

УДК 621.833.001.24

*Н. И. Рогачевский*

## ТЕОРИЯ ЗАЦЕПЛЕНИЯ ВИТКА АРХИМЕДОВА ЧЕРВЯКА С ЗУБЬЯМИ ДВУХВЕНЦОВОГО КОЛЕСА

UDC 621.833.001.24

*N. I. Rogachevsky*

## THEORY OF ENGAGEMENT OF THE THREAD OF AN ARCHIMEDEAN WORM WITH THE TEETH OF A DOUBLE-RIM WHEEL GEAR

### Аннотация

Приведен анализ конструкций червячных передач. Предложены двухвенцовые червячные передачи, содержащие или цилиндрический червяк и два полувенцовых червячных колеса, или два цилиндрических червяка и червячное колесо, оба торца диска которого снабжены зубчатыми венцами, сопряженными с соответствующими червяками, кинематически связанной зубчатой передачей. Получены аналитические зависимости, характеризующие зацепление архимедова червяка с зубьями двухвенцового червячного колеса: уравнения контактных линий на червяке, поверхности зацепления червяка, поперечных и продольных линий зацепления, контактных линий на поверхности зацепления, боковой поверхности зуба червячного колеса и контактных линий на этой поверхности.

### Ключевые слова:

передача, архимедов червяк, полувенцовое червячное колесо, геометрические параметры, аналитические зависимости.

### Abstract

The analysis of the worm gearing designs is given. Double-rim worm gear sets are studied which contain either a cylindrical worm and two half-rim worm wheels, or two cylindrical worms and a worm wheel, both disk faces of which have toothed rims mating with respective worms, kinematically connected by gear transmission. Analytical dependencies characterizing the engagement of the Archimedean worm with teeth of the double-rim worm gear have been obtained, namely: the equations of contact lines on the worm, the engaging surface of the worm, transverse and longitudinal lines of engagement, contact lines on the engaging surface, the lateral surface of the worm wheel tooth and contact lines on this surface.

### Key words:

gear transmission, Archimedean worm, worm gear, geometrical parameters, analytical dependencies.

### Введение

В приводах рабочих органов многих технологических и транспортных машин применяют червячные передачи. Эти передачи выгодно отличаются от других механических передач высокой нагрузочной способностью, широким интервалом передаточных чисел, плавностью и бесшумностью работы, возможностью самоторможения. Работа таких передач основана на скольжении

со скоростью  $V_{ск}$  рабочей поверхности витка червяка по поверхностям зубьев колеса (рис. 1), что является причиной их недостатков. В передаче с традиционными цилиндрическим червяком и колесом большинство контактных линий на указанных поверхностях имеют неблагоприятное направление относительно вектора  $V_{ск}$  скорости скольжения (см. рис. 1), что приводит к невыполнению условия обеспечения жидкостного трения в контакте витков червяка с

зубьями колеса, а соответственно, к низкому значению КПД. Трение принуждает повышать исходную мощность для

компенсации энергетических потерь, упрочнять рабочие поверхности и утяжелять червячные передачи.

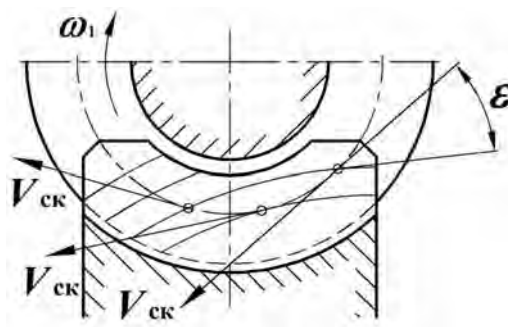


Рис. 1. Положение контактных линий относительно вектора  $V_{ск}$  на зубе колеса

Трение обуславливает превращение значительной части (до 40 %) передаваемой передачей энергии в теплоту, которая ухудшает свойства смазочного материала в контакте, увеличивает износ, опасность заедания и вероятность выхода передачи из строя. С целью предотвращения этого предусмотрены оребренные корпуса червячных редукторов и их обдув, дорогие цветные антифрикционные материалы для изготовления зубчатых венцов колес, дорогие противозадирные масла, что, наряду с потерями энергии, повышением напряженного состояния элементов зацепления, также неэффективно. Поэтому невыполнение условия обеспечения жидкостного трения в контакте витков червяка с зубьями колеса снижает качественные показатели червячных передач.

