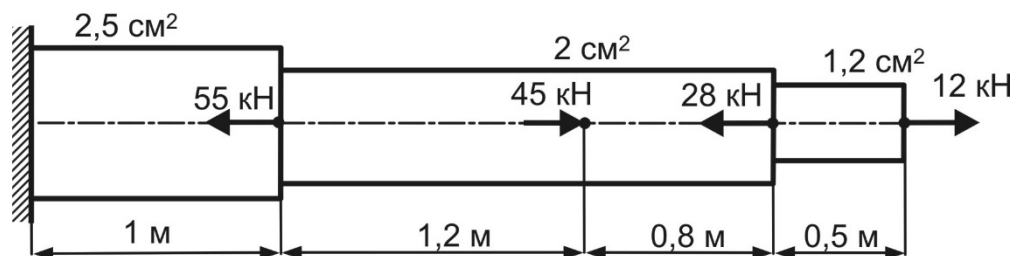


Рисунок 3.1

Решение

Разбиваем брус на участки (рисунок 3.2, а).

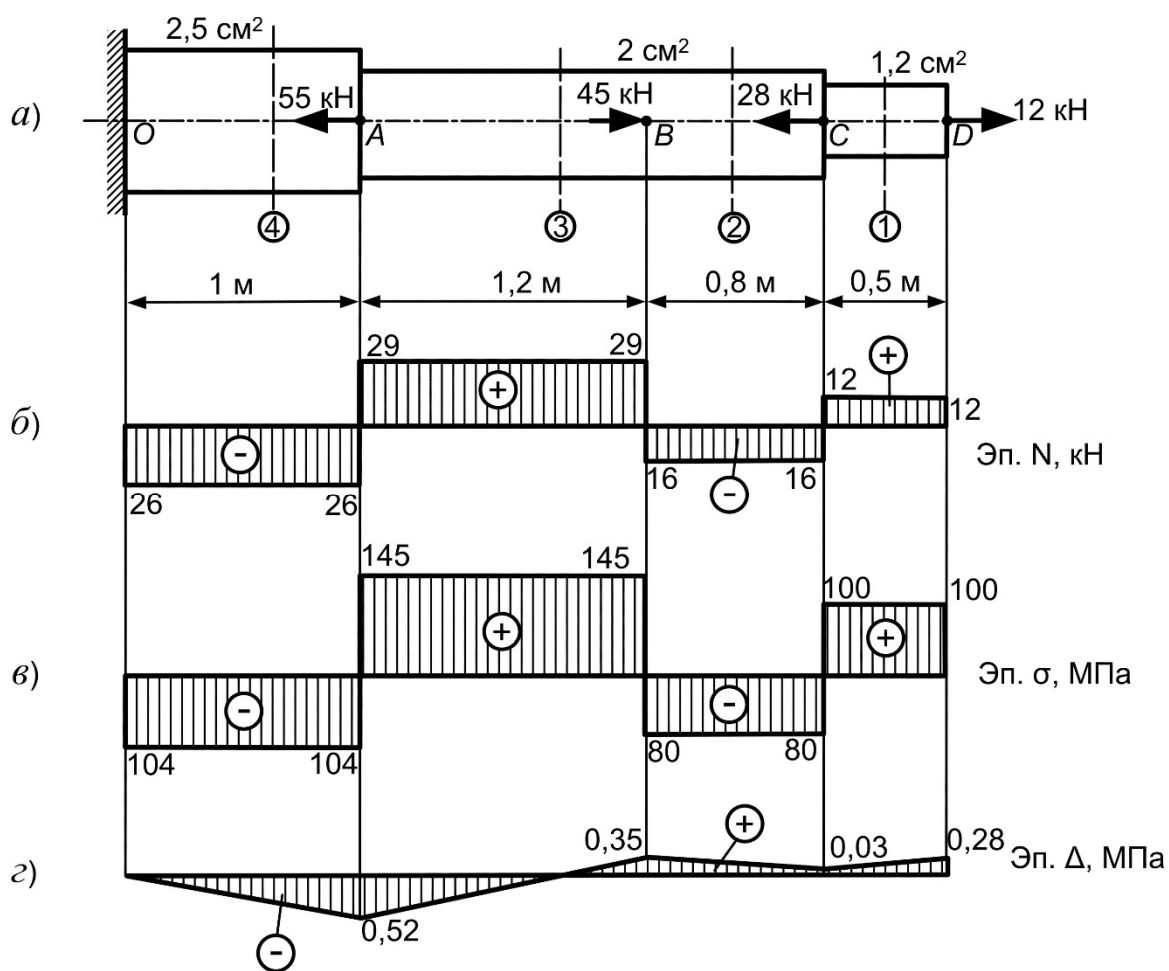


Рисунок 3.2 – Эпюры продольных сил, напряжений и перемещений

Определяем продольные (нормальные) силы по участкам бруса, используя метод сечений [1–4]:

- участок 1: $N_1 = 12$ кН;
- участок 2: $N_2 = 12 - 28 = -16$ кН;
- участок 3: $N_3 = 12 - 28 + 45 = 29$ кН;
- участок 4: $N_4 = 12 - 28 + 45 - 55 = -26$ кН.

По полученным значениям строим эпюру продольных сил (рисунок 3.2, б). Определим значения нормальных напряжений на участках бруса:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_2} = \frac{12 \cdot 10^3}{1,2 \cdot 10^{-4}} = 10 \cdot 10^7 \text{ Па} = 100 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{16 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = -80 \cdot 10^7 \text{ Па} = -80 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{29 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-4}} = 14,5 \cdot 10^7 \text{ Па} = 145 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_4} = -\frac{26 \cdot 10^3}{2,5 \cdot 10^{-4}} = -10,4 \cdot 10^7 \text{ Па} = -104 \text{ МПа}.$$

Построим эпюру нормальных напряжений (рисунок 3.2, в).

При помощи эпюры нормальных напряжений определим опасный участок. Для стального стержня проверка прочности выполняется для того участка, на котором возникают наибольшие по величине напряжения $|\sigma_{\max}| = 145$ МПа (см. рисунок 3.2, в).

Запишем условие прочности:

$$|\sigma_{\max}| \leq [\sigma]; \quad \sigma_{\max} = 145 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполнено, прочность обеспечена.

Определим абсолютные удлинения (укорочения) участков бруса, используя закон Гука [1–2]. Модуль продольной упругости материала $E = 2 \cdot 10^5$ МПа (таблица Б.1):

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1,2 \cdot 10^{-4}} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,25 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} = -\frac{16 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = -3,2 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,32 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot A_3} = \frac{29 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 8,7 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,87 \text{ мм};$$

$$\Delta l_4 = \frac{N_4 \cdot l_4}{E \cdot A_4} = -\frac{26 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}} = -5,2 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,52 \text{ мм}.$$

Определим перемещения характерных сечений бруса [1–4]:

$$\Delta_O = 0;$$

$$\Delta_A = \Delta l_4 = -0,52 \text{ мм};$$

$$\Delta_B = \Delta l_4 + \Delta l_3 = \Delta_A + \Delta l_3 = -0,52 + 0,87 = 0,35 \text{ мм};$$

$$\Delta_C = \Delta l_4 + \Delta l_3 + \Delta l_2 = \Delta_B + \Delta l_2 = 0,35 - 0,32 = 0,03 \text{ мм};$$

$$\Delta_D = \Delta l_4 + \Delta l_3 + \Delta l_2 + \Delta l_1 = \Delta_C + \Delta l_1 = 0,03 + 0,25 = 0,28 \text{ мм}.$$

По полученным значениям построим эпюру перемещений (рисунок 3.2, з).

Пример 2 – Определить площадь поперечного сечения чугунного стержня (рисунок 3.3). Для материала стержня $[\sigma]_{СЖ} = 50 \text{ МПа}$; $[\sigma]_P = 20 \text{ МПа}$.

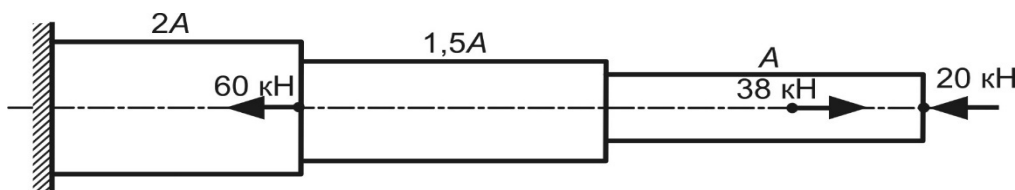


Рисунок 3.3

Решение

Для заданного бруса построим эпюры продольных сил и напряжений (рисунок 3.4).

Выполним расчет площади поперечного сечения исходя из свойств материала заданного бруса. Отдельно рассмотрим растянутую и сжатую области эпюры нормальных напряжений [1–4].

