*Электронный научно-технический журнал Октябрь 2006 года*
http://www.bru.mogilev.by

# РЕШЕНИЕ МАТРИЧНОГО УРАВНЕНИЯ ВИДА AX = XB[1]

*О.А. Капитонов*, **И.И. Маковецкий**

Аннотация. В данной работе приводится схема отыскания решения матричного уравнения с использованием средств пакета символьной математики MathCad. Дан алгоритм, приведены примеры работы алгоритма.

Ключевые слова: матричное уравнение, вычислительная схема

В теории и приложениях матричного исчисления зачастую требуется разрешить уравнение вида $\mathbf{AX} = \mathbf{XB}$, где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ - некоторые постоянные $(n \times n)$-матрицы, $\mathbf{X}$ - неизвестная матрица. Также на основе этой задачи решается задача об обращении линейного оператора вида $\mathbf{\Phi X} = \mathbf{AX} - \mathbf{XB}$, встречающаяся в приложениях дифференциальных уравнений и функционального анализа. Общие методики построения решений данного уравнения хорошо известны и изложены в литературе [1, 2], мы же поставили целью исследовать эту задачу для случая небольших размерностей матриц, входящих в уравнение и получить алгоритм построения его решения, используя возможности математического пакета символьной математики MathCad [3, 4].

Для случаев небольшой размерности матриц ($n = 2$, $n = 3$), представляющих практический интерес, можно провести анализ задачи в явном виде.

Для случая $n = 2$ введем обозначения:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}.$$

Несложными преобразованиями можно исходное матричное уравнение свести к однородной системе линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = b_{11}x_{11} + b_{21}x_{12}, \\ a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = b_{12}x_{11} + b_{22}x_{12}, \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = b_{11}x_{21} + b_{21}x_{22}, \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = b_{12}x_{21} + b_{22}x_{22}. \end{cases}$$

Эту систему можно записать в матричной форме $\mathbf{Q\tilde{X}} = 0$, где матрица $\mathbf{Q}$ имеем вид

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & -b_{21} & a_{12} & 0 \\ -b_{12} & a_{11} - b_{22} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} - b_{11} & -b_{21} \\ 0 & a_{21} & -b_{12} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix},$$

а матрица $\mathbf{\tilde{X}} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}^T$. Как известно, однородная система имеет ненулевое решение только в том случае, если определитель ее основной матрицы равен нулю. Представим матрицу $\mathbf{Q}$ в виде суммы матриц $\mathbf{\tilde{A}}$ и $\mathbf{\tilde{B}}$ следующего вида

$$\mathbf{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \ \mathbf{\tilde{B}} = -\begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & 0 & 0 \\ b_{12} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{21} \\ 0 & 0 & b_{12} & b_{22} \end{pmatrix},$$

---

[1] Работа выполнена в рамках выполнения задания по ГПФИ «Математические структуры»

или в виде блоковых матриц, у которых размер блока $(2\times 2)$:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} diag(a_{11}) & diag(a_{12}) \\ diag(a_{21}) & diag(a_{22}) \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{B}} = -\begin{pmatrix} \mathbf{B}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^T \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ соответственно будут иметь одинаковые характеристические числа с точностью до порядка кратности. Тогда определитель матрицы $\mathbf{Q}$ будет нулевым в случае, если матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$, а следовательно и матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ будут иметь общие характеристические числа.

Итак, исходное матричное уравнение имеет ненулевое решение только в случае равенства характеристических чисел матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

Используя аналогичные рассуждения этот результат можно обобщить и для случая матриц больших размерностей. Например, для матриц $\mathbf{A},\mathbf{B}$ размерности $(3\times 3)$ матрица $\mathbf{Q}$ может быть представлена в виде суммы блоковых матриц с размерами блока $(3\times 3)$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} diag(a_{11}) & diag(a_{12}) & diag(a_{13}) \\ diag(a_{21}) & diag(a_{22}) & diag(a_{23}) \\ diag(a_{31}) & diag(a_{32}) & diag(a_{33}) \end{pmatrix},$$

где $a_{ij}$ - элементы матрицы $\mathbf{A}$ и

$$\tilde{\mathbf{B}} = -\begin{pmatrix} \mathbf{B}^T & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}^T & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}^T \end{pmatrix}.$$

Теперь сформулируем алгоритм, пригодный для отыскания решения данной задачи:

1) находим собственные значения матриц $\mathbf{A}$ $(\lambda_i)$ и $\mathbf{B}$ $(\mu_j)$;

2) в случае, если среди найденных чисел нет совпадений, прекращаем работу, даем ответ – уравнение имеет только тривиальное решение;

3) в противном случае сводим исходную задачу к однородной системе линейных уравнений, т.е. записываем матрицу $\mathbf{Q}$;

4) любым из известных методов отыскиваем общее решение однородной системы, например, используя связку Given – Find в среде MathCad;

5) полученное решение однородной системы преобразуем к виду решения исходной задачи.

Приведем теперь пример, иллюстрирующий приведенный алгоритм. Решим матричное уравнение вида

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

При помощи функции *eigenvals* определяем собственные значения матриц. Получаем, что

$$eigenvals\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ eigenvals\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

т.е. имеет место совпадение характеристических чисел данных матриц. Формируем теперь матрицу $\mathbf{Q}$. Она будет иметь вид:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Записываем для решения однородной системы блок «Given - Find» следующего вида:

$Given$

$-4 \cdot x + 2 \cdot y = 0$

$4 \cdot x - 2 \cdot y = 0$

$4 \cdot x - z + 2 \cdot t = 0$

$4 \cdot y + 4 \cdot z + t = 0$

$Find(x, y, z, t) \rightarrow$

по которому получаем общее решение системы $\begin{pmatrix} x & 2x & -\frac{4}{3}x & -\frac{8}{3}x \end{pmatrix}^T$, т.е. искомым решением исходной задачи будет матрица $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha \\ -\frac{4}{3}\alpha & -\frac{8}{3}\alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Чтобы проверить, действительно ли данная матрица является решением исходного уравнения, выполним подстановку:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha \\ -\frac{4}{3}\alpha & -\frac{8}{3}\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & -2\alpha \\ \frac{4}{3}\alpha & \frac{8}{3}\alpha \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha \\ -\frac{4}{3}\alpha & -\frac{8}{3}\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & -2\alpha \\ \frac{4}{3}\alpha & \frac{8}{3}\alpha \end{pmatrix},$$

т.е., полученная матрица $\mathbf{X}$ действительно является решением исходного матричного уравнения.

В заключение следует отметить, что приведенный алгоритм обладает существенным недостатком из-за того, что матрицу $\tilde{\mathbf{Q}}$ приходится формировать вручную, что в случае больших размерностей матриц $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ затруднительно, поэтому имеет смысл построение программного алгоритма в среде MathCad, автоматизирующего процесс вычислений и устраняющего указанный недостаток.

**Литература**

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.:Наука, 1967.
2. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. – М.:Наука, 1969.
3. *Семененко М.Г.* Математическое моделирование в MathCad. - Altex, 2003.
4. *Сдвижков О.А.* MathCAD -2000: Введение в компьютерную математику. - Издательский дом Дашков и К, 2002.

**Капитонов Олег Александрович**
Студент электротехнического факультета
Белорусско-Российский университет, г. Могилев
Тел. +375(222)25-99-36
**Маковецкий Илья Иванович**
Старший преподаватель кафедры высшей математики
Белорусско-Российский университет, г. Могилев
+375(222)21-52-87
E-mail: llammerr@tut.by