Конструктивный анализ линейной интегро-дифференциальной задачи периодического типа

В. Н. Лаптинский
Могилёв, Белорусско-Российский университет
e-mail: lavani@tut.by

Исследуется задача отыскания $x \in \mathbb{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ из совокупности соотношений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \tag{1}$$

$$\int_0^\omega A(\tau)x(\tau)d\tau = -\int_0^\omega f(\tau)d\tau, \tag{2}$$

$$\int_0^\omega \Psi_i(\tau)x(\tau)d\tau = \mu_i, \tag{3}$$

где $A \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $f \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^n)$, $\Psi_i \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $\mu_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{1, k}$; $I = [0, \omega]$, $\omega > 0$; (1), (2) представляют собой периодическую краевую задачу в постановке по методу регуляризации [1], [2, гл. 3]; (3) при $k = \infty$ является интегральным условием типа [3, с. 264], более широкий круг таких условий описан в [4, гл. IX, § 5]. Вводятся также матрицы $\Phi_i \in \mathbb{C}^1(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, возможно, базисного типа [2, гл. 4], подчинённые условию $\Phi_i(0) = \Phi_i(\omega)$.

В данной работе метод [2, гл. 4] развит на основе [5, 6] применительно к задаче (1)–(3). Сначала определяется принципиальная структура искомого решения. Пусть эта задача разрешима. Для возможных решений класса $\mathbb{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ системы (3) с помощью подхода [5, 6] при выполнении условия невырожденности матриц, определяемых далее по тексту, получено выражение типа [2, гл. 4]

$$x(t) = y(t) + \int_0^\omega Q(t, \tau)y(\tau)d\tau + q(t), \tag{4}$$

где $y(t)$ — вспомогательная функция, аналогичная [2, гл. 4], вырожденное ядро $Q(t, \tau)$ представлено через $\Phi_i(t), \Psi_i(t)$ на основе алгоритма

$$Q_{j+1}(t,\tau)=Q_j(t,\tau)-\left[\Phi_{j+1}(t)+\int_0^\omega Q_j(t,s)\Phi_{j+1}(s)ds\right]\times$$
$$\times\left(\widetilde{\Psi_{j+1}R_{j+1}}\right)^{-1}\left[\Psi_{j+1}(\tau)+\int_0^\omega \Psi_{j+1}(s)Q_j(s,\tau)ds\right],\ j=\overline{0,k-1},$$

тильдой сверху обозначен интеграл по промежутку I.

Функция $y(t)$ поэтапно в рамках соответствующего алгоритма доопределяется с сохранением произвола при построении функций $Q_m(t,\tau)$, $q_m(t)$ так, что $Q_0(t,\tau)=0$, $q_0(t)=0$, $Q(t,\tau)=Q_k(t,\tau)$, $q(t)=q_k(t)$, $y(t)=y_k(t)$,

$$R_{j+1}(t)=\Phi_{j+1}(t)+\int_0^\omega Q_j(t,\tau)\Phi_{j+1}(\tau)d\tau,$$

$$q_{j+1}(t)=q_j(t)+\delta_{j+1}(t)+\int_0^\omega Q_j(t,\tau)\delta_{j+1}(\tau)d\tau,$$

где

$$\delta_{j+1}(t)=\Phi_{j+1}(t)\left(\widetilde{\Psi_{j+1}R_{j+1}}\right)^{-1}\left(\mu_{j+1}-\int_0^\omega \Psi_j(\tau)q_j(\tau)d\tau\right),$$

при этом предполагается

$$\det\widetilde{\Psi_{j+1}R_{j+1}}\neq 0,\quad j=\overline{0,k-1}. \tag{5}$$

Соотношение (4) принимается за основу как представление типа [2, гл. 4] решения задачи (1)–(3). С помощью [2, гл. 3] установлено, что эта задача в представлении (4) при выполнении условий (5) и

$$\det\tilde{A}\neq 0, \tag{6}$$

эквивалентна интегральной задаче

$$\begin{aligned}y(t)=\int_0^\omega \mathcal{K}(t,\tau)A(\tau)\left[y(\tau)+\int_0^\omega Q(\tau,z)y(z)dz\right]d\tau-\\ -\int_0^\omega Q(t,\tau)y(\tau)d\tau+F(t),\end{aligned} \tag{7}$$

где
$$\mathcal{K}(t,\tau) = \begin{cases} \tilde{A}^{-1}\int_0^{\omega} A(\sigma)d\sigma, & 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant \omega, \\ -\tilde{A}^{-1}\int_{\tau}^{\omega} A(\sigma)d\sigma, & 0 \leqslant t < \tau \leqslant \omega, \end{cases}$$
$$F(t) = \int_0^{\omega} \mathcal{K}(t,\tau)\left[A(\tau)q(\tau) + f(\tau)\right]d\tau - q(t) - \tilde{A}^{-1}\int_0^{\omega} f(\tau)d\tau.$$

Приняты следующие обозначения:
$$\alpha = \max_{t\in I}\|A(t)\|, \quad \gamma = \|\tilde{A}^{-1}\|, \quad b = \max_{t\in I}\int_0^{\omega}\|Q(t,\tau)\|d\tau,$$
$$q = \frac{1}{2}\gamma\alpha^2\omega^2(1+b) + b, \quad \sigma = \max_{t\in I}\|q(t)\|, \quad h = \max_{t\in I}\|F(t)\|,$$

где $\|\cdot\|$ — любая из норм, приведенных в [7, с. 21].

Лемма. *При выполнении условия* $q < 1$ *интегральная задача* (7) *однозначно разрешима, при этом справедлива оценка*
$$\|y(t)\| \leqslant h/(1-q).$$

Теорема. *Пусть выполнены условия* (5), (6), *а также* $q < 1$. *Тогда решение задачи* (1)–(3) *в представлении* (4) *существует и единственно, при этом справедлива оценка*
$$\|x(t)\| \leqslant (1+b)h/(1-q) + \sigma.$$

Для построения решения используется классический метод последовательных приближений, например, [3, с. 605].

Замечание. Применение метода Гаусса к системе (3) на основе
$$x(t) = \sum_{i=1}^{k}\Phi_i(t)c_i + y(t)$$
приводит к её решению типа (4) с более сложным алгоритмом построения векторов c_i.

1. *Лаптинский В.Н.* К методам регуляризации краевых задач для дифференциальных уравнений // Междунар. матем. конф. «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям»: материалы междунар. науч. конф., Минск, 1–4 июня 2021 г. Минск: Ин-т матем. НАН Беларуси, 2021. С. 98–100.
2. *Лаптинский В.Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. Минск: Ин-т матем. НАН Беларуси, 1998.
3. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
4. *Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскнер А.Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.
5. *Лаптинский В.Н.* К методике решения одной задачи теории гильбертовых пространств // IX Белорусская матем. конф.: тез. докл. междунар. конф. Гродно: ГрГУ, 2004. Ч. 1. С. 81–82.
6. *Лаптинский В.Н.* Об одной задаче теории векторных пространств // X Белорусская матем. конф.: тез. докл. междунар. науч. конф., Минск, 3–7 ноября 2008 г. Минск: Ин-т матем. НАН Беларуси, 2008. Ч. 3. С. 65–66.
7. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.