Условие прочности на сжатие

$$|\sigma_{\max}|_{СЖ} \leq [\sigma]_{СЖ}; \quad |\sigma_{\max}|_{СЖ} = \left| \frac{21}{A} \right| \leq [\sigma]_{СЖ} = 280 \text{ МПа}.$$

Откуда площадь поперечного сечения

$$A_{СЖ} \geq \frac{21 \cdot 10^3}{280 \cdot 10^6} = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 = 0,075 \text{ см}^2.$$

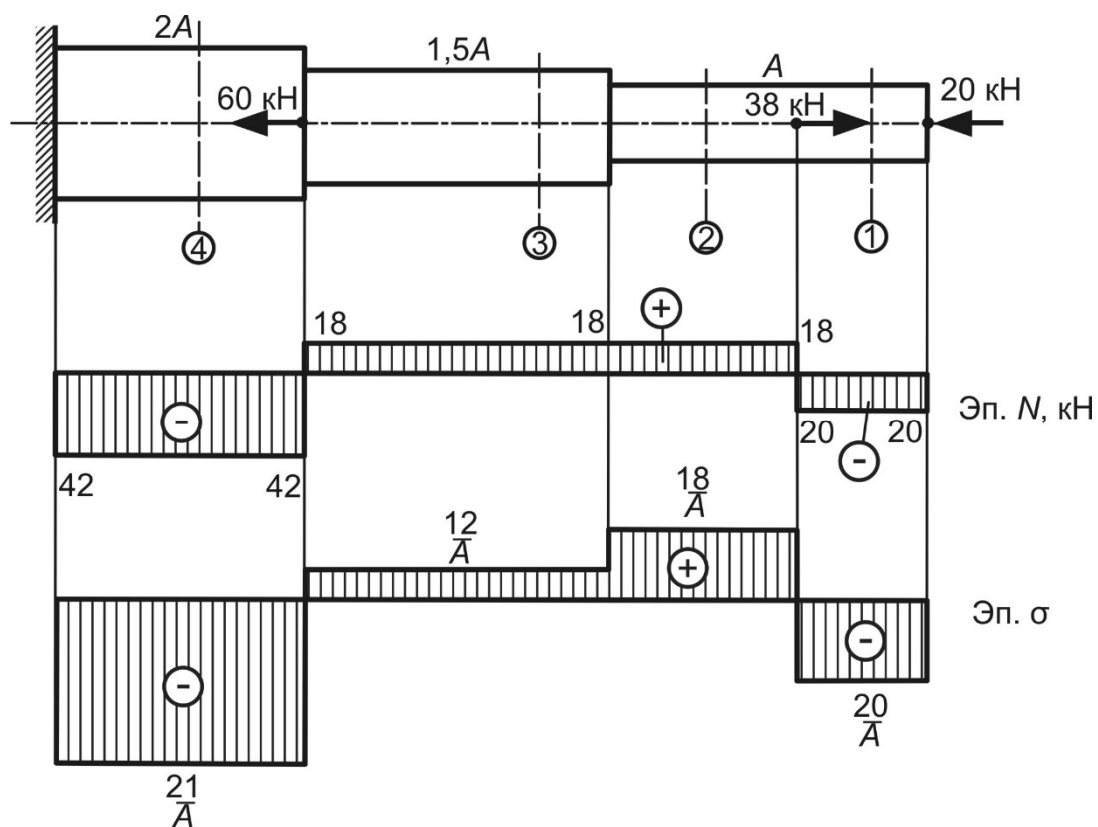


Рисунок 3.4 – Эпюры продольных сил и напряжений

Условие прочности на растяжение

$$|\sigma_{\max}|_p = \left| \frac{18}{A} \right| \leq [\sigma]_p = 50 \text{ МПа.}$$

Откуда площадь поперечного сечения

$$A_p \geq \frac{18 \cdot 10^3}{50 \cdot 10^6} = 3,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 3,6 \text{ см}^2.$$

Примем $A = 3,6 \text{ см}^2$.

Пример 3 – Определить допускаемую нагрузку на стальной брус (рисунок 3.5). Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

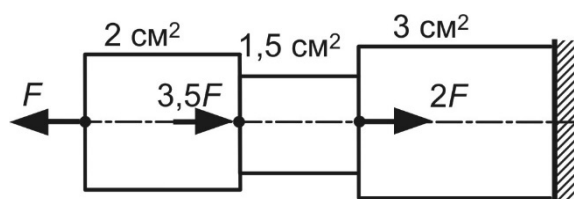


Рисунок 3.5

Решение

Строим эпюры продольных сил и нормальных напряжений (рисунок 3.6).

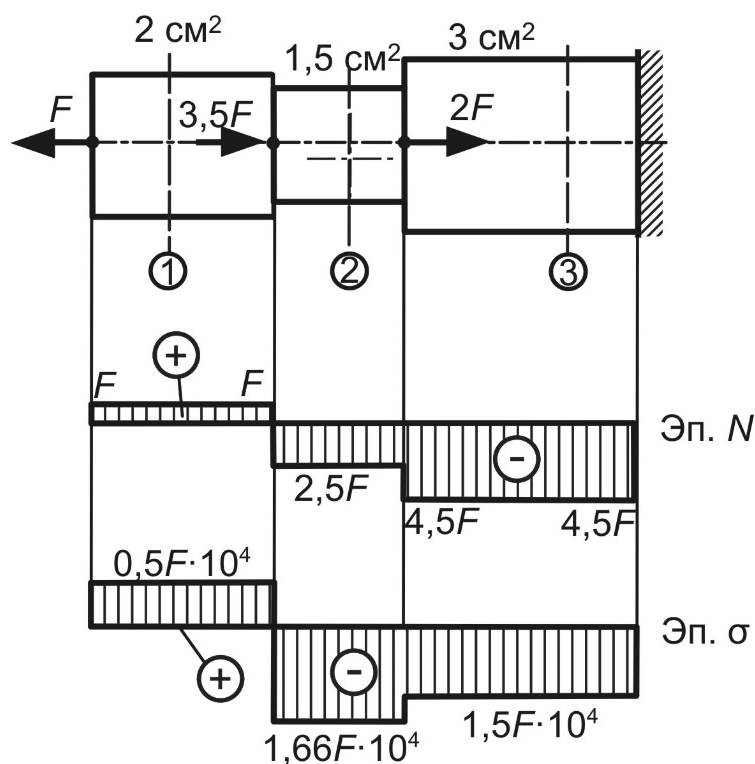


Рисунок 3.6 – Эпюры продольных сил и нормальных напряжений

Из эпюры нормальных напряжений (см. рисунок 3.6) видно, что опасным является второй участок. Условие прочности имеет вид

$$|\sigma_{\max}| = |1,66F \cdot 10^4| \leq [\sigma].$$

Допустимая нагрузка из условия прочности

$$[F] \leq \frac{[\sigma]}{1,66 \cdot 10^4} = \frac{160 \cdot 10^6}{1,66 \cdot 10^4} = 9639 \text{ Н.}$$

Пример 4 – Проверить прочность стального стержня (рисунок 3.7). Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

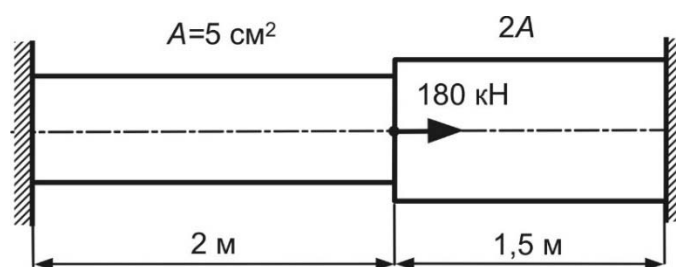


Рисунок 3.7

Решение

Уравнение статики для заданного стержня

$$\sum Z = -R_C + F - R_B = 0.$$

Стержень один раз статически неопределим. Чтобы рассчитать реакцию одной из связей, дополнительно к уравнению статики запишем уравнение деформаций [1–4]: $\Delta l = 0$.

Для составления уравнения деформаций используем принцип независимости действия сил. Стержень освободим от жесткой заделки в точке C . Сначала данный стержень нагрузим только заданной нагрузкой и построим грузовую эпюру N_F . Затем на стержень будет действовать реакция удаленной связи (рисунок 3.8).

Определим деформацию стержня от заданной нагрузки:

$$\Delta l_F = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot A_i} = 0 - \frac{180 \cdot 1,5}{E \cdot 2A} = -\frac{135}{EA}.$$

Аналогично определим деформацию стержня от действия реакции:

$$\Delta l_R = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot A_i} = \frac{R_C \cdot 2}{E \cdot A} - \frac{R_C \cdot 1,5}{E \cdot 2A} = \frac{2,75R_C}{EA}.$$

Тогда уравнение деформаций примет вид

$$\Delta l = \Delta l_F + \Delta l_R = -\frac{135}{EA} + \frac{2,75R_C}{EA} = 0; R_C = 49,1 \text{ кН}.$$

Эпюра нормальных сил N_R от действия найденной реакции изображена на рисунке 3.8. Ординаты окончательной эпюры нормальных сил N определим, суммируя эпюры N_R и N_F [3].

Рассчитываем нормальные напряжения и строим эпюру σ (см. рисунок 3.8). Выполняем проверку прочности:

$$|\sigma_{\max}| \leq [\sigma]; |\sigma_{\max}| = 130,9 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Прочность стержня обеспечена.

