

УДК 621.839.36

В. П. Тарасик

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛАНЕТАРНОЙ ПЕРЕДАЧИ

UDC 621.839.36

V. P. Tarasik

MODELING OF PLANETARY GEAR

Аннотация

Изложена методика математического моделирования планетарной передачи. Приведены графики переходных характеристик и процессов разгона системы с учётом и без учёта упругих свойств зубчатых зацеплений. Отмечены существенные различия этих процессов и целесообразность установки корпуса передачи на эластичных подушках.

Ключевые слова:

планетарная передача, зубчатое зацепление, мотор-редуктор, математическая модель, переходная характеристика, процесс разгона динамической системы.

Abstract

The techniques of mathematical modeling of planetary gearing are presented. The graphs of transient characteristics and processes of the system acceleration are given with and without taking into account elastic properties of the gearing. Their significant differences are described, and the feasibility of placement of the gear housing on elastic cushions is shown.

Key words:

planetary gear, gearing, motor-reducer, mathematical model, transient characteristics, process of dynamic system acceleration.

Планетарные передачи находят широкое применение в различных технических объектах – в мобильных машинах в качестве механизмов трансмиссий, в мотор-редукторах и в других изделиях, где требуется получить большое передаточное число при малых габаритах.

При моделировании процессов функционирования технических объектов с планетарными передачами обычно не учитывается деформация зубьев зубчатых колес, что не позволяет в полной мере дать описание их физических свойств.

Рассмотрим методику моделирования планетарной передачи на примере

мотор-редуктора и оценим получаемые результаты с целью выявления влияния упругих свойств на характеристики переходных процессов. Используем в качестве примера одноступенчатый планетарный редуктор с цилиндрическими прямозубыми шестернями, заимствованный из [1], конструкция которого с отображением размеров всех основных деталей редуктора представлена на рис. 1.

На рис. 2 показана кинематическая схема рассматриваемой планетарной передачи. На ней приняты следующие обозначения: a – центральное колесо наружного зацепления ЦКНЗ; b – центральное колесо внутреннего зацепления ЦКВЗ; h – водило; s – сателлит. Числа зубьев

колёс: $z_a = 23$; $z_b = 127$; $z_s = 52$; модуль $m = 2$ мм. Коэффициент сдвига исходного контура для всех зубчатых

колёс $x = 0$. Количество сателлитов $n_s = 3$.