### Анализ литературы

В сопряжениях рабочих поверхностей звеньев обычных червячных передач большинство контактных линий расположены так, что среднее по длине контактной линии значение угла  $\epsilon$  между касательной к контактной линии и вектором  $V_{ск}$  относительной скорости скольжения значительно отличается от  $90^\circ$  (см. рис. 1), что нарушает условие жидкостного трения. Только у контактных линий, кратковременно находя-

щихся в зоне входа в зацепление и выхода из него, значение этого угла достигает лишь  $40...50^\circ$  [1, 2]. Следовательно, чем шире зона расположения контактных линий со значениями угла  $\epsilon$ , близкими к  $90^\circ$ , тем ближе условия работы передачи к режиму жидкостного трения, а значит, к более высоким значениям КПД.

Основным из мероприятий, приводящим к увеличению значения угла  $\epsilon$ , является модификация обычных червячных зацеплений. Например, известна червячная передача с вырезанной средней зоной зубчатого венца [1]. При этом проточка в средней части зубьев колеса шириной, составляющей около трети ширины венца колеса, и с глубиной, превышающей высоту витка червяка, удаляет зону неблагоприятных углов  $\epsilon$ , где скольжение происходит вдоль контактных линий. Такое конструктивное решение способствует улучшению эксплуатационных параметров червячной передачи [1]. Однако это улучшение несущественно, так как выполнение проточки значительно сокращает длину контактных линий и уменьшает контактную и изгибную прочность зубьев червячного колеса [3].

В другой известной модифицированной червячной передаче колесо выполнено полувенцовым, его наибольший

диаметр составляет 1,8...2,0 межосевого расстояния передачи [4]. Такое увеличение наибольшего диаметра червячного колеса приводит к тому, что в работу включается участок с благоприятным углом  $\varepsilon$ , близким к  $90^\circ$ . Данное обстоятельство способствует переходу от граничного трения рабочих поверхностей витков червяка и зубьев колеса к жидкостному за счет затягиваемого смазочного материала в клиновидный зазор между этими поверхностями [3].

Для значительного расширения участка с углом  $\varepsilon$  между контактными линиями и вектором скорости скольжения, близким к  $90^\circ$ , предложена червячная передача [5], в которой размер наибольшего диаметра колеса больше межосевого расстояния  $a_w$ . Это стало возможным благодаря уменьшению рабочей длины червяка  $b_1$  (рис. 2). Передача содержит цилиндрический червяк и два полувенцовых червячных колеса,

оси которых отстоят друг от друга на межосевом расстоянии  $a_w$ , при этом колеса с обеих сторон обхватывают червяк на угле  $\delta_2$  [5]. Полувенцовые червячные колеса размещены симметрично червяку и смещены в окружном направлении друг относительно друга на половину углового шага зубьев. Образующими боковых поверхностей зубьев червячного колеса и витка червяка являются прямые линии, которые при работе передачи совпадают на начальном цилиндре колеса, формируя линию контакта зуба и витка, перпендикулярную вектору скорости их скольжения, что является идеальным для возникновения жидкостного трения и приводит к повышению КПД передачи. При зацеплении других частей зуба с витком червяка расположение линии контакта мало отличается от  $90^\circ$  к вектору скорости скольжения и оказывает незначительное влияние на снижение КПД [5].