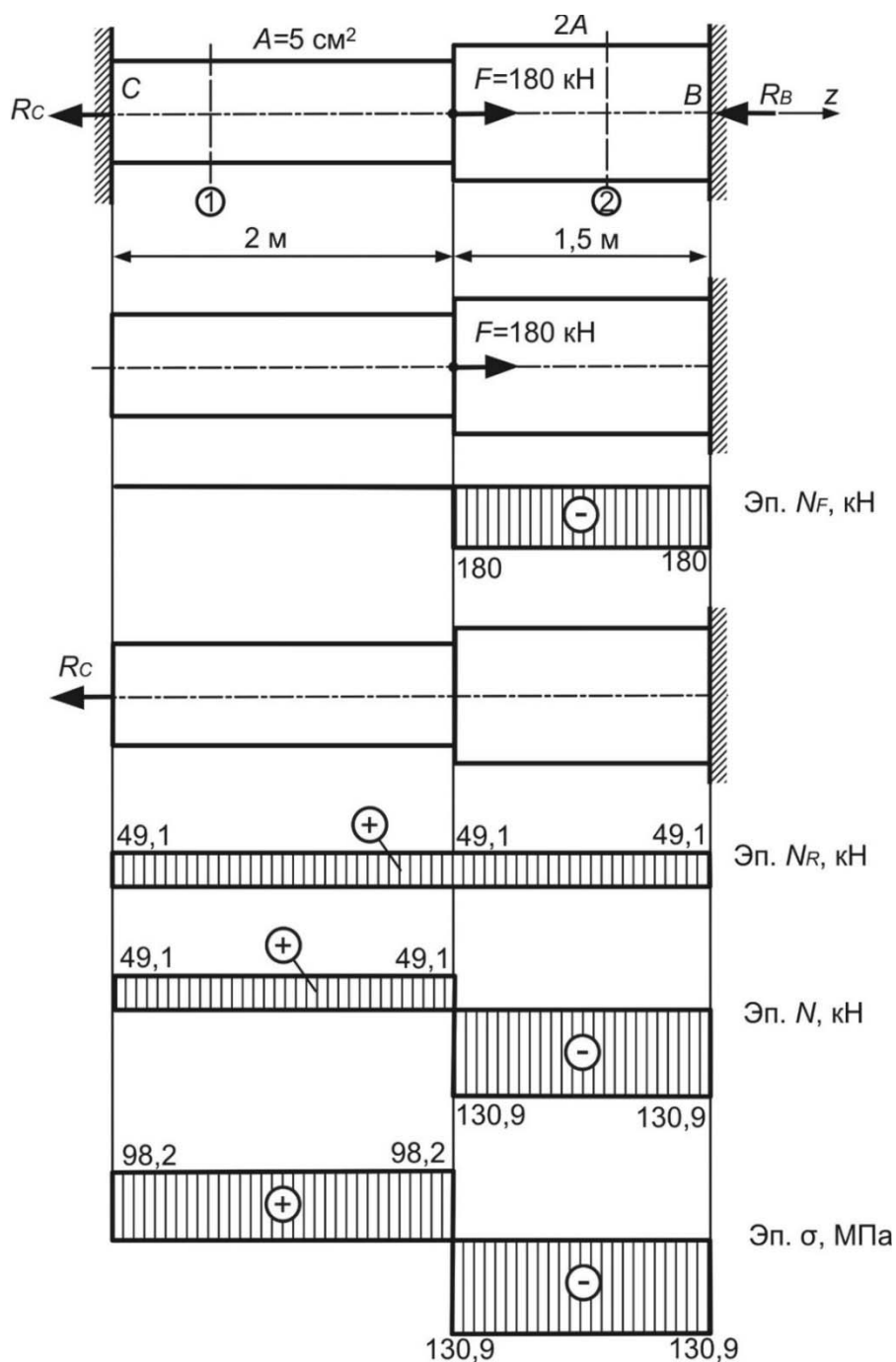


Рисунок 3.8 – К расчету статически неопределимого стержня

Пример 5 (для самостоятельного решения) – Определить допускаемую нагрузку на стержень, изображенный на рисунке 3.9. Допускаемые напряжения $[\sigma]_p = 28 \text{ МПа}$; $[\sigma]_{сж} = 170 \text{ МПа}$.

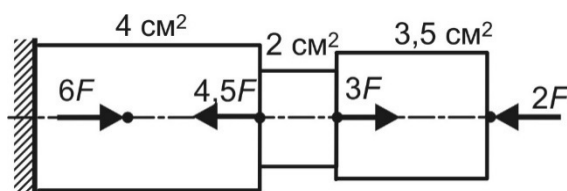


Рисунок 3.9

Пример 6 (для самостоятельного решения) – Построить эпюру перемещений для стального стержня (рисунок 3.10).

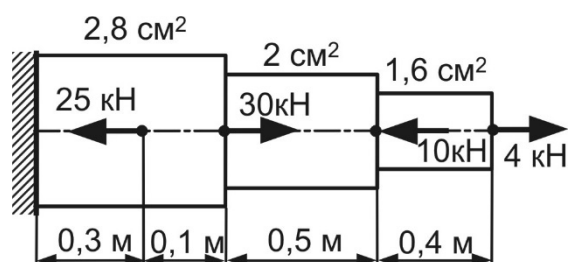


Рисунок 3.10

Контрольные вопросы

- 1 Какой вид нагружения называется осевым растяжением-сжатием?
- 2 Какие внутренние силовые факторы возникают при растяжении-сжатии?
- 3 Запишите правило знаков для определения продольной силы.
- 4 Как определить величину продольной силы в произвольном сечении бруса?
- 5 Запишите формулу для расчета нормальных напряжений.
- 6 Запишите условие прочности при осевом растяжении-сжатии.
- 7 Перечислите задачи, решаемые из условия прочности.
- 8 Что такое допускаемое напряжение?
- 9 Запишите математическое выражение закона Гука при растяжении-сжатии.
- 10 Что такое модуль продольной упругости?
- 11 Дайте определение относительной и абсолютной деформациям.
- 12 Как можно рассчитать абсолютную продольную деформацию при растяжении-сжатии?
- 13 Сформулируйте условие жесткости при растяжении-сжатии.

4 Расчеты на прочность при прямом поперечном изгибе: проверочный, проектировочный расчет и определение допустимой нагрузки

Пример 1 – Проверить прочность балки, изображенной на рисунке 4.1. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

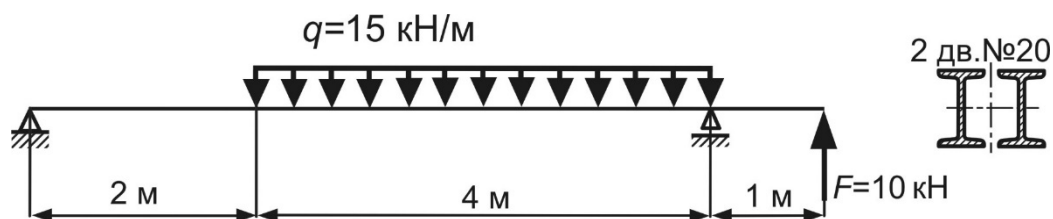


Рисунок 4.1

Решение

Определим опорные реакции заданной балки (рисунок 4.2):

$$\sum M_B = 0; -R_A \cdot 6 + 15 \cdot 4 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = 0; \quad R_A = \frac{15 \cdot 4 \cdot 2 + 10 \cdot 1}{6} = 21,67 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0; R_B \cdot 6 - 15 \cdot 4 \cdot 4 + 10 \cdot 7 = 0; \quad R_B = \frac{15 \cdot 4 \cdot 4 + 10 \cdot 7}{6} = 28,33 \text{ кН}.$$

Проверка правильности расчета реакций из условия:

$$\sum Y = 0; \quad 21,67 - 15 \cdot 4 + 28,33 + 10 = 0.$$

Разбиваем балку на три участка. Используя метод сечений, для каждого из участков записываем выражения для определения поперечной силы Q и изгибающего момента M . Расчет значений поперечных сил и изгибающих моментов выполняем для характерных сечений балки.

Участок 1: $0 \leq z_1 \leq 2$ м.

$$Q_1 = 21,67 \text{ кН}; \quad M_1 = 11 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; \quad M_1 = 0;$$

$$z_1 = 2 \text{ м}; \quad M_1 = 43,34 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок 2: $0 \leq z_2 \leq 4$ м.

$$Q_2 = 21,67 - 15 \cdot z_2; \quad M_2 = 11 \cdot (2 + z_2) - 15 \cdot \frac{z_2^2}{2};$$

$$z_2 = 0; Q_2 = 21,67 \text{ кН}; M_2 = 43,34 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$z_2 = 4 \text{ м}; Q_2 = -38,33 \text{ кН}; M_2 = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$\text{Экстремум: } Q_2 = 21,67 - 15 \cdot z_2 = 0; z_2 = \frac{21,67}{15} = 1,45 \text{ м}; M_2 = 58,99 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

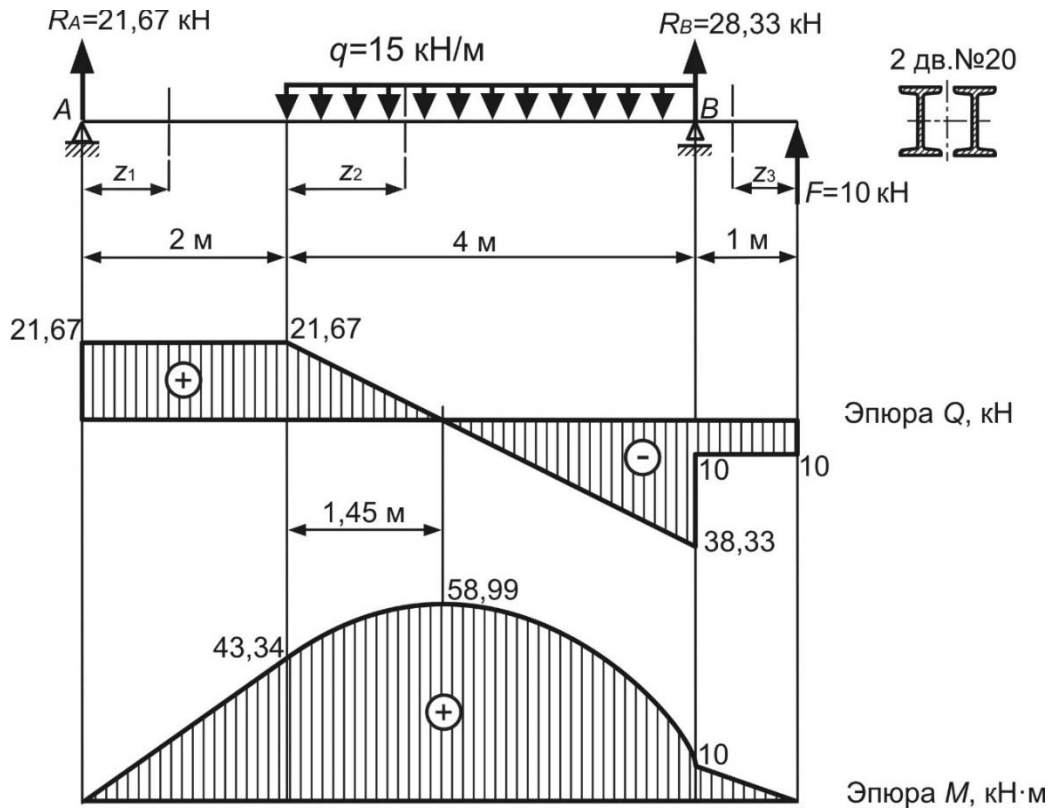


Рисунок 4.2

Участок 3: $0 \leq z_3 \leq 1 \text{ м}$.

$$Q_3 = -10 \text{ кН}; M_3 = 10 \cdot z_3;$$

$$z_3 = 0; M_3 = 0;$$

$$z_3 = 1 \text{ м}; M_3 = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По полученным результатам строим эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M (см. рисунок 4.2).