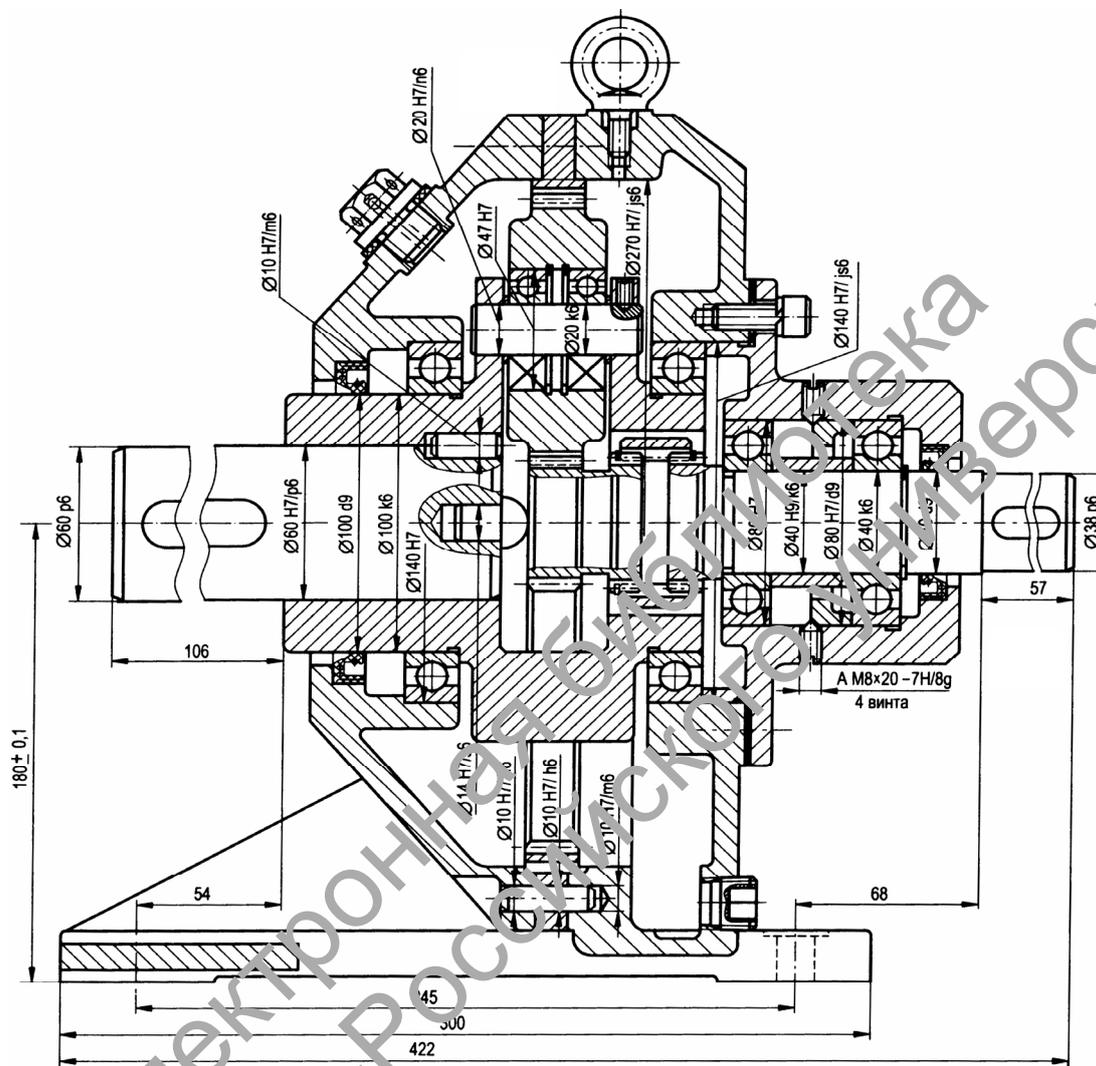


Рис. 1. Исследуемый планетарный редуктор

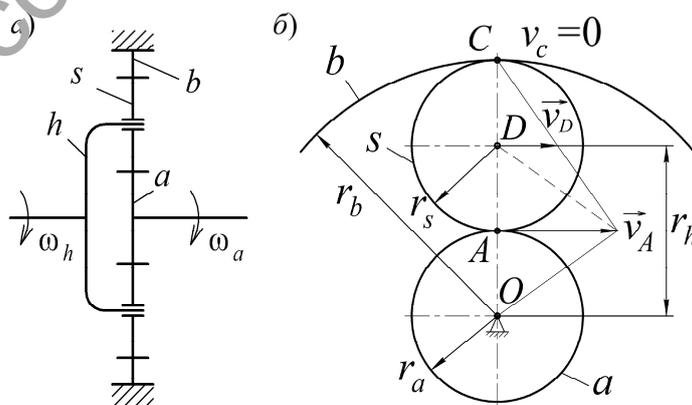


Рис. 2. Кинематическая схема планетарной передачи

Кинематические свойства планетарной передачи описываются уравнением

$$\omega_a - K\omega_b - (1 - K)\omega_h = 0, \quad (1)$$

где $\omega_a, \omega_b, \omega_h$ – угловые скорости соответствующих элементов передачи; K – кинематический параметр,

$$K = \frac{\omega_a}{\omega_b} \Big|_{\omega_h=0}. \quad (2)$$

При $\omega_h = 0$ водило остановлено, а колеса a и b вращаются в противоположные стороны, поэтому K отрицательно. Модуль кинематического параметра можно определить через соотношение чисел зубьев ЦКВЗ и ЦКНЗ: $|K| = z_b/z_a = 5,5217$. В планетарной передаче одно из звеньев (a, b или h) неподвижно. В рассматриваемой схеме это колесо b (см. рис. 2, a), поэтому её передаточное число u , согласно выражению (1), вычисляется из соотношения

$$u = \omega_a/\omega_h = 1 - K. \quad (3)$$

Так как K отрицательно, получаем $u = 6,5217$.

В качестве источника энергии рассматриваемого механизма примем асинхронный электродвигатель АИР132М4 с параметрами: мощность $P = 11$ кВт; номинальный вращающий момент $M_{\text{ном}} = 72$ Н·м; номинальная частота вращения $n_{\text{ном}} = 1450$ об/мин; момент инерции ротора $J = 0,0349$ кг·м².

Характерная особенность планетарной передачи в том, что она имеет три внешних звена, посредством которых взаимодействует с объектами внешней по отношению к ней среды, и внутреннее звено, связывающее между собой её внешние звенья. К внешним звеньям относятся зубчатые колёса a и b , а также водило h , к внутреннему звену – сателлит s .

