Регуляризация многоточечной краевой задачи для уравнения Ляпунова в случае слабого вырождения краевых условий

А. Н. Бондарев
Могилёв, Белорусско-Российский университет
e-mail: alex-bondarev@tut.by

Для обобщённого дифференциального уравнения Ляпунова

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + C_1(t)XC_2(t) + XB(t) + F(t) \equiv G(t, X) \qquad (1)$$

рассматривается краевая задача с условием

$$\sum_{s=1}^{k} M_s X(t_s) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = \omega, \qquad (2)$$

где $(t, X) \in I \times \mathbb{R}^{n\times m}$, A, B, C_1, C_2, F — непрерывные по $t \in I$ матричнозначные функции соответствующих размерностей, M_s — заданные постоянные $(n \times n)$-матрицы, $I = [0, \omega]$.

С помощью конструктивного метода регуляризации [1] эта задача исследуется в конечномерной банаховой алгебре $\mathfrak{B}(n)$ непрерывных матричнозначных функций с нормой

$$\|X\|_C = \max_{t\in I} \|X(t)\|,$$

где $\|\cdot\|$ — какая-либо фиксированная матричная норма, например, любая из норм, приведённых в [2, с. 21]. Рассматривается случай слабого вырождения краевых условий

$$\sum_{s=1}^{i} M_s = 0, \qquad (3)$$

где число i фиксировано и может принимать любое значение от 2 до k.

Введены следующие обозначения:

$$\Phi=\sum_{j=1}^{i-1} M_j \int_{t_j}^{t_i} A(\tau)d\tau-\sum_{r=i+1}^{k} M_r, \quad \gamma=\|\Phi^{-1}\|, \quad \alpha=\max_{t\in I}\|A(t)\|,$$

$$\beta=\max_{t\in I}\|B(t)\|, \quad h=\max_{t\in I}\|F(t)\|, \quad \delta_l=\max_{t\in I}\|C_l(t)\|\,(l=1,2),$$

$$m_s=\|M_s\|\,(s=\overline{1,k}), \quad \tilde m_1=\sum_{j=1}^{i-1} m_j, \quad \tilde m_2=\sum_{r=i+1}^{k} m_r,$$

$$\varepsilon=\alpha+\delta_1\delta_2+\beta,$$

$$q=\gamma\sum_{j=1}^{i-1} m_j\left\{\frac{1}{2}\alpha\varepsilon[(t_j-t_1)^2+(t_k-t_j)^2]+(\varepsilon-\alpha)(t_i-t_j)\right\}+$$
$$+\frac{1}{2}\gamma\varepsilon\tilde m_1[(t_i-t_1)^2+(t_k-t_i)^2]+\gamma\varepsilon\tilde m_2(t_k-t_1),$$

$$N=\gamma h\left\{\sum_{j=1}^{i-1}\frac{1}{2}\alpha m_j[(t_j-t_1)^2+(t_k-t_j)^2+(t_i-t_j)]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\alpha\tilde m_1[(t_i-t_1)^2+(t_k-t_i)^2]+\tilde m_2(t_k-t_1)\right\}.$$

Теорема. *Пусть выполнено условие* (3), *а также* $\det\Phi\neq 0$, $q<1$. *Тогда задача* (1), (2) *однозначно разрешима, при этом для её решения* $X=X(t)$ *справедлива оценка*

$$\|X\|_C \leqslant \frac{N}{1-q}. \tag{4}$$

Следуя методике, используемой в [3], сначала получено матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2):

$$X(t)=\Phi^{-1}\left\{\sum_{j=1}^{i-1} M_j\left[\int_{t_j}^{t}\Big(\int_{t_j}^{\tau} A(\sigma)d\sigma\Big)G\big(\tau,X(\tau)\big)\,d\tau\,-\right.\right.$$

$$-\int_{t}^{t_i}\Big(\int_{\tau}^{t_i} A(\sigma)d\sigma\Big)G\big(\tau,X(\tau)\big)\,d\tau\,- \tag{5}$$

$$\left.\left.-\int_{t_j}^{t_i}(G(\tau,X(\tau))-A(\tau)X(\tau))d\tau\right]-\sum_{r=i+1}^{k} M_r\int_{t_r}^{t} G\big(\tau,X(\tau)\big)d\tau\right\}.$$

При исследовании разрешимости уравнения (5) применен принцип сжимающих отображений (см., например, [4, с. 605]). Согласно этому принципу, на основании условий теоремы уравнение (5) однозначно разрешимо в пространстве $C(I, \mathbb{R}^{n\times m})$. Для получения соотношения (4) выполнены оценки по норме в уравнении (5).

Решение задачи (1), (2) строится классическим методом последовательных приближений типа [4, с. 605]. Применительно к уравнению (5) соответствующий алгоритм имеет вид

$$\begin{aligned} X_p(t) = \Phi^{-1}\Bigg\{\sum_{j=1}^{i-1} M_j \Bigg[\int_{t_j}^{t}\Big(\int_{t_j}^{\tau} A(\sigma)d\sigma\Big)G\big(\tau, X_{p-1}(\tau)\big)\,d\tau - \\ -\int_{t}^{t_i}\Big(\int_{\tau}^{t_i} A(\sigma)\,d\sigma\Big)G\big(\tau, X_{p-1}(\tau)\big)\,d\tau - \\ -\int_{t_j}^{t_i}(G(\tau, X_{p-1}(\tau)) - A(\tau)X_{p-1}(\tau))d\tau\Bigg] - \\ -\sum_{r=i+1}^{k} M_r \int_{t_r}^{t} G\big(\tau, X_{p-1}(\tau)\big)\,d\tau\Bigg\}, \quad p = 1, 2, \dots\ . \end{aligned} \tag{6}$$

В качестве начального приближения принимается произвольная функция $X_0 \in C(I, \mathbb{R}^{n\times m})$.

Установлено, что последовательность $\{X_r\}_0^\infty$, определяемая алгоритмом (6), сходится равномерно по $t \in I$ к решению интегрального уравнения (5), при этом справедлива оценка

$$\|X - X_r\|_C \leqslant \frac{q^r}{1-q}\|X_1 - X_0\|_C, \quad r = 0, 1, 2, \dots\ .$$

Оценка области локализации решения $X(t)$, определяемая на основе алгоритма (6), имеет вид

$$\|X\|_C \leqslant \|X_0\|_C + \frac{\|X_1 - X_0\|_C}{1-q}. \tag{7}$$

Из (7) при $X_0 \equiv 0$ получено соотношение, из которого следует оценка (4).

1. *Лаптинский В.Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998.

2. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

3. *Бондарев А.Н., Лаптинский В.Н.* Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае слабого вырождения краевых условий // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 3. С. 423–427.

4. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.