Условие прочности при изгибе

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Из эпюры изгибающих моментов определим опасное сечение, в котором $M_{\max} = 58,99 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (см. рисунок 4.2).

Для заданного двутавра из таблиц ГОСТ 8239–89 выписываем значение осевого момента сопротивления: $W_X^{Д6} = 184 \text{ см}^3$. Осевой момент сопротивления сечения, состоящего из двух двутавров, $W_X = 2 \cdot W_X^{Д6} = 2 \cdot 184 = 368 \text{ см}^3$.

Тогда условие прочности имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{58,98 \cdot 10^3}{368 \cdot 10^{-6}} = 0,1603 \cdot 10^9 \text{ Па} = 160,3 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Процент перенапряжения [3]

$$\delta = \frac{\sigma_{\max} - [\sigma]}{[\sigma]} \cdot 100 \% \leq 5 \%;$$

$$\delta = \frac{160,3 - 160}{160} \cdot 100 \% = 0,13 \% < 5 \%.$$

Данное перенапряжение не является опасным. Прочность балки обеспечена.

Пример 2 – Определить размеры поперечного сечения балки, изображенной на рисунке 4.3. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

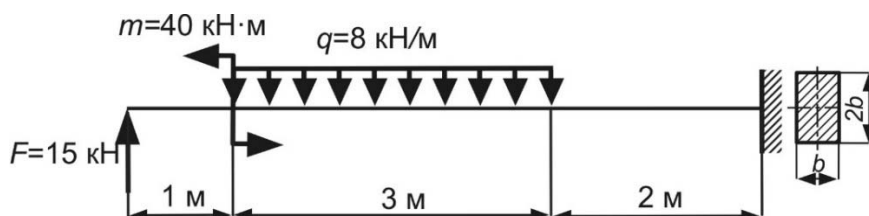


Рисунок 4.3

Решение

Построение эпюр в консольной балке можно выполнять без расчета реакций в заделке. Разбиваем балку на три участка, как показано на рисунке 4.4.

Используя метод сечений, для каждого из участков записываем выражения для определения поперечной силы Q и изгибающего момента M . Расчет значений поперечных сил и изгибающих моментов выполняем для характерных сечений балки.

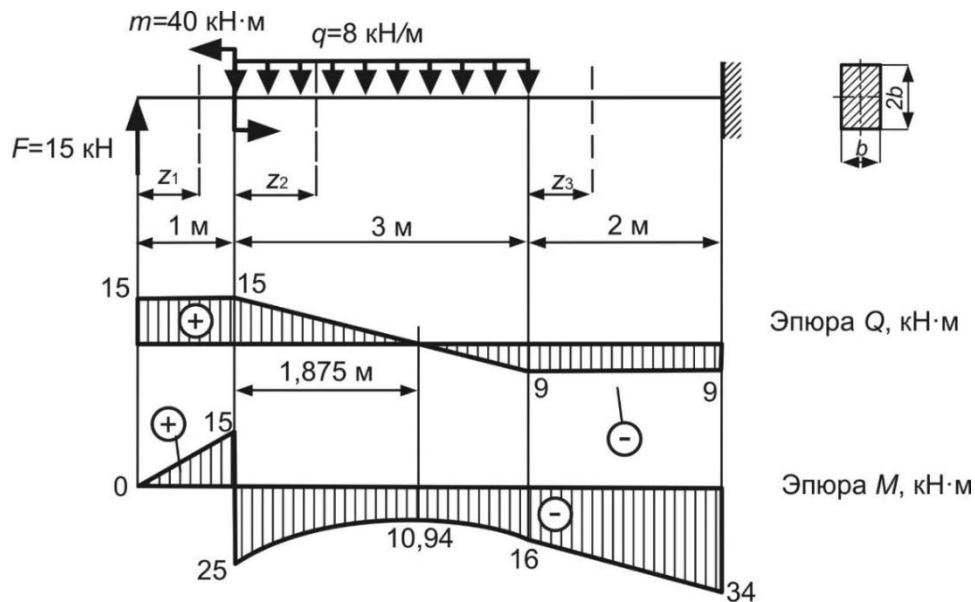


Рисунок 4.4

Участок 1: $0 \leq z_1 \leq 1$ м.

$$Q_1 = 15 \text{ кН}; M_1 = 15 \cdot z_1;$$

$$z_1 = 0; M_1 = 0;$$

$$z_1 = 1 \text{ м}; M_1 = 15 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок 2: $0 \leq z_2 \leq 3$ м.

$$Q_2 = 15 - 8 \cdot z_2; M_2 = 15 \cdot (2 + z_2) - 8 \cdot \frac{z_2^2}{2} - 40;$$

$$z_2 = 0; Q_2 = 15 \text{ кН}; M_2 = -25 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$z_2 = 3 \text{ м}; Q_2 = -9 \text{ кН}; M_2 = -16 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Экстремум: $Q_2 = 15 - 8 \cdot z_2 = 0; z_2 = \frac{15}{8} = 1,875$ м; $M_2 = -10,94$ кНм.

Участок 3: $0 \leq z_3 \leq 2$ м.

$$Q_3 = 15 - 8 \cdot 3 = -9 \text{ кН}; M_3 = 15 \cdot (4 + z_3) - 40 - 8 \cdot 3 \cdot (1,5 + z_3);$$

$$z_3 = 0; M_3 = -16 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$z_3 = 2 \text{ м}; M_3 = -34 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По полученным результатам строим эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M (см. рисунок 4.4).

Из эпюры изгибающих моментов определим опасное сечение, в котором $|M_{\max}| = 34 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (см. рисунок 4.4).

Определим расчетный момент сопротивления заданного сечения из условия прочности при изгибе:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{34 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,2125 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

С другой стороны, в соответствии с таблицей А.1,

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{2}{3} \cdot b^3 = 0,2125 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Тогда ширина сечения

$$b = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0,2125 \cdot 10^{-3}}{2}} = 0,068 \text{ м} = 68 \text{ мм}.$$

Высота сечения

$$h = 2 \cdot b = 2 \cdot 68 = 136 \text{ мм}.$$

Пример 3 – Определить допустимую нагрузку на балку, представленную на рисунке 4.5. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

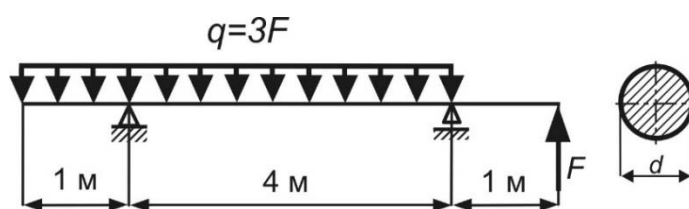


Рисунок 4.5

Решение

Определим опорные реакции заданной балки (рисунок 4.6):

$$\sum M_A = 0; R_B \cdot 3 - F \cdot 4 - 3F \cdot 4 \cdot 1 = 0; R_B = 5,33F;$$

$$\sum M_B = 0; -R_A \cdot 3 + 3F \cdot 4 \cdot 2 - F \cdot 1 = 0; R_A = 7,67F.$$

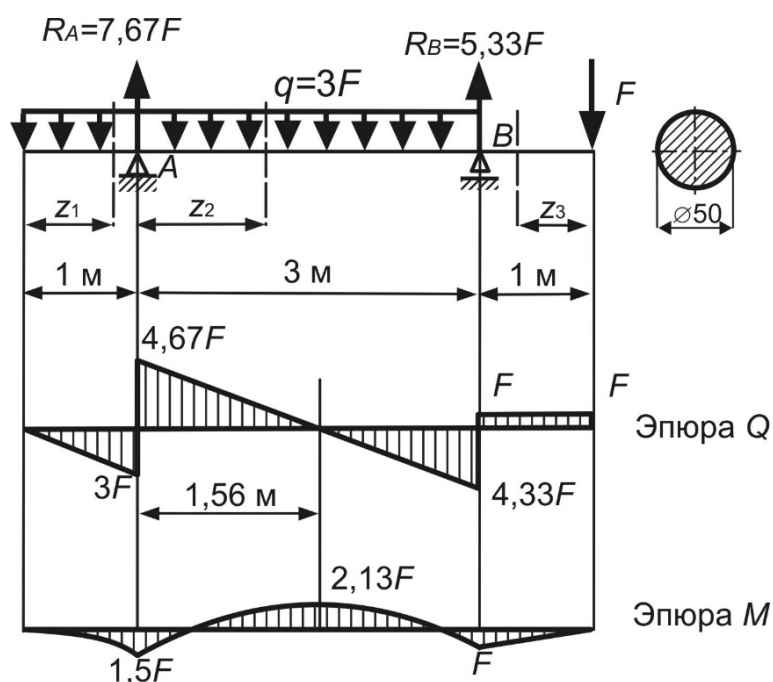


Рисунок 4.6

Проверка правильности расчета реакций из условия:

$$\sum Y = 0; -3F \cdot 4 + 7,67F + 5,33F - F = 0.$$

Разбиваем балку на три участка, как показано на рисунке 4.6.

