Разрешимость и построение решения периодической краевой задачи для обобщённой системы матричных дифференциальных уравнений Риккати

Д. В. Роголев
Могилёв, Белорусско-Российский университет
e-mail: d-rogolev@tut.by

Исследуется краевая задача типа [1, 2]

$$\frac{dX}{d} = G_1(t, X, Y), \tag{1}$$

$$\frac{dY}{dt} = G_2(t, X, Y), \tag{2}$$

$$X(0) = X(\omega), \quad Y(0) = Y(\omega), \tag{3}$$

где

$$G_1(t, X, Y) = A_1(t)X + XB_1(t) + X\big(S_1(t)X + S_2(t)Y\big) + \\ +YS_3(t)X + F_1(t),$$

$$G_2(t, X, Y) = A_2(t)Y + YB_2(t) + Y\big(P_1(t)X + P_2(t)Y\big) + \\ +XP_3(t)Y + F_2(t);$$

с коэффициентами класса $\mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, $(t,X,Y)\in I\times\mathbb{R}^{n\times n}\times\mathbb{R}^{n\times n}$; $I=[0,\omega]$, $\omega>0$.

Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова, Риккати и их обобщения играют важную роль в теории и приложениях дифференциальных уравнений. Система типа (1), (2) впервые появилась, по-видимому, в теории дифференциальных игр (см., например, [1]). Из этой системы в случае постоянных коэффициентов следует система, аналогичная [1].

Обозначения:

$$D=\{(t,X,Y)\colon t\in I,\ \|X\|\leqslant\rho_1,\ \|Y\|\leqslant\rho_2\},$$
$$\tilde{A}_i(\omega)=\int_0^\omega A_i(\tau)d\tau,\quad \gamma_i=\left\|\tilde{A}_i^{-1}(\omega)\right\|,\quad \alpha_i=\max_{t\in I}\|A_i(t)\|,$$
$$\beta_i=\max_{t\in I}\|B_i(t)\|,\quad \delta_j=\max_{t\in I}\|S_j(t)\|,\quad \mu_j=\max_{t\in I}\|P_j(t)\|,$$
$$h_i=\max_{t\in I}\|F_i(t)\|,\quad i=1,2,\quad j=1,2,3,$$
$$q_{11}=\gamma_1\left[\frac{1}{2}\alpha_1\omega^2\left(\alpha_1+\beta_1+2\delta_1\rho_1+(\delta_2+\delta_3)\rho_2\right)+\right.$$
$$\left.+\,\omega\left(\beta_1+2\delta_1\rho_1+\left(\delta_2+\delta_3\right)\rho_2\right)\right],\quad q_{12}=\gamma_1\delta_2\rho_1\omega\left(\frac{1}{2}\alpha_1\omega+1\right),$$
$$q_{21}=\gamma_2\mu_1\rho_2\omega\left(\frac{1}{2}\alpha_2\omega+1\right),$$
$$q_{22}=\gamma_2\left[\frac{1}{2}\alpha_2\omega^2\left(\alpha_2+\beta_2+\left(\mu_1+\mu_3\right)\rho_1+2\mu_2\rho_2\right)+\right.$$
$$\left.+\,\omega\left(\beta_2+\left(\mu_1+\mu_3\right)\rho_1+2\mu_2\rho_2\right)\right],$$

где $\rho_1,\rho_2>0$.

На основе применения метода [3, гл. 3] задача (1)–(3) рассматривается в конечномерной банаховой алгебре $\mathfrak{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|T\|_C=\max\limits_{t\in I}\|T(t)\|$, где $\|\cdot\|$ — определённая норма матриц в этой алгебре, $T\in\mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$. Предлагаемая работа является продолжением и обобщением работ [1, 2].