Для построения математической

модели планетарной передачи составим её динамическую модель, учитывающую физические свойства передачи (инерционные, упругие, диссипативные, трансформаторные), а также воздействия на неё внешней среды (источника и потребителя энергии). Инерционными свойствами обладают вращающиеся зубчатые колёса и водило, способные накапливать кинетическую энергию. Их параметрами являются моменты инерции $J_i, i = \overline{1, n}$, где n – количество инерционных элементов. Упругие элементы отображают способность накапливать потенциальную энергию вследствие деформации звеньев планетарной передачи. Параметры упругих элементов – коэффициенты жёсткости $c_j, j = \overline{1, N}$, где N – количество упругих элементов. Если учесть упругие свойства зубчатых колёс планетарной передачи, то эти колёса окажутся связанными между собой упругой дифференциальной связью.

В результате динамическая модель планетарной передачи имеет вид (рис. 3), где моменты инерции J_2, J_3, J_4 отображают инерционные свойства основных звеньев передачи (зубчатых колёс a и b и водила h), а упругий элемент с коэффициентом жёсткости c_2 – их взаимодействие. Момент инерции J_1 характеризует инерционные свойства двигателя – источника энергии, а J_5 – приводимого рабочего органа – потребителя энергии. Параметры $\mu_j, j = \overline{1, N}$ характеризуют свойства диссипативных элементов, рассеивающих энергию. Параметрами трансформаторных элементов ТЭ₁ и ТЭ₂ являются передаточные числа u_1, u_2 и КПД η_1, η_2 .

Основное условие построения адекватной математической модели – выполнение требований закона сохранения энергии: кинетическая и потенциальная энергии компонентов модели и отображаемых ими элементов реального объекта должны полностью совпадать.

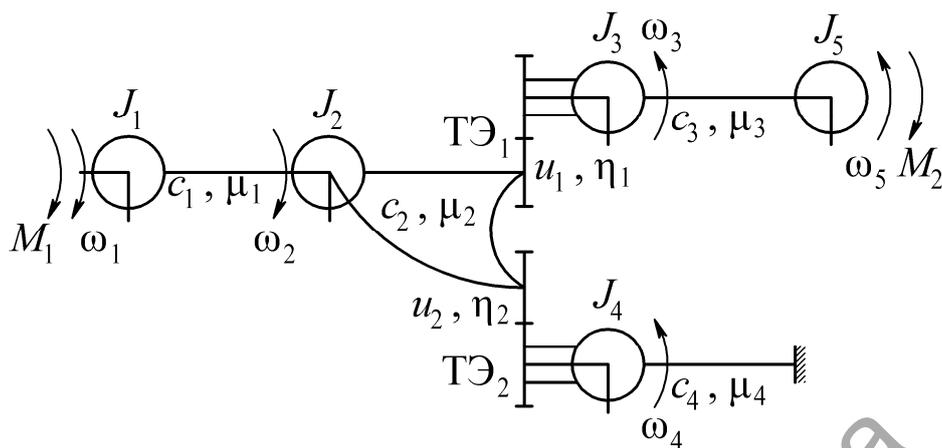


Рис. 3. Динамическая модель планетарной передачи

При определении кинетической энергии введённых в динамическую модель инерционных элементов необходимо учесть кинематические связи внешних звеньев планетарной передачи a , b и h с внутренним звеном s , принимая во внимание конструктивное исполнение этих звеньев и их геометрические размеры. Сателлиты совершают сложное движение, которое можно разложить на два составляющих (вращательное относительно собственной оси сателлита и вращательное совместно с водилом), т. е. представить его в виде суммы относительного и переносного движений. Кинетическая энергия сателлитов тогда будет равна сумме кинетических энергий в обоих видах движений $E_{кс} = E_{кс.отн} + E_{кс.пер}$. Значения этих составляющих вычисляются по формулам:

$$E_{кс.отн} = 0,5n_s J_s \omega_{s.отн}^2;$$

$$E_{кс.пер} = 0,5n_s m_s v_{s.пер}^2,$$

где J_s – момент инерции сателлита относительно собственной оси; n_s – количество сателлитов; $\omega_{s.отн}$ – угловая скорость вращения сателлита относительно собственной оси; m_s – масса са-

теллита; $v_{s.пер}$ – переносная линейная скорость оси сателлита, обусловленная вращением водила.

Для определения $\omega_{s.отн}$ и $v_{s.пер}$ рассмотрим кинематическую схему планетарной передачи, представленную на рис. 2, б. Значение $\omega_{s.отн}$ рассчитывается при $v_D = 0$:

$$\omega_{s.отн} = v_a / r_s = (r_a / r_s) \omega_a,