Используя метод сечений, для каждого из участков записываем выражения для определения поперечной силы Q и изгибающего момента M .

Участок 1: $0 \leq z_1 \leq 1$ м.

$$Q_1 = -3F \text{ кН}; M_1 = -3F \cdot \frac{z_1^2}{2};$$

$$z_1 = 0; Q_1 = 0; M_1 = 0;$$

$$z_1 = 1 \text{ м}; Q_1 = -3F; M_1 = -1,5F.$$

Участок 2: $0 \leq z_2 \leq 3$ м.

$$Q_2 = 7,67 - 3F \cdot (1 + z_2); M_2 = 7,67 \cdot z_2 - 3F \cdot \frac{(1 + z_2)^2}{2};$$

$$z_2 = 0; Q_2 = 4,67F; M_2 = -1,5F \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z_2 = 3 \text{ м}; Q_2 = F \text{ кН}; M_2 = -F \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Экстремум: $Q_2 = 7,67 - 3F \cdot (1 + z_2) = 0; z_2 = 1,56 \text{ м}; M_2 = 2,13F.$

Участок 3: $0 \leq z_3 \leq 1$ м.

$$Q_3 = F \text{ кН}; M_3 = F \cdot z_3;$$

$$z_3 = 0; M_3 = 0; z_3 = 1 \text{ м}; M_3 = -F \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Из эпюры изгибающих моментов определим опасное сечение, в котором $M_{\max} = 2,13F$ (см. рисунок 4.6).

Осей момент сопротивления круглого поперечного сечения, в соответствии с таблицей А.1,

$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 5^3}{6} = 12,26 \text{ см}^3.$$

Условие прочности в данном случае

$$\sigma_{\max} = \frac{2,13F}{12,56 \cdot 10^{-6}} \leq [\sigma] = 160 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Допускаемая нагрузка из условия прочности при изгибе

$$[F] \leq \frac{12,56 \cdot 10^{-6} \cdot 160 \cdot 10^6}{2,13} = 943,5 \text{ Н}.$$

Пример 4 (для самостоятельного решения) – Проверить прочность балки (рисунок 4.7). Допускаемое напряжение $[\sigma] = 160$ МПа.

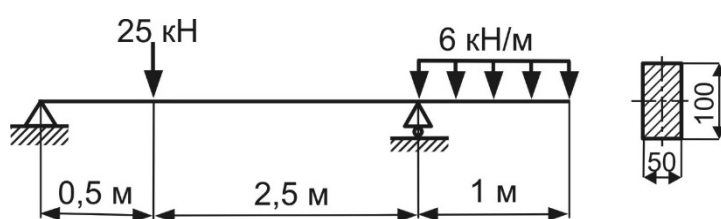


Рисунок 4.7

Пример 5 (для самостоятельного решения) – Определить диаметр балки (рисунок 4.8) при $[\sigma] = 180$ МПа.

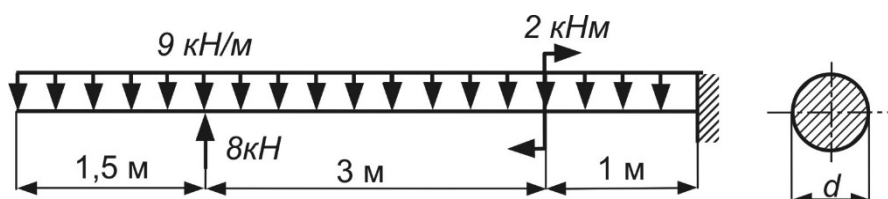


Рисунок 4.8

Контрольные вопросы

- 1 Какой вид деформаций называется изгибом?
- 2 В каком случае имеет место прямой изгиб?
- 3 Какие внутренние силовые факторы возникают при чистом изгибе?
- 4 Какие внутренние силовые факторы возникают при поперечном изгибе?
- 5 Запишите правило знаков для определения поперечной силы.
- 6 Запишите правило знаков для определения изгибающего момента.
- 7 Что представляют собой нейтральный слой и нейтральная ось (линия)?
- 8 Как расположены нейтральная ось и нейтральная линия?
- 9 Какие напряжения возникают при чистом изгибе?
- 10 Какие напряжения возникают при поперечном изгибе?
- 11 Какая формула используется для определения нормальных напряжений при изгибе?
- 12 В каких точках по высоте поперечного сечения возникают наибольшие нормальные напряжения?
- 13 По какому закону изменяются нормальные напряжения по высоте поперечного сечения?
- 14 Как определяют знак нормальных напряжений при изгибе? Зависит ли знак нормального напряжения от знака координаты рассматриваемой точки?
- 15 Запишите условие прочности по нормальным напряжениям.
- 16 Как выбирается опасное сечение для проверки прочности по нормальным напряжениям?
- 17 Сформулируйте задачи, решаемые с использованием условия прочности по нормальным напряжениям.
- 18 Какая формула используется при определении касательных напряжений при поперечном изгибе?
- 19 В каких точках по высоте сечения возникают наибольшие касательные напряжения?

5 Расчет линейных и угловых перемещений при прямом поперечном изгибе

Пример 1 – Определить прогиб сечения D стальной балки (рисунок 5.1).

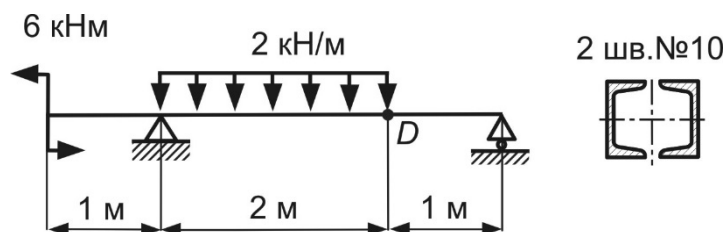


Рисунок 5.1

Решение

Определим опорные реакции заданной балки (рисунок 5.2):

$$\sum M_A = 0; -R_B \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 1 + 6 = 0; R_B = 0,67 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; -R_A \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 6 = 0; R_A = 4,67 \text{ кН}.$$

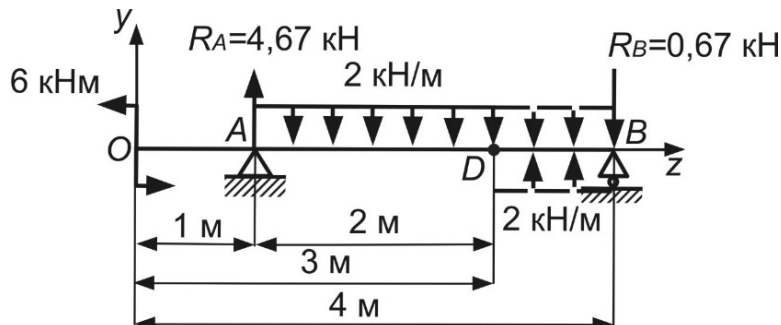


Рисунок 5.2

Проверка правильности расчета реакций из условия:

$$\sum Y = 0; 4,67 - 4 - 0,67 = 0.$$

Разместим начало координат осей zy в крайнее левое сечение рассматриваемой балки. Заданную распределенную нагрузку продлеваем до правой опоры и прикладываем компенсирующую нагрузку (см. рисунок 5.2).

Уравнение прогибов по методу начальных параметров для заданной балки

$$y_z = y_0 + \Theta_0 \cdot z + \frac{1}{EI_x} \left(-6 \cdot \frac{(z-0)^2}{2} + 4,67 \cdot \frac{(z-1)^3}{6} - 2 \cdot \frac{(z-1)^4}{24} + 2 \cdot \frac{(z-3)^4}{24} \right).$$

Модуль продольной упругости стальной балки из таблицы Б.1
 $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$.

Для швеллера № 10 из таблиц ГОСТ 8240–97 осевой момент инерции
 $I_X^{III6} = 174 \text{ см}^4$.

Осевой момент инерции сечения, состоящего из двух швеллеров,

$$I_X = 2 \cdot I_X^{III6} = 2 \cdot 174 = 348 \text{ см}^4.$$

В данном случае начало координат находится на консоли. Следовательно, определению подлежат оба начальных параметра. Их величины рассчитаем из условий закрепления балки. Для этого составим уравнения метода начальных параметров для опорных сечений:

$$z = 1 \text{ м}; y_A = y_O + \Theta_O \cdot 1 + \frac{10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 348 \cdot 10^{-8}} \cdot \left(-6 \cdot \frac{(z-0)^2}{2} \right) = 0;$$

$$z = 4 \text{ м}; y_B = y_O + \Theta_O \cdot 4 + \frac{10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 348 \cdot 10^{-8}} \times$$

$$\times \left(-6 \cdot \frac{(4-0)^2}{2} + 4,67 \cdot \frac{(4-1)^3}{6} + 2 \cdot \frac{(4-1)^4}{24} + 2 \cdot \frac{(4-3)^4}{24} \right) = 0.$$

Путем совместного решения уравнений определим начальный прогиб
 $y_O = -0,0104 \text{ м}$ и начальный угол поворота $EI\Theta_O = 0,015 \text{ рад}$.

Прогиб в сечении D

$$z = 3 \text{ м};$$

$$y_D = -0,0104 + 0,015 \cdot 3 + \frac{10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 348 \cdot 10^{-8}} \times$$

$$\times \left(-6 \cdot \frac{3^2}{2} + 4,67 \cdot \frac{(3-1)^3}{6} - 2 \cdot \frac{(4-1)^4}{24} \right) = 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,9 \text{ мм}.$$

Пример 2 – Определить прогиб сечения C стальной балки (рисунок 5.3).