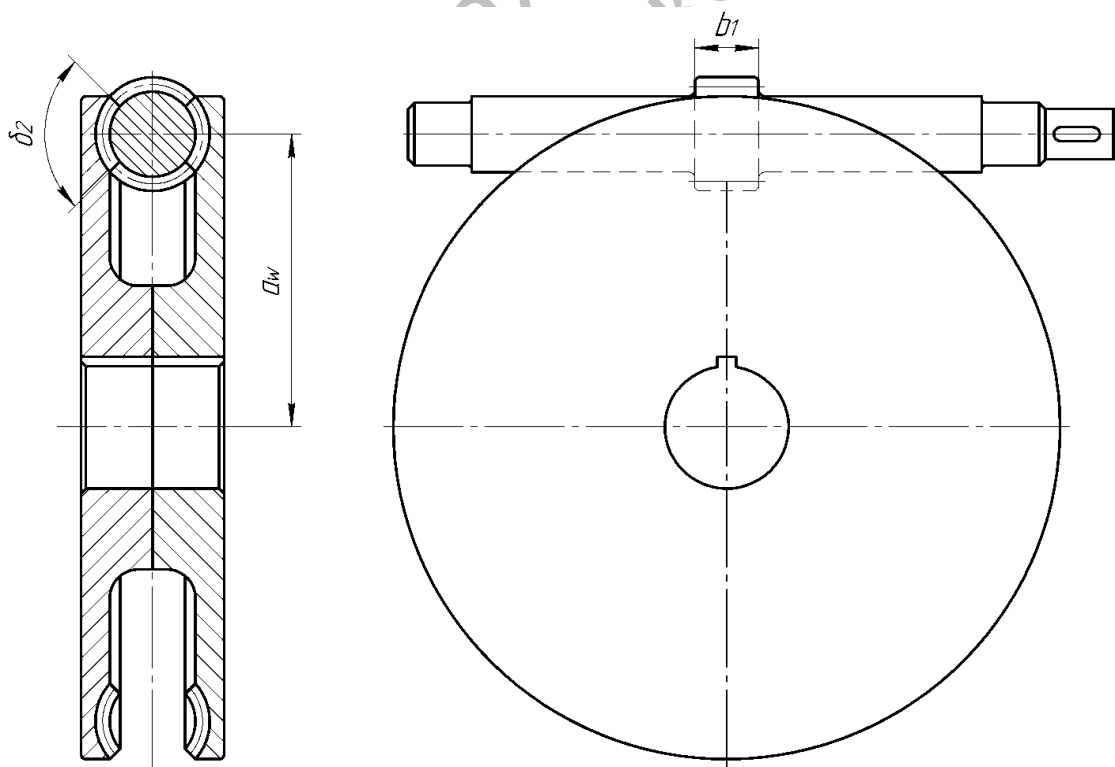


Рис. 2. Передача с двухвенцовым червячным колесом

Двухвенцовая конструкция червячного колеса обусловила большое число его зубьев, находящихся в одновременной работе, в результате чего повысилась, наряду с КПД, нагрузочная способность передачи. Это позволяет выполнить колесо цельным из чугуна вместо составного с дорогостоящим зубчатый венцом из бронзы. Ресурс такой передачи обусловлен усталостной выносливостью червяка, виток которого поочередно зацепляется с каждым зубом обоих венцов червячного колеса [6].

Для увеличения долговечности также разработана двухпоточная червячная передача, в которой оба торца диска червячного колеса снабжены зубчатыми венцами, сопряженными с соответствующими червяками, кинематически связанными зубчатой передачей, имеющими одинаковый шаг, но противоположное направление витков. При этом зубчатые венцы колеса, червяки, углы обхвата червяков зубчатыми венцами колеса симметричны относительно главной плоскости передачи [6]. Редуктор на основе такой передачи может иметь как один входной вал (червяк, кинематически связанный зубчатой передачей со вторым червяком), так и два вала (червяки без кинематической связи, приводимые в движение отдельными двигателями) [6].

К настоящему времени разработаны методика расчета геометрических параметров двухвенцовых червячных передач [7] и теория зацепления эвольвентного червяка с двухвенцовым червячным колесом [8].

На базе вышеуказанных работ спроектирована и изготовлена на РУП «Могилевлифтмаш» опытная двухвенцовая червячная передача для привода фрез культиватора. Передача по габаритам вписывается в существующие корпуса редукторов культиваторов, выпускаемых заводом. Редуктор на основе опытной двухвенцовой червячной

передачи имеет параметры: передаточное отношение 20, число заходов червяка 4, число зубьев каждого венца колеса 80, осевой модуль эвольвентного червяка 1,5 мм,  $a_w = 59,5$  мм, диаметр входного вала 16 мм, диаметр выходного вала 21 мм, масло ИТД-220. Эвольвентный червяк передачи, фреза для нарезания двухвенцовых червячных колес, двухвенцовые червячные колеса в сборе и зацепление звеньев передачи опытного редуктора культиватора представлены на рис. 3 и 4.

Сравнительные испытания редукторов культиваторов на основе традиционной и двухвенцовой эвольвентных червячных передач показали преимущества последней как по КПД, так и по нагрузочной способности. При частоте вращения червяка  $1400 \text{ мин}^{-1}$  и изменении крутящего момента на нем в пределах 5...10 Н·м КПД модернизированного редуктора составил 68,2...74,6 %, в то же время значения КПД традиционного редуктора не доходили до 50 % [8]. Однако дальнейшее повышение КПД редукторов на базе двухвенцовых червячных передач и внедрение их в производство сдерживаются отсутствием научно обоснованного проектирования таких передач с архимедовым червяком, которое основывается на теории зацепления их звеньев. Последняя до настоящего времени не была разработана.

#### ***Теория зацепления звеньев двухвенцовой архимедовой червячной передачи***

Целью работы является создание теории зацепления витка архимедова червяка с зубьями двухвенцового червячного колеса. Теоретические зависимости, характеризующие двухвенцовое червячное зацепление, получим точными методами геометрии, кинематики и математического анализа.