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\det\tilde{A}_i\neq 0$ $(i=1,2)$,

2) $\gamma_1 \left\{ \frac{1}{2}\alpha_1\omega^2 \left[(\alpha_1+\beta_1)\rho_1 + \delta_1\rho_1^2 + (\delta_2+\delta_3)\rho_1\rho_2 + h_1 \right] + \right.$

$$\left. + \omega\left(\beta_1\rho_1 + \delta_1\rho_1^2 + (\delta_2+\delta_3)\rho_1\rho_2 + h_1\right) \right\} \leqslant \rho_1,$$

$$\gamma_2 \left\{ \frac{1}{2}\alpha_2\omega^2 \left[(\alpha_2+\beta_2)\rho_2 + \mu_2\rho_2^2 + (\mu_1+\mu_3)\rho_1\rho_2 + h_2 \right] + \right.$$

$$\left. + \omega\left(\beta_2\rho_2 + \mu_2\rho_2^2 + (\mu_1+\mu_3)\rho_1\rho_2 + h_2\right) \right\} \leqslant \rho_2,$$

3) $q_{11} < 1$, $\det(E - A) > 0$, *где* $E = \mathrm{diag}\,(1,1)$, $A = (q_{ij})$.

Тогда задача (1)–(3) *однозначно разрешима в области* D.

Для построения решения данной задачи разработан алгоритм, который в дифференциальной форме имеет вид

$$\frac{dX_{k+1}}{dt} = G_1(t, X_k, Y_k), \tag{4}$$

$$\frac{dY_{k+1}}{dt} = G_2(t, X_k, Y_k), \tag{5}$$

$$X_{k+1}(0) = X_{k+1}(\omega), \quad Y_{k+1}(0) = Y_{k+1}(\omega), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где в качестве начального приближения X_0, Y_0 приняты постоянные матрицы, определяемые на основе (4), (5) при $k = 0$ из соответствующих условий (6) для приближения $X_1(t), Y_1(t)$,

$$\int_0^\omega G_1(\tau, X_0, Y_0)d\tau = 0, \quad \int_0^\omega G_2(\tau, X_0, Y_0)d\tau = 0.$$

С помощью левостороннего регуляризатора [4]

$$\int_0^\omega A(\tau)Z(\tau)d\tau = \int_0^\omega A(\tau)d\tau \cdot Z(t) - \int_0^t \left(\int_0^\tau A(\sigma)d\sigma \right) dZ(\tau) + \\ + \int_t^\omega \left(\int_\tau^\omega A(\sigma)d\sigma \right) dZ(\tau),$$

где $A = \{A_1, A_2\}$, $Z = \{X, Y\}$, на основе (4)–(6) получены рекуррентные интегральные соотношения

$$X_k(t) = \tilde{A}_1^{-1}(\omega) \left\{ \int_0^t \left(\int_0^\tau A_1(\sigma)d\sigma \right) G_1\left(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)\right) d\tau - \right.$$

$$
-\int_t^{\omega}\left(\int_{\tau}^{\omega} A_1(\sigma)d\sigma\right) G_1\left(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)\right) d\tau -
$$

$$
\left.-\int_0^{\omega}\left[G_1\left(\tau, X_k(\tau), Y_k(\tau)\right) - A_1(\tau)X_k(\tau)\right] d\tau\right\}, \qquad (7)
$$

$$
Y_k(t) = \tilde{A}_2^{-1}(\omega)\left\{\int_0^t \left(\int_0^{\tau} A_2(\sigma)d\sigma\right) G_2\left(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)\right) d\tau - \right.
$$

$$
-\int_t^{\omega}\left(\int_{\tau}^{\omega} A_2(\sigma)d\sigma\right) G_2\left(\tau, X_{k-1}(\tau), Y_{k-1}(\tau)\right) d\tau -
$$

$$
\left.-\int_0^{\omega}\left[G_2\left(\tau, X_k(\tau), Y_k(\tau)\right) - A_2(\tau)Y_k(\tau)\right] d\tau\right\}, \quad k = 1, 2, \ldots . \qquad (8)
$$

Изучены вопросы сходимости, скорости сходимости алгоритма (7), (8).

1. *Jodar L.* Explicit solutions of Riccati equations appearing in differential games // Applied Mathematics Letters, 1990. Vol. 3, no 4, pp. 9–12.

2. *Лаптинский В.Н., Роголев Д. В.* Конструктивные методы построения решения периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений типа Риккати // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 10. С. 1412–1420.

3. *Лаптинский В.Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Минск: Ин-т матем. НАН Беларуси, 1998.

4. *Лаптинский В.Н., Роголев Д. В.* О разрешимости периодической краевой задачи для системы матричных дифференциальных уравнений Риккати // Веснік Магілёўскага дзярж. ун-та імя А.А.Куляшова. Сер. В, Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). 2010, № 1 (35). Могилёв: МГУ, 2010. С. 12–23.