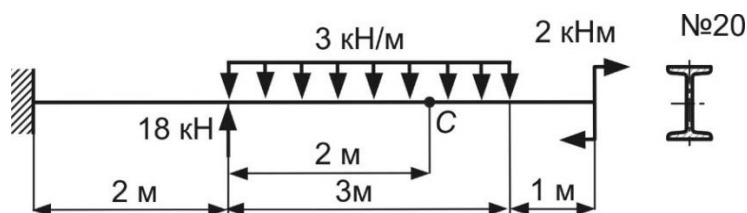


Рисунок 5.3

Решение

Определим опорные реакции в заделке:

$$\sum Y = 0; -R_o + 18 - 3 \cdot 3 = 0; R_o = 9 \text{ кН};$$

$$\sum M_o = 18 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 3,5 - 2 - M_o = 0; M_o = 2,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

В начале балки (рисунок 5.4) находится заделка, поэтому начальный прогиб и начальный угол поворота [1-4] $y_o = 0; \Theta_o = 0$.

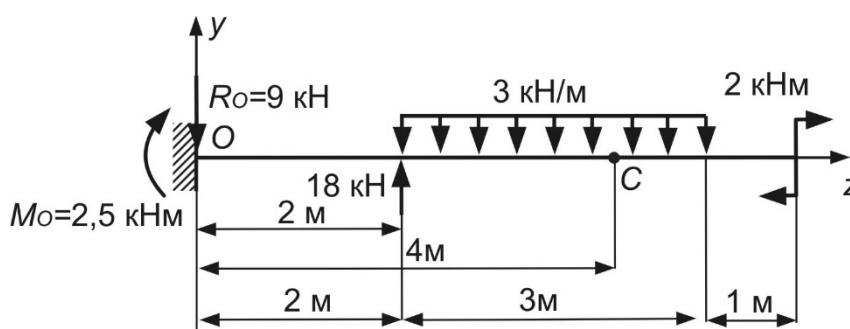


Рисунок 5.4

Модуль продольной упругости стальной балки из таблицы Б.1 $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$.

Для заданного двутавра из таблиц ГОСТ 8239–89 осевой момент инерции $I_x = 1840 \text{ см}^4$.

Уравнение прогиба в точке C по методу начальных параметров

$$y_z = y_o + \Theta_o \cdot z + \frac{1}{EI_x} \left(2,5 \cdot \frac{(z-0)^2}{2} - 9 \cdot \frac{(z-0)^3}{6} + 18 \cdot \frac{(z-2)^2}{6} - 3 \cdot \frac{(z-2)^4}{24} \right);$$

$$z = 4 \text{ м}; y_c = \frac{10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} \times$$

$$\times \left(2,5 \cdot \frac{4^2}{2} - 9 \cdot \frac{4^3}{6} + 18 \cdot \frac{(4-2)^2}{6} - 3 \cdot \frac{(4-2)^4}{24} \right) = -0,015 \text{ м} = -15 \text{ мм}.$$

Пример 3 (для самостоятельного решения) – Для стальных балок, изображенных на рисунке 5.5, определить прогиб в точке *C*.

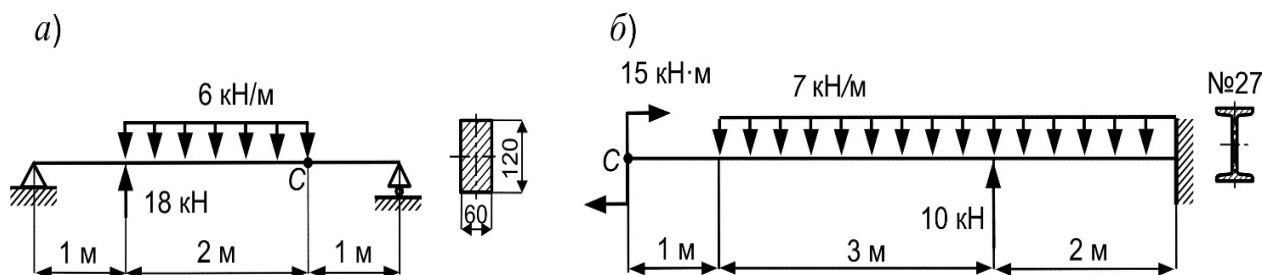


Рисунок 5.5

Контрольные вопросы

- 1 Что представляет собой упругая линия балки?
- 2 Какие перемещения возникают при изгибе балки?
- 3 Что такое прогиб?
- 4 Как определяется кривизна балки при изгибе?
- 5 Запишите дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.
- 6 Как определяется жесткость при изгибе?
- 7 Можно ли использовать метод начальных параметров при определении деформаций для балок переменной жесткости?
- 8 Как необходимо расположить начало координат произвольных осей при расчете перемещений по методу начальных параметров?
- 9 Запишите уравнение метода начальных параметров для определения прогиба в произвольном сечении.
- 10 Запишите уравнение метода начальных параметров для определения угла поворота в произвольном сечении.
- 11 Какие внешние нагрузки включают в уравнения при расчете перемещений по методу начальных параметров?
- 12 Что такое начальные параметры?
- 13 Чему равны начальный прогиб и начальный угол поворота, если на левом конце балки расположена заделка?
- 14 Чему будет равен начальный прогиб, если левый конец балки шарнирно закреплен? Как в этом случае определить начальный угол поворота?
- 15 Сформулируйте условие жесткости при изгибе.

6 Определение главных напряжений и расчеты по теориям прочности. Расчеты на прочность и жесткость при кручении прямолинейного бруса круглого поперечного сечения

Пример 1 – В опасной точке нагруженной детали напряженное состояние оказалось таким, как показано на рисунке 6.1. Определить величину и направление главных площадок.

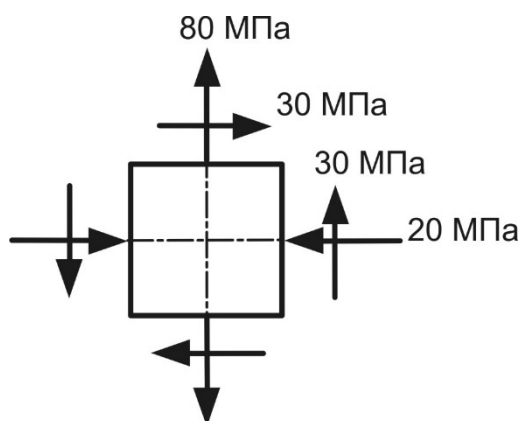


Рисунок 6.1

Решение

Действующие напряжения (рисунок 6.2) [4]

$$\sigma_x = -20 \text{ МПа}; \sigma_y = 80 \text{ МПа}; \tau_{xy} = 30 \text{ МПа}.$$

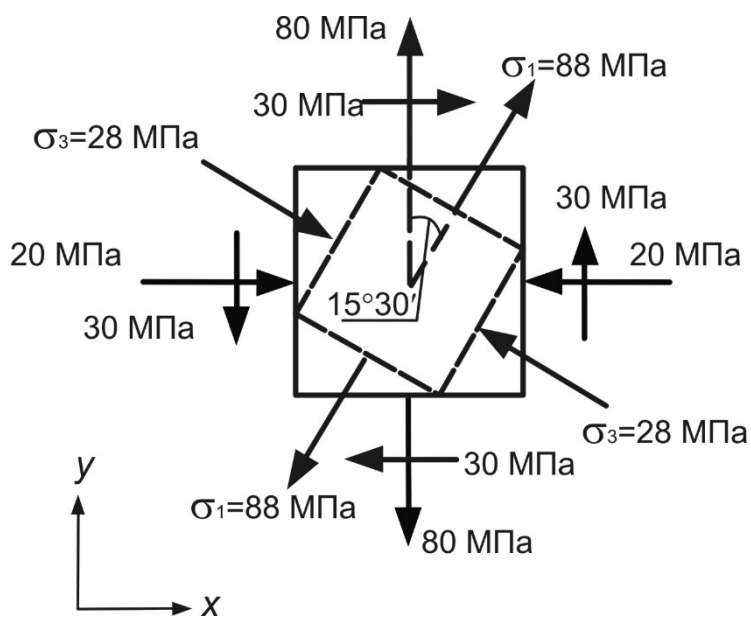


Рисунок 6.2

Главные напряжения [4]

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} = \frac{-20 + 80}{2} \pm \sqrt{(-20 - 80)^2 + 4 \cdot 30^2} = 30 \pm 58.$$

Главные напряжения распределяются в следующей зависимости [4]:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 .$$

Следовательно, $\sigma_1 = 88$ МПа; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -28$ МПа.

Положение главных площадок определяется углом поворота:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 30}{-20 - 80} = -0,6; \quad 2\alpha_0 = -31^\circ; \quad \alpha_0 = -15^\circ 30'.$$

Положение главных площадок и направление главных напряжений показано на рисунке 6.2.

Пример 2 – В опасной точке нагруженной детали напряженное состояние оказалось таким, как показано на рисунке 6.3. Проверить прочность по третьей теории прочности, если $[\sigma] = 160$ МПа.