Рис. 3. Червяк передачи, фреза для нарезания двухвенцовых червячных колес, двухвенцовые червячные колеса в сборе, подготовленные для испытаний



Рис. 4. Двухвенцовая червячная передача в составе редуктора культиватора

Рассмотрим теоретическую картину зацепления зуба колеса с витком архимедова червяка. Для вывода уравнения винтовой поверхности архимедова червяка, так же как и эвольвентного, используем метод преобразования координат из одной системы в другую, отражающий в себе способ воспроизведения поверхности движением прямолинейной или криволинейной режущей кромки инструмента [9]. Архимедова винтовая поверхность воспроизводится винтовым движением прямой АБ, пересекающей ось винтового движения  $Oz_1$  (рис. 5). На рис. 5 изображена неподвижная система осей  $x_1, y_1, z_1$ . Прямая АБ совершает винтовое движение вокруг оси  $Oz_1$ . Линия АБ жестко связана с системой осей  $x_0, y_0, z_0$ . Прямая АБ лежит в плоскости  $x_0Bz_0$  и составляет с осью  $Bz_0$  угол образующей  $\alpha$  (угол профиля). Ось  $Bz_0$  направлена по оси  $Oz_1$ . В начальный момент движения ось  $Bx_0$  совпадает с осью  $Ox_1$ , а ось  $By_0$  – с осью  $Oy_1$ . Угловое положение системы  $x_0, y_0, z_0$  относительно системы  $x_1, y_1, z_1$  характеризует угол поворота  $v$ , который является угловым параметром винтового движения образующей прямой АБ боковой поверхности витка червяка. Осевой параметр винтового движения  $k$  связан с ходом архимедовой винтовой поверхности  $p_z$  зависимостью

$$k = p_z / (2\pi) = m\pi / (2\pi) = 0,5m.$$

Уравнение образующей прямой АБ винтовой теоретической поверхности в системе координат  $x_0, y_0, z_0$  очевидно из рассмотрения построения схемы, изображенной на рис. 5.

$$\left. \begin{aligned} z_0 / y_0 &= \operatorname{tg} \alpha; \\ x_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Из рис. 5 видно также, что система координат  $x_0, y_0, z_0$  отличается от  $x_1, y_1, z_1$  поворотом на угол  $v$  и сдвигом вдоль оси  $Oz_1$  на величину  $kv$ , поэтому соотношения между координатами  $x_0, y_0, z_0$  и  $x_1, y_1, z_1$  имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= x_1 \cos v - y_1 \sin v; \\ y_0 &= x_1 \sin v + y_1 \cos v; \\ z_0 &= z_1 - kv. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Подставляя в уравнения (2) вместо  $x_0, y_0, z_0$  их выражения (1), получаем после преобразований уравнения архимедовой винтовой поверхности

$$\left. \begin{aligned} x_1 \cos v - y_1 \sin v &= 0; \\ x_1 \sin v \operatorname{tg} \alpha + y_1 \cos v \operatorname{tg} \alpha + z_1 &= 0,5mv. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Уравнения (3) математически описывают архимедову винтовую поверхность правого направления (показана на рис. 5), для левой поверхности в эти уравнения вместо  $\alpha$  необходимо подставить  $-\alpha$ .

Изложенная теория зацепления архимедовой винтовой поверхности червяка с соответствующей поверхностью зуба венца двухвенцового червячного колеса построена на положении (равносильном закону зацепления), что сопряженные поверхности есть огибаемая и огибающая в относительном движении звеньев. Для определения огибаемой поверхности и ее характеристик используем общий аналитический метод, разработанный Н. И. Колчиным и примененный им для исследования червячного зацепления с произвольным углом между осями и аналитического обоснования способа нарезания цилиндрических зубчатых колес по методу Пфаутера [10, 11].

Схема относительного расположения звеньев двухвенцовой червячной передачи представлена на рис. 6, на котором обозначены:  $x_1, y_1, z_1$  – система координат, связанная с червяком;  $x_2, y_2, z_2$  – система координат, скрепленная с полувенцом червячного колеса;  $x, y, z$  – неподвижная система координат;  $x', y', z'$  – вспомогательная неподвижная координатная система, сдвинутая относительно системы  $x, y, z$  вдоль оси  $y$  на межосевое расстояние  $a_w$ ;  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – углы поворота червяка и червячного колеса, соотношение которых является передаточным отношением  $i = \varphi_2 / \varphi_1$ .

