Студенческий Вестник Электронный научно-технический журнал Октябрь 2005 года

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ[1]

Д.С. Червяков, **К.В. Овсянников**

Данная статья представляет результаты исследования устойчивости систем с распределенными параметрами различными методами.

Ключевые слова: распределенные параметры, аппроксимация, устойчивость

1. Введение

Системой с распределенными параметрами или системой с РП можно считать любую систему, имеющую в своей структуре протяженный упругий элемент, который нельзя адекватно представить в виде нескольких масс, соединенных невесомыми упругими связями. С развитием теорий управления и электропривода такие системы представляли как [1]:

1) Одномассовые системы.
2) Двухмассовые системы с жесткой связью.
3) Многомассовые системы.

Однако все эти модели не могли адекватно описать процессы, возникающие в упругом элементе, например, продольные колебания. Только в относительно недавний промежуток времени такие системы стали рассматривать именно как системы с РП.

Цель данной работы – исследование систем с РП и построение адекватных моделей, позволяющих с достаточной надежностью рассчитать процессы, возникающие в основной части системы – упругом элементе.

2. Основная часть

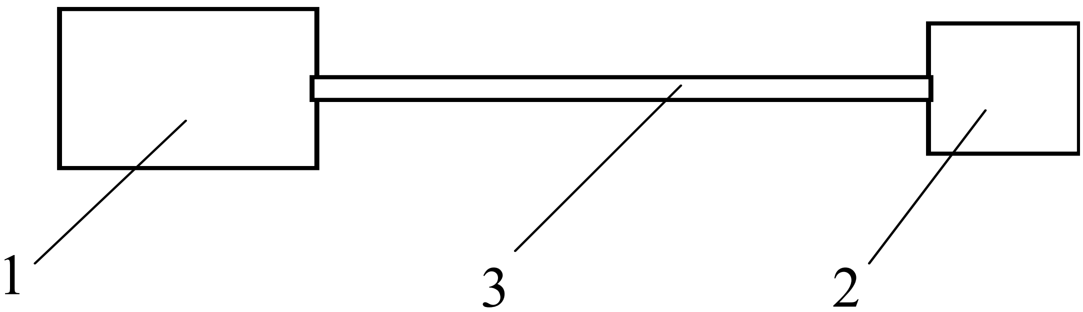
В качестве системы с РП будем рассматривать линейный объект с распределенными параметрами [2], который можно представить в виде некоторого стержня, нагруженного с двух концов массами. В общем случае любую систему с РП можно привести к этому виду. В этом случае расчетная схема механической части будет представлена в виде двух приведенных сосредоточенных масс: массы m_1 и массы m_2, соединенных между собой упругим механическим элементом с распределенными параметрами.

Динамические процессы согласно расчетной схеме (см. *рисунок* 1) описываются следующими уравнениями:

[1] Работа выполнена кафедре «Электропривод и автоматизация промышленных установок»

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\,\Delta\mathrm{F(x,t)}}{\partial\,\mathrm{x}}+\rho\cdot\frac{\partial\,\Delta v(\mathrm{x,t})}{\partial\,\mathrm{t}}=0\\
&\frac{\partial\,\Delta v(\mathrm{x,t})}{\partial\,\mathrm{x}}+\frac{1}{\mathrm{E}\cdot\mathrm{s}}\cdot\frac{\partial\Delta\mathrm{F(x,t)}}{\partial\,\mathrm{t}}=0\\
&\mathrm{m}_1\frac{d\Delta v_{\hat{a}}}{d\,\mathrm{t}}=\Delta\mathrm{F}_{\ddot{a}}\,\mathrm{(t)}\text{-}\Delta\mathrm{F}_{\hat{a}}\,\mathrm{(t)}\\
&\mathrm{m}_2\frac{d\Delta v_{\acute{\imath}}}{d\,\mathrm{t}}=\Delta\mathrm{F}_{\acute{\imath}}\,\mathrm{(t)}
\end{aligned}\right\},\qquad (1)$$

где *ΔF(x,t)* — приращение усилия в сечении x упругого элемента;
ρ – масса единицы длины упругого элемента;
v(x,t) — скорость смещения сечения *x* упругого элемента;
E и *S* — модуль упругости и площадь поперечного сечения упругого элемента;
v_B и v_H – скорости смещения верхнего и нижнего концов упругого элемента;
$\Delta F_Д$ – приращение движущего усилия;
F_B и F_H — усилия в верхнем и нижнем сечениях упругого элемента.