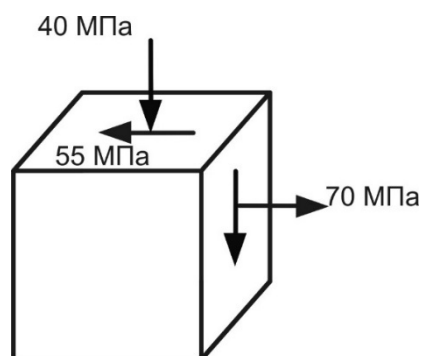


Рисунок 6.3

Решение

Действующие напряжения (рисунок 6.4) [4]

$$\sigma_x = 70 \text{ МПа}; \quad \sigma_y = -40 \text{ МПа}; \quad \tau_{xy} = -55 \text{ МПа}.$$

Главные напряжения [4]

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} = \frac{70 - 40}{2} \pm \sqrt{(70 + 40)^2 + 4 \cdot (-55)^2} = 15 \pm 78.$$

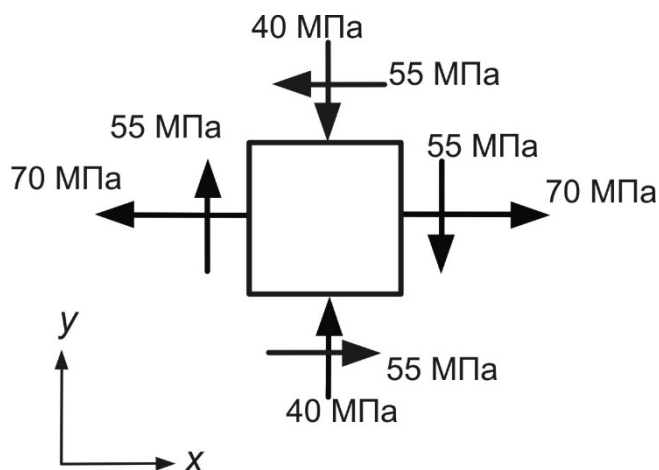


Рисунок 6.4

Главные напряжения распределяются в следующей зависимости [4]:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$

Следовательно, $\sigma_1 = 93$ МПа; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -63$ МПа.

Условие прочности по третьей теории прочности [4]

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]; \quad \sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = 93 - (-63) = 156 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Прочность обеспечена.

Пример 3 – Проверить прочность вала (рисунок 6.5), если $[\tau] = 60$ МПа.

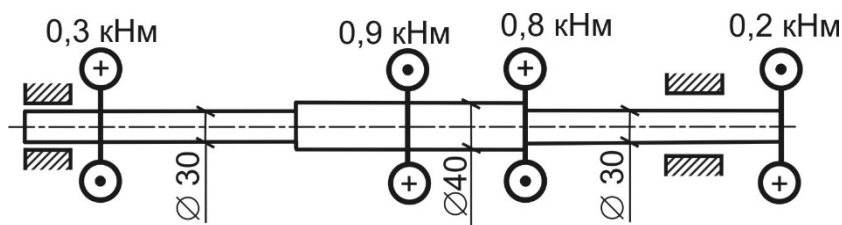


Рисунок 6.5

Решение

Разбиваем вал на участки (рисунок 6.6) и строим эпюру крутящих моментов M_k :

$$M_{k_1} = 0; \quad M_{k_2} = -0,3 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{k_3} = -0,3 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{k_4} = -0,3 + 0,9 = 0,6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{k_5} = -0,3 + 0,9 - 0,8 = -0,2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Полярные моменты сопротивления круглого сечения, в соответствии с таблицей А.1,

$$W_P^1 = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 3^3}{16} = 5,29 \text{ см}^3;$$

$$W_P^2 = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 4^3}{16} = 12,56 \text{ см}^3.$$

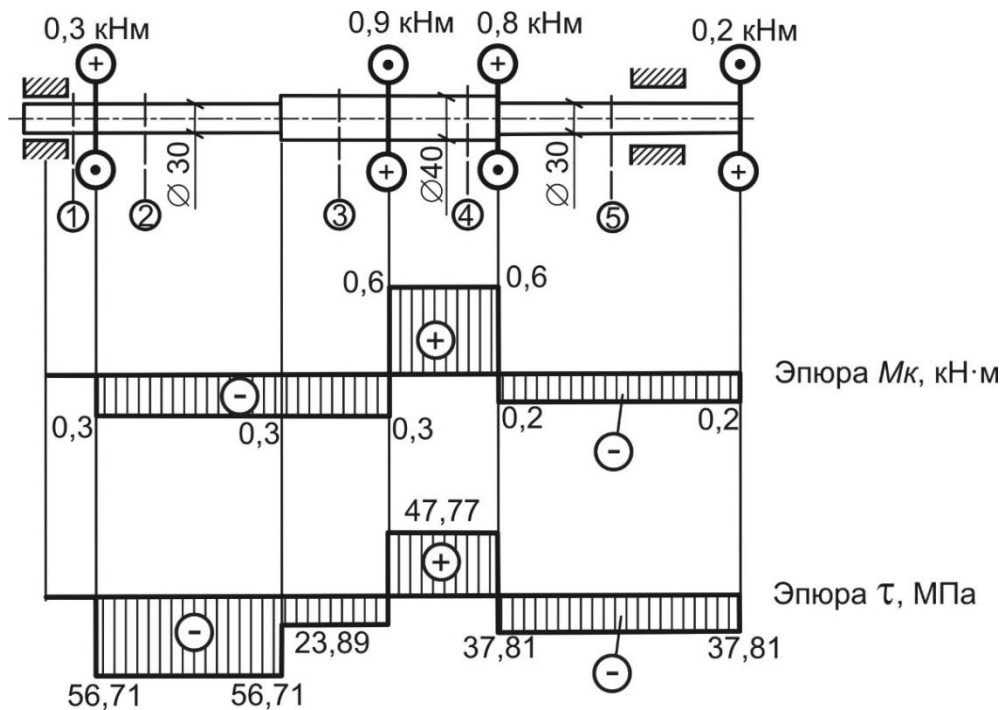


Рисунок 6.6

Касательные напряжения по участкам вала:

$$\tau_1 = 0;$$

$$\tau_2 = -\frac{0,3 \cdot 10^3}{5,29 \cdot 10^{-6}} = -56,71 \text{ МПа};$$

$$\tau_3 = -\frac{0,3 \cdot 10^3}{12,56 \cdot 10^{-6}} = -23,89 \text{ МПа};$$

$$\tau_4 = \frac{0,6 \cdot 10^3}{12,56 \cdot 10^{-6}} = 47,77 \text{ МПа};$$

$$\tau_5 = -\frac{0,2 \cdot 10^3}{5,29 \cdot 10^{-6}} = -37,81 \text{ МПа}.$$

Построим эпюру касательных напряжений (см. рисунок 6.6). Из эпюры видно, что наиболее нагружен второй участок, на котором возникают большие по величине напряжения. Для этого участка выполняем проверку прочности.

Условие прочности при кручении

$$\tau_{\max} \leq [\tau]; \tau_{\max} = 56,71 \text{ МПа} \leq [\tau] = 60 \text{ МПа.}$$

Условие выполнено, прочность обеспечена.

Пример 4 – Определить диаметр вала (рисунок 6.7), если $[\tau] = 80 \text{ МПа}$.

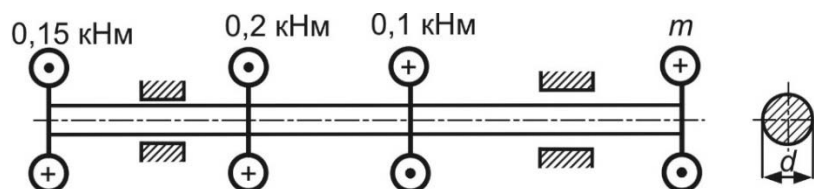


Рисунок 6.7

Решение

Определим величину внешнего момента (рисунок 6.8) из условия равновесия вала [1–4]:

$$\sum m = 0; -0,15 - 0,2 + 0,1 + m = 0; m = 0,25 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

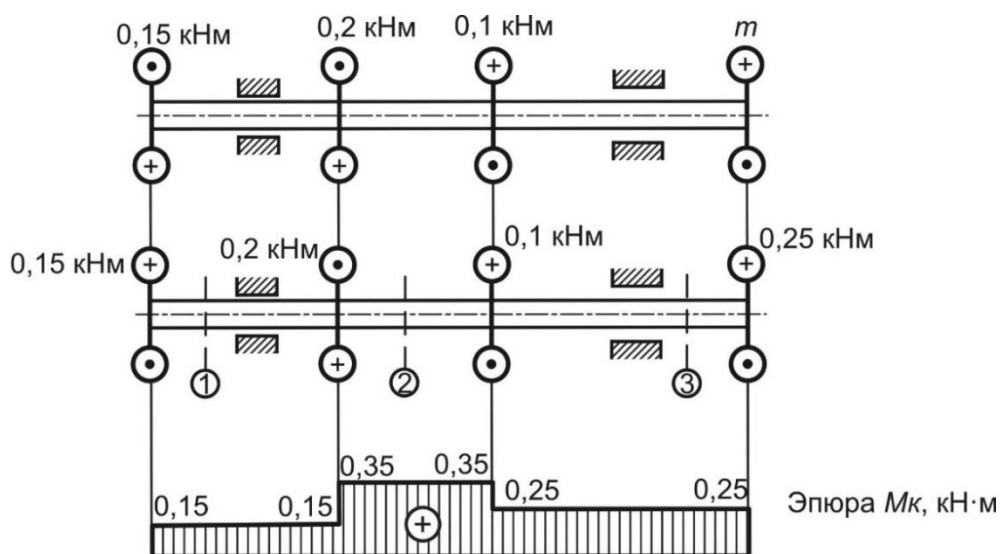


Рисунок 6.8

Составим расчетную схему и в соответствии с ней построим эпюру крутящих моментов M_k (см. рисунок 6.8).

Для вала постоянной жесткости опасным будет участок, на котором возникает наибольший крутящий момент: $M_{k_{\max}} = 0,35 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Условие прочности

$$\tau_{\max} = \frac{M_{k_{\max}}}{W_p} = \frac{16 \cdot M_{k_{\max}}}{\pi \cdot d^3} \leq [\tau].$$

Расчетное значение диаметра вала

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{k_{\max}}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,35 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,0281 \text{ м} = 28,1 \text{ мм.}$$

Пример 5 (для самостоятельного решения) – Построить эпюру абсолютных углов закручивания заданного вала (рисунок 6.9).