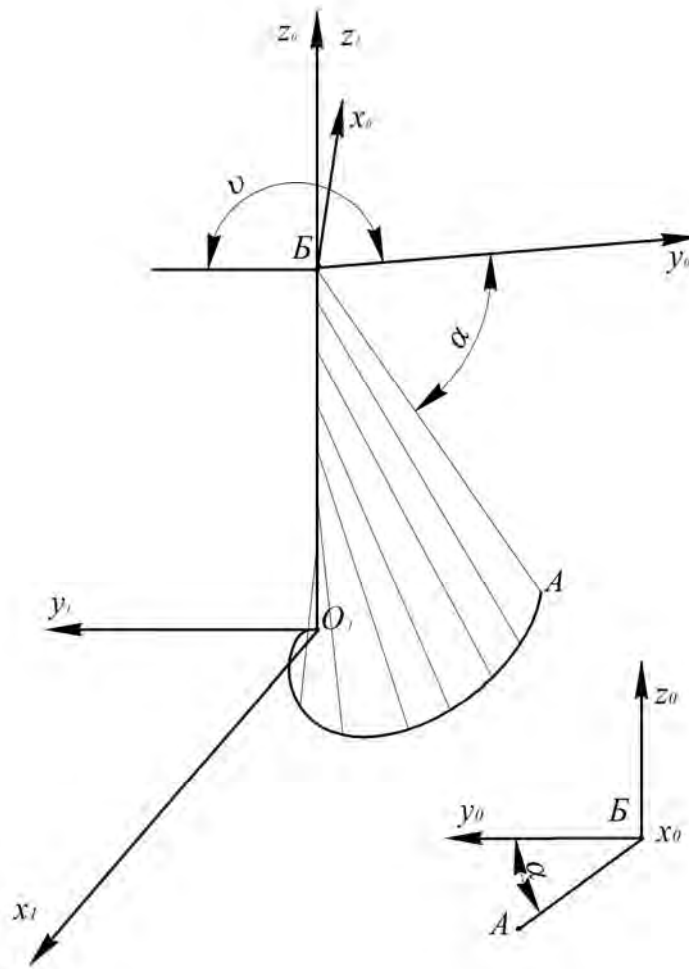


Рис. 5. Схема образования архимедовой винтовой поверхности червяка

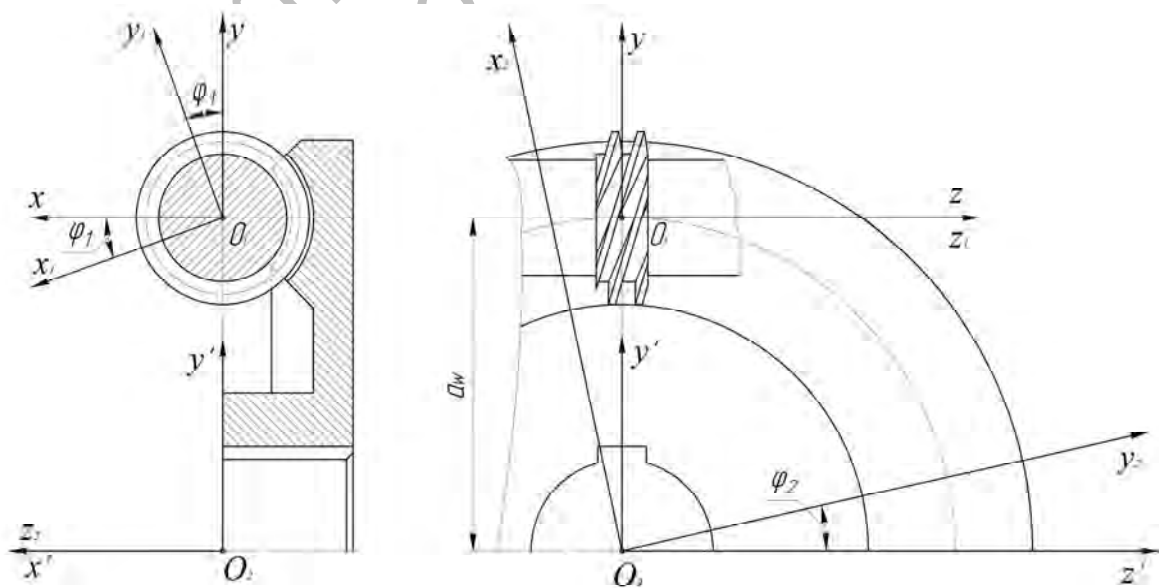


Рис. 6. Схема зацепления архимедова червяка с зубьями венца колеса двухвенцовой червячной передачи

Система координат  $x_1, y_1, z_1$  отличается от  $x, y, z$  поворотом на угол  $\varphi_1$ , поэтому соотношения между координатами  $x, y, z$  и  $x_1, y_1, z_1$  имеют вид [10, 12]:

– при переходе от  $x_1, y_1, z_1$  к  $x, y, z$

$$\left. \begin{aligned} x &= x_1 \cos \varphi_1 + y_1 \sin \varphi_1; \\ y &= -x_1 \sin \varphi_1 + y_1 \cos \varphi_1; \\ z &= z_1; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