1 – масса m1; 2 – масса m2; 3 – упругий элемент

Рис. 1. Расчетная схема механической части

Это уравнения в частных производных [3]. Поэтому введя базовые величины $a=\sqrt{\dfrac{\mathrm{E}\cdot\mathrm{s}}{\rho}}$ – скорость распространения волны упругой деформации по упругому элементу, $T_{Р.П} = l/a$ – время прохождения волны, l – длину упругого элемента, mΣ = m1 + m2 + ρl – суммарную приведенную массу, $F\Sigma = m\Sigma a/T_{Р.П}$ и приняв следующие обозначения φ = F/FΣ, μi = mi/mΣ,. ν = υ/a, $\tau = t/T_{Р.П}$, ξ=x/l, mk=ρl/mΣ, уравнения (1) в относительных единицах запишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\Delta\varphi(\xi,\tau)}{\partial\xi}+\mu_k\cdot\frac{\partial\Delta\upsilon(\xi,\tau)}{\partial\tau}=0\\
&\frac{\partial\Delta\upsilon(\xi,\tau)}{\partial\xi}+\frac{1}{\mu_k}\cdot\frac{\partial\Delta\varphi(\xi,\tau)}{\partial\tau}=0
\end{aligned}\right\}\qquad (2)$$

с граничными условиями:

$$\left.\begin{aligned}&\mu_1 \cdot \frac{\partial \Delta\upsilon(\xi,\tau)}{\partial\tau}\Big|_{\xi=0} = \Delta\varphi_{д}(\tau) - \Delta\varphi(0,\tau)\\&\mu_2 \cdot \frac{\partial \Delta\upsilon(\xi,\tau)}{\partial\tau}\Big|_{\xi=1} = \Delta\varphi(1,\tau)\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Последовательно применив к уравнениям (3) преобразование Лапласа по относительному времени τ и переменной ξ, а затем переходя из области изображений по переменной λ - оператор Лапласа по длине, к оригиналу по переменной ξ, получим:

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\upsilon(\xi,p) = A\cdot ch(p\cdot\xi) - \mu_k{}^{-1}\cdot B\cdot sh(p\cdot\xi)\\&\Delta\varphi(\xi,p) = B\cdot ch(p\cdot\xi) - \mu_k\cdot A\cdot sh(p\cdot\xi)\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Из граничных условий:

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\upsilon(\xi,p)\Big|_{\xi=0} = \Delta\upsilon(0,p)\\&\Delta\upsilon(\xi,p)\Big|_{\xi=1} = \frac{\Delta\varphi(1,p)}{\mu_2\cdot p}\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

определяем постоянные A и B:

$$A = \Delta\upsilon(0,p) \quad (6)$$

$$B = \mu_k \cdot \frac{p\cdot\mu_2\cdot ch(p) + \mu_k\cdot sh(p)}{p\cdot\mu_2\cdot sh(p) + \mu_k\cdot ch(p)}\cdot\Delta\upsilon(0,p) \quad (7)$$

Подставив вычисленные значения постоянных в выражение для $\Delta\upsilon(\xi,p)$ и $\Delta\varphi(\xi,p)$, получим уравнения для изображений скорости и усилия в любом сечении по длине упругого элемента в функции изображения скорости перемещения верхнего сечения упругого элемента.

С учетом граничных условий (5) получаем передаточные функции от изображения движущего усилия $\Delta\varphi Д(p)$ к скорости $\Delta\upsilon(\xi,p)$ и усилию $\Delta\varphi(\xi,p)$ в любом сечении упругого элемента.

Тогда передаточная функция движущего усилия к скорости перемещения для любого сечения упругого элемента выглядит так:

$$W(p) = \frac{\Delta\upsilon(\xi,p)}{\Delta\varphi_{д}(p)} = \frac{ch(p\cdot\xi) - K(p)\cdot sh(p\cdot\xi)}{\mu_1\cdot p + K(p)\cdot\mu_k}, \quad (8)$$

где $K(p) = \dfrac{p\cdot\mu_2\cdot ch(p) + \mu_k\cdot sh(p)}{p\cdot\mu_2\cdot sh(p) + \mu_k\cdot ch(p)}$.

Как видно из математической модели системы с распределенными параметрами, передаточная функция движущего усилия к скорости перемещения не представляется полиномом, а является трансцендентным выражением, в котором оператор Лапласа p стоит под знаком тригонометрических функций. В этом случае как числитель, так и знаменатель выражения представить в виде произведения простых n сомножителей невозможно, ибо корней не конечное множество, а бесконечное.

Следовательно алгебраические критерии исследования устойчивости систем с распределенными параметрами, в частности критерий Гурвица, применять нельзя. Рассмотрим частотные методы.