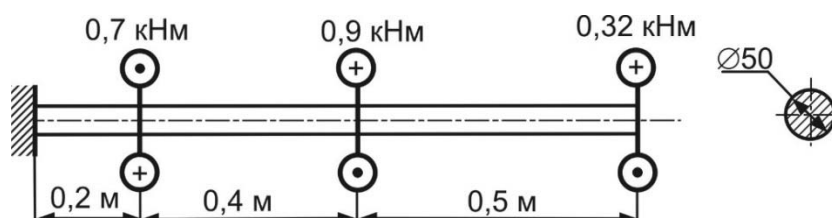


Рисунок 6.9

Пример 6 (для самостоятельного решения) – Определить допускаемую нагрузку на вал, изображенный на рисунке 6.10, если $[\tau] = 70 \text{ МПа}$.

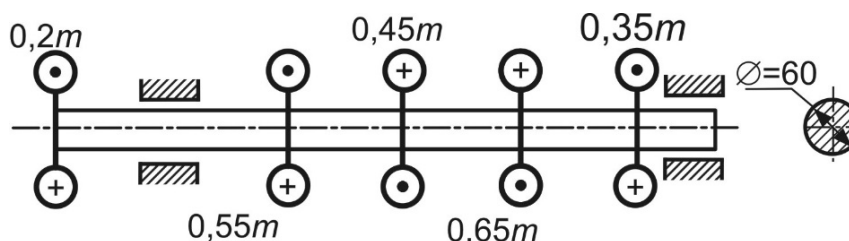


Рисунок 6.10

Пример 7 (для самостоятельного решения) – В опасной точке нагруженной детали напряженное состояние оказалось таким, как показано на рисунке 6.11. Проверить прочность по теории прочности Мора, если $\sigma_B^{CЖ} = 480 \text{ МПа}$, $\sigma_B^P = 270 \text{ МПа}$.

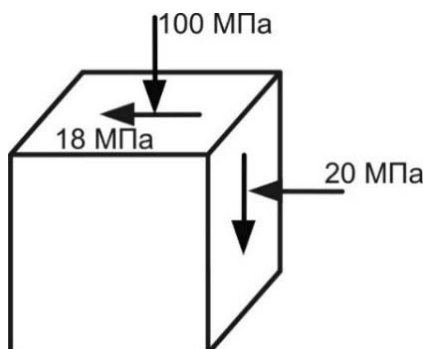


Рисунок 6.11

Пример 8 (для самостоятельного решения) – В опасных точках нагруженных деталей напряженное состояние оказалось таким, как показано на рисунке 6.12. Определить величину и направление главных площадок.



Рисунок 6.12

Контрольные вопросы

- 1 Дайте определение напряженно-деформированному состоянию.
- 2 Какие напряжения называют главными?
- 3 Какие площадки называют главными?
- 4 Перечислите виды напряженного состояния.
- 5 Что такое эквивалентное напряжение?
- 6 Перечислите гипотезы прочности.
- 7 Какие из теорий прочности применимы для оценки прочности стальных образцов?
- 8 Назовите пределы применимости теории прочности Мора.
- 9 Какой вид нагружения называют кручением?
- 10 Какие внутренние силовые факторы и напряжения возникают при кручении?
- 11 Запишите формулу для определения касательных напряжений при кручении.
- 12 Сформулируйте условие прочности при кручении.
- 13 Как определить абсолютный угол закручивания при кручении?
- 14 Что такое модуль сдвига?
- 15 Запишите закон Гука при сдвиге.

Список литературы

1 **Волосухин, В. А.** Сопротивление материалов: учебник / В. А. Волосухин, В. Б. Логвинов, С. И. Евтушенко. – 5-е изд. – Москва: РИОР; ИНФРА-М, 2014. – 543 с.

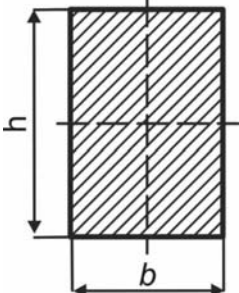
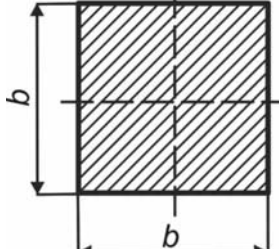
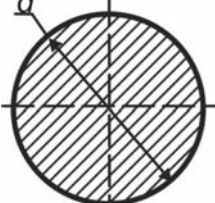
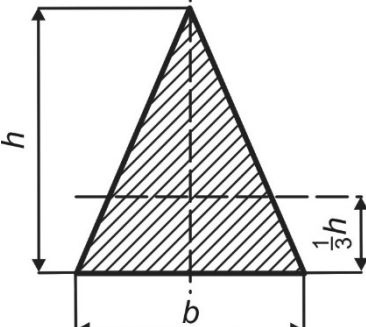
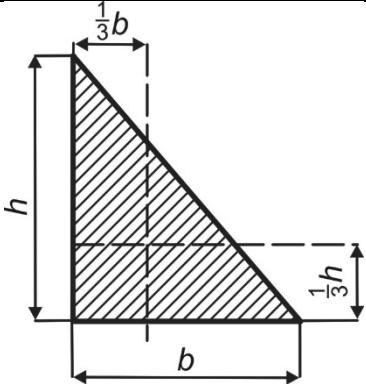
2 **Муморцев, А. Н.** Сборник задач по сопротивлению материалов : учебное пособие / А. Н. Муморцев, Е. А. Фролов. – Москва: ФОРУМ; ИНФРА-М, 2015. – 112 с. : ил.

3 **Кривошапко, С. Н.** Сопротивление материалов: учебник и практикум для прикладного бакалавриата / С. Н. Кривошапко. – Москва: Юрайт, 2016. – 413 с.

4 Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учебник / Г. С. Варданян [и др.]; под ред. Г. С. Варданяна, Н. М. Атарова. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: ИНФРА-М, 2011. – 638 с.

Приложение А (справочное)

Таблица А.1 – Геометрические характеристики некоторых сечений

Сечение	Площадь сечения	Осевой момент инерции I_x, I_y	Момент сопротивления W_x, W_y
	$b \cdot h$	$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$ $I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}$	$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}$ $W_y = \frac{h \cdot b^2}{6}$
	b^2	$I_x = I_y = \frac{b^4}{12}$	$W_x = W_y = \frac{b^3}{6}$
	$\frac{\pi \cdot d^2}{4}$	$I_x = I_y = \frac{\pi \cdot d^4}{64};$ $I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$	$W_x = W_y = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$ $W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$
	$\frac{b \cdot h}{2}$	$I_x = \frac{b \cdot h^3}{36};$ $I_y = \frac{h \cdot b^3}{48}$	$W_{XB} = \frac{b \cdot h^2}{24};$ $W_{XH} = \frac{b \cdot h^2}{12};$ $W_y = \frac{b \cdot h^2}{24}$
	$\frac{b \cdot h}{2}$	$I_x = \frac{b \cdot h^3}{36};$ $I_y = \frac{h \cdot b^3}{36}$	$W_{XB} = \frac{b \cdot h^2}{24};$ $W_{XH} = \frac{b \cdot h^2}{12};$ $W_{VP} = \frac{b \cdot h^2}{24};$ $W_{yII} = \frac{b \cdot h^2}{12}$

Приложение Б (справочное)

Таблица Б.1 – Физико-механические свойства материалов

Материал	Модуль упругости, 10^5 МПа		Коэффициент Пуассона μ	Удельный вес γ , кН/м ³
	E	G		
1	2	3	4	5
Сталь углеродистая	1,96...2,06	0,785...0,794	0,24...0,28	78,6
Сталь легированная	2,06...2,16	0,785...0,794	0,25...0,30	78,5
Стальное литье	1,75	–	0,25...0,33	78,5
Чугун серый, белый	1,13...1,57	0,44	0,23...0,27	72
Чугун ковкий	1,52	–	–	72
Латунь холоднотянутая	0,9...1,0	0,35...0,37	0,32...0,42	85
Алюминий	0,59...0,69	0,26...0,37	0,32...0,36	27
Сплавы алюминиевые	0,70...0,72	0,27	0,32	–
Дюралюминий	0,71	0,27...0,37		28
Медь:				
прокатанная	1,1	0,4	0,3...0,34	
холоднотянутая	1,3	0,49		
литая	0,84			
Бронза:				
катаная	1,15	0,42	0,32...0,35	
литая	1,05	0,42		
Гранит	0,49			25...28
Мрамор	0,56			25...28
Кирпичная кладка	0,027...0,03			
Бетон:				
тяжёлый	0,17...0,40		0,16...0,18	20
на пористых заполнителях	0,03...0,23		0,16...0,18	
ячеистый	0,01...0,10		0,16...0,18	
При пределе прочности, МПа				
10	0,146...0,196		0,16...0,18	
15	0,164...0,214		0,16...0,18	
20	0,182...0,232		0,16...0,18	
Древесина (сосна, ель):				
вдоль волокон	0,01...0,12	0,055		5,5
поперёк волокон	0,005...0,01			5,5
Стекло	0,56	0,22	0,25	

Окончание таблицы Б.1

1	2	3	4	5
Каучук	0,00008	–	0,47	9,1
Текстолит	0,06...0,1	–	–	13,5
Оргстекло	0,03...0,04	–	0,35...0,38	11,8
Капрон	0,014...0,02	–	–	11,4
Фторопласт-4	0,0047...0,0085	–	–	21...23
Стеклопласты	0,18...0,35	–	–	14...19

Приложение В (рекомендуемое)

Таблица В.1 – Обозначения и числовые значения кратных и дольных величин

Приставка	Числовое значение	Сокращенное обозначение	Пример кратных и дольных единиц	
			Наименование	Сокращенное обозначение
Мега	10^6	М	Меганьютон	МН
Кило	10^3	к	Киловатт	кВт
Санتي	10^{-2}	с	Сантиметр	см
Милли	10^{-3}	м	Миллиметр	мм
Микро	10^{-6}	мк	Микрометр	мкм