– при переходе от  $x, y, z$  к  $x_1, y_1, z_1$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x \cos \varphi_1 - y \sin \varphi_1; \\ y_1 &= x \sin \varphi_1 + y \cos \varphi_1; \\ z_1 &= z. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Система осей  $x_2, y_2, z_2$  отличается от  $x_1, y_1, z_1$  переносом начала координат на межосевое расстояние  $a_w$  и поворотом на угол  $\varphi_2$  вокруг оси  $z_2$ . Для получения формул преобразования, учитывающих эти относительные перемещения указанных систем координат, и введена вспомогательная система  $x', y', z'$ . Производя переход от системы координат  $x, y, z$  к  $x_2, y_2, z_2$  в два этапа: сперва перенос начала координат на межосевое расстояние  $a_w$ , затем поворот на угол  $\varphi_2$ , получаем формулы для перехода от координат  $x, y, z$  к  $x_2, y_2, z_2$

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= y \cos \varphi_2 - z \sin \varphi_2 + a_w \cos \varphi_2; \\ y_2 &= y \sin \varphi_2 + z \cos \varphi_2 + a_w \sin \varphi_2; \\ z_2 &= x. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Аналогично для перехода от системы  $x_2, y_2, z_2$  к  $x, y, z$  имеем

$$\left. \begin{aligned} x &= z_2; \\ y &= x_2 \cos \varphi_2 + y_2 \sin \varphi_2 - a_w; \\ z &= -x_2 \sin \varphi_2 + y_2 \cos \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Подставляя в формулы (6) значения  $x, y, z$  по формулам (4), получаем формулы перехода от  $x_1, y_1, z_1$  к  $x_2, y_2, z_2$  в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= -x_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + y_1 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \\ &- z_1 \sin \varphi_2 + a_w \cos \varphi_2; \\ y_2 &= -x_1 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + y_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \\ &+ z_1 \cos \varphi_1 + a_w \sin \varphi_2; \\ z_2 &= x_1 \cos \varphi_1 + y_1 \sin \varphi_1. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Подставляя в формулы (5) значения  $x, y, z$  по формулам (7), имеем зависимости перехода от осей  $x_2, y_2, z_2$  к осям  $x_1, y_1, z_1$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -x_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - y_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \\ &+ z_2 \cos \varphi_1 + a_w \sin \varphi_1; \\ y_1 &= x_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + y_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \\ &+ z_2 \sin \varphi_1 - a_w \cos \varphi_1; \\ z_1 &= -x_2 \sin \varphi_2 + y_2 \cos \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Вспомогательными формулами для исследования зацепления являются частные производные  $\partial x_1 / \partial \varphi_1, \partial y_1 / \partial \varphi_1, \partial z_1 / \partial \varphi_1$ , рассматривая в них координаты  $x_1, y_1, z_1$  в функции от  $x_2, y_2, z_2$  по формулам преобразования (9), и частные производные  $\partial x_2 / \partial \varphi_1, \partial y_2 / \partial \varphi_1, \partial z_2 / \partial \varphi_1$ , рассматривая в них  $x_2, y_2, z_2$  как функции от  $x_1, y_1, z_1$  по формулам преобразования (8). Геометрический смысл этих производных следующий. Производные  $\partial x_1 / \partial \varphi_1, \partial y_1 / \partial \varphi_1, \partial z_1 / \partial \varphi_1$  после умножения их на  $d\varphi_1$  представляют проекции на оси  $x_1, y_1, z_1$  элементарного вектора перемещения точки, лежащей на поверхности зубцов колеса, при повороте червяка на угол  $d\varphi_1$ . Производные  $\partial x_2 / \partial \varphi_1, \partial y_2 / \partial \varphi_1, \partial z_2 / \partial \varphi_1$  после умножения их на  $d\varphi_1$  представляют проекции на оси  $x_2, y_2, z_2$  элементарного вектора перемещения точки, лежащей на поверхности зубцов червячного колеса, при повороте червяка на угол  $d\varphi_1$ .

Дифференцируя уравнения (9), получим



$$\left. \begin{aligned} \partial x_1 / \partial \varphi_1 &= -x_2(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - i \sin \varphi_1 \times \\ &\times \sin \varphi_2) - y_2(\cos \varphi_1 \sin \varphi_1 + i \sin \varphi_1 \times \\ &\times \cos \varphi_2) - z_2 \sin \varphi_1 + a_w \cos \varphi_1; \\ \partial y_1 / \partial \varphi_1 &= -x_2(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \times \\ &\times \sin \varphi_2) - y_2(\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 - i \cos \varphi_1 \times \\ &\times \cos \varphi_2) + z_2 \cos \varphi_1 + a_w \sin \varphi_1; \\ \partial z_1 / \partial \varphi_1 &= -i(x_2 \cos \varphi_2 + y_2 \sin \varphi_2), \end{aligned} \right\} (10)$$

где  $i$  – передаточное отношение,  $i = \partial \varphi_2 / \partial \varphi_1$ .