К частотным методам относят два метода:

1) Метод исследования устойчивости на основе критерия Михайлова
2) Метод исследования устойчивости на основе критерия Найквиста

Но критерий Михайлова опять же опирается на частотный полином [4], полученный из знаменателя функции, но мы его выделить не можем без аппроксимации модели. Остается только метод исследования устойчивости на основе критерия Найквиста.

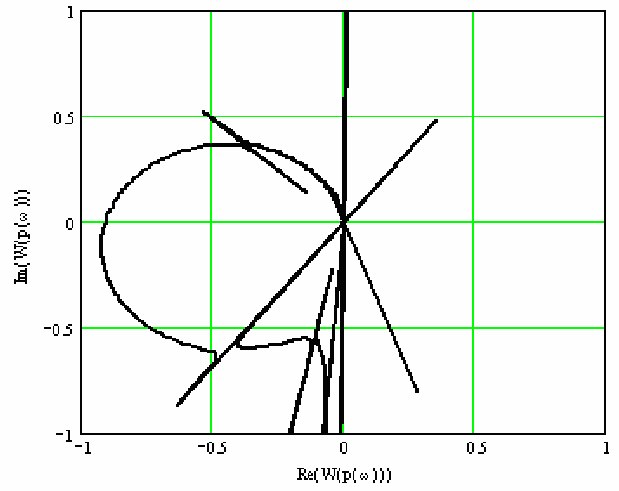


Рис. 2. Амплитудно-фазовая характеристика

В силу сложности вычислений воспользуемся для построения АФХ пакетом MathCad 2001 Pro [5]. В этом случае мы имеем возможность построить амплитудно-фазовую характеристику для какой-нибудь одной точки выхода [6]. Возьмем $\xi=0$, тогда получаем следующую характеристику (см. *рисунок* 2).

Как видно из рисунка 2, система является в этом случае устойчивой. Однако устойчива она только для точки выхода $\xi=0$. У нас ξ меняется от 0 до 1, принимая любые действительные значения, следовательно, мы должны провести исследование устойчивости одной и той же системы, но для бесконечного числа точек выхода. Принципиально это можно представить следующим образом: мы будем рассматривать не охват точки (-1;0) на комплексной плоскости кривой амплитудно-фазовой характеристики, а охват прямой ξ, перпендикулярной мнимой и действительной осям и проходящей через точку (-1;0) на вещественной оси. При этом прямую будет охватывать не кривая амплитудно-фазовой характеристики, а поверхность.

3. Заключение

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что для исследования устойчивости систем с распределенными параметрами необходимо использовать два метода: критерий Найквиста, либо аппроксимацию передаточной функции объекта одним из следующих способов [7]:

1) разложение на простейшие дроби;
2) разложение в цепные дроби;
3) разложение по бесконечным произведениям;
4) разложение по собственным функциям;
5) разложение с помощью рядов Тейлора.

В этом случае передаточную функцию можно исследовать на устойчивость любым из классических методов.

Литература

1. Киселев Н.В. Электроприводы с распределенными параметрами / Н.В. Киселев, В.Н. Мядель, Л.Н. Рассудов // Л. – Судостроение, 1985. – 220 с.
2. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления: особые линейные и нелинейные системы. – 2-е изд. перераб. – М.,Энергоиздат, 1981. – 304 с., ил.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов. Т.2.; Учеб. пособие для втузов, 13-е изд. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 560 с.
4. Аппроксимация трансцендентных передаточных функций использованием разложений в степенные ряды /Рассудов Л.Н., Прокопов А.А. // Вопр. теории и расчета эл-тов и систем автоматизир. ЭП. – Хабаровск. 1982., 30 - 32.
5. Плис А.И. Mathcad 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб. пособие / А.И. Плис, Н.А Сливина. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 656 с.
6. Дьяконов В.П. MATHCAD 8/2000: Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2000. – 592 с.
7. Червяков Д.С. Возможность получения аппроксимированных математических моделей электропривода грузо-подъемных установок // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии: Материалы междунар. науч.-техн. конф., Могилев, 22-23 апр. 2004г. В 2 ч. Ч. 1 – Могилев, Бел.-Рос. ун-т, 2005. – С. 300-301.

Червяков Дмитрий Сергеевич
Студент электротехнического факультета
Белорусско-Российский университет, г. Могилев
Тел.: +375(297) 44-22-39
Овсянников Константин Валерьевич
Ст. преподаватель кафедры «Электропривод и автоматизация промышленных установок»
Белорусско-Российский университет, г. Могилев
Тел.: +375(297) 41-32-12