Подставим в уравнения (10) вместо  $x_2, y_2, z_2$  их значения через  $x_1, y_1, z_1$  по формулам (8). После многочисленных тригонометрических и алгебраических преобразований уравнения (10) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \partial x_1 / \partial \varphi_1 &= -y_1 - z_1 i \sin \varphi_1; \\ \partial y_1 / \partial \varphi_1 &= x_1 + z_1 i \cos \varphi_1; \\ \partial z_1 / \partial \varphi_1 &= i(x_1 \sin \varphi_1 - y_1 \cos \varphi_1 - a_w). \end{aligned} \right\} (11)$$

Аналогично дифференцируем формулы (8), затем подставляем вместо  $x_1, y_1, z_1$  их значения по соотношениям (9). После тригонометрических и алгебраических преобразований полученные уравнения примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \partial x_2 / \partial \varphi_1 &= -y_2 i - z_2 \cos \varphi_2; \\ \partial y_2 / \partial \varphi_1 &= x_2 i - z_2 \sin \varphi_2; \\ \partial z_2 / \partial \varphi_1 &= x_2 \cos \varphi_2 + y_2 \sin \varphi_2 - a_w. \end{aligned} \right\} (12)$$

Архимедово червячное зацепление, так же как и эвольвентное, характеризуют уравнения контактных линий на червяке, поверхности зацепления червяка, поперечных и продольных линий зацепления, контактных линий на поверхности зацепления, боковой поверхности зуба червячного колеса и контактных линий на этой поверхности. Получим данные уравнения.

Чтобы вывести уравнения контактных линий на червяке, необходимо к основным уравнениям (3) поверхности витка червяка добавить зависимость, полученную дифференцированием по  $\varphi_1$

соотношений (3). После дифференцирования находим в каждой из двух полученных зависимостей  $\partial v / \partial \varphi_1$ , а затем приравниваем их правые части. После преобразований

$$\left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} \sin v \operatorname{tg} \alpha + \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} \cos v \operatorname{tg} \alpha + \frac{\partial z_1}{\partial \varphi_1} \right) \times \\ \times (x_1 \sin v + y_1 \cos v) = \\ = 0,5m \left( \frac{\partial x_1}{\partial \varphi_1} \cos v - \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} \sin v \right). \quad (13)$$

Подставляя в это уравнение значения производных  $\partial x_1 / \partial \varphi_1, \partial y_1 / \partial \varphi_1, \partial z_1 / \partial \varphi_1$  из соотношений (11), после многочисленных преобразований искомая добавочная к уравнениям (3) зависимость, математически описывающая контуры контактных линий на червяке,

$$x_1 \sin \varphi_1 - y_1 \cos \varphi_1 + z_1 (\cos(\varphi_1 + v) \times \\ \times \operatorname{tg} \alpha + (0,5m \sin(\varphi_1 + v)) / (x_1 \sin \varphi_1 + \\ + y_1 \cos \varphi_1)) = a_w. \quad (14)$$

Подставляя в уравнения (3) и (14) вместо  $x_1, y_1, z_1$  выражения из формул преобразования (5), после тригонометрических и алгебраических преобразований уравнения поверхности зацепления архимедова червяка

$$\left. \begin{aligned} x \cos(\varphi_1 + v) - y \sin(\varphi_1 + v) &= 0; \\ x \sin(\varphi_1 + v) \operatorname{tg} \alpha + y \cos(\varphi_1 + v) \times \\ \times \operatorname{tg} \alpha + z &= 0,5mv; \\ -y + z(\cos(\varphi_1 + v) \operatorname{tg} \alpha + \\ + (0,5m \sin(\varphi_1 + v)) / (x \sin(\varphi_1 + v) + \\ + y \cos(\varphi_1 + v))) &= 0. \end{aligned} \right\} (15)$$

Линии на поверхности зацепления, отвечающие постоянным значениям  $\varphi_1$ , но различным  $v$ , будут контактными линиями на поверхности зацепления. Уравнения (13) могут служить для вычисления координат сечений поверхности зацепления плоскостями  $z = \text{const}$ , т. е. поперечных линий зацепления, задаваясь произвольными значениями

суммы  $(\varphi_1 + \nu)$ .

Для получения линий зацепления в виде сечений поверхности зацепления плоскостями  $x = \text{const}$  (продольные линии зацепления) нужно первое и последнее из уравнений (15) решить относительно  $y$  и  $z$ :

$$\left. \begin{aligned} y &= x \operatorname{ctg}(\varphi_1 + \nu); \\ z &= (a_w + x \operatorname{ctg}(\varphi_1 + \nu)) : \\ &: (\cos(\varphi_1 + \nu) \operatorname{tg} \alpha + \\ &+ (0,5m \sin^2(\varphi_1 + \nu)) / x). \end{aligned} \right\} (16)$$

Для получения координат контактных линий на поверхности зацепления нужно все три уравнения (15) решить относительно  $z$ ,  $y$ ,  $x$ :

$$\left. \begin{aligned} z &= 0,5m\nu - y \operatorname{tg} \alpha / \cos(\varphi_1 + \nu); \\ y^2 - y(0,5m \sin \alpha \cos \alpha (\nu \cos(\varphi_1 + \nu) - \sin(\varphi_1 + \nu)) - a_w \cos^2 \alpha) - \\ - 0,25m^2 \nu \sin(\varphi_1 + \nu) \cos(\varphi_1 + \nu) \times \\ \times \cos^2 \alpha &= 0; \\ x &= y \operatorname{tg}(\varphi_1 + \nu). \end{aligned} \right\} (17)$$

Подставляя значения  $z$ ,  $y$ ,  $x$  в уравнения (6) перехода от осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$  к осям  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $z_2$ , имеем уравнения поверхности зубцов колеса, причем точки этой поверхности, отвечающие одному и тому же значению параметров  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , но разным  $\nu$ , будут представлять собой контактные линии на поверхности зубцов колеса.

### Заключение

Выведенные уравнения поверхности зацепления червяка, поперечных и продольных линий зацепления, контактных линий на поверхности зацепления, боковой поверхности зуба червячного колеса и контактных линий на этой поверхности будут использованы для научно обоснованного задания геометрических параметров двухвентцовых червячных передач.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Решетов, Д. Н. Детали машин / Д. Н. Решетов. – М.: Машиностроение, 1989. – 496 с.
2. Левитан, Ю. В. Червячные редукторы : справочник / Ю. В. Левитан, В. П. Обморнов, В. И. Васильев. – Л.: Машиностроение; Ленингр. отделение, 1985. – 168 с.
3. Егоров, И. М. Цилиндро-гороидная червячная передача / И. М. Егоров // Зубчатые передачи – 99 : тез. докл. Междунар. науч.-практ. конф. по проблеме обеспечения надежности и качества зубчатых передач. – СПб., 1999. – С. 22–23.
4. Червячная цилиндрическая передача : пат. 2136987 РФ, МПК<sup>6</sup> F 16 Н 1/16 / И. М. Егоров, Б. Ш. Иофик (РФ). – № 99103702/28; заявл. 03.03.99; опубл. 10.09.99. – 8 с.
5. Червячная передача : пат. 7773U Респ. Беларусь, МПК F 16 Н 1/00 / В. И. Сотников, Н. Г. Чернов, М. Э. Подымако, Н. И. Рогачевский, М. Ф. Пашкевич; заявитель РУП «Завод «Могилевлифтмаш». – № u20110389; заявл. 18.05.11; опубл. 30.12.11 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2011. – № 6 (83). – С. 247.
6. Червячная передача : пат. 8694U Респ. Беларусь, МПК F 16 Н 1/00 / С. Н. Рогачевский, М. Ф. Пашкевич, Н. И. Рогачевский; заявитель Белорус.-Рос. ун-т. – № u20120366; заявл. 02.04.12; опубл. 30.10.12 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2012. – № 5 (88). – С. 224.
7. Рогачевский, Н. И. Геометрия двухвентцовых червячных передач / Н. И. Рогачевский, М. Э. Подымако, С. Н. Рогачевский // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии : материалы Междунар. науч.-техн. конф. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2014. – С. 83–84.
8. Рогачевский, Н. И. Теория зацепления звеньев двухвентцовых червячных передач / Н. И. Рогачевский // Вестн. ГГТУ им. П. О. Сухого. – 2014. – № 4. – С. 3–11.
9. Рогачевский, Н. И. Теоретическая поверхность зуба зубчатого колеса, нарезанного архимедовой червячной фрезой / Н. И. Рогачевский; ММИ. – Могилев, 1981. – 33 с. – Деп. в БелНИИНТИ 22.04.81, № 262.

10. **Колчин, Н. И.** Червячное зацепление с произвольным углом между осями / Н. И. Колчин // Зубчатые зацепления : сб. науч. ст. – М. : Машгиз, 1947. – С. 6–7.

11. **Колчин, Н. И.** Аналитическое обоснование способа нарезания цилиндрических зубчатых колес по методу Пфаутера / Н. И. Колчин // Зубчатые зацепления : сб. науч. ст. – М. : Машгиз, 1947. – С. 48–50.

12. **Гусак, А. А.** Аналитическая геометрия и линейная алгебра : справ. пособие по решению задач / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 2001. – 288 с.

*Статья сдана в редакцию 30 июня 2016 года*

**Николай Иванович Рогачевский**, канд. техн. наук, доц., Белорусско-Российский университет.  
Тел.: +375-293-60-35-93.

**Nikolai Ivanovich Rogachevsky**, PhD (Engineering), Associate Prof., Belarusian-Russian University.  
Phone: +375-293-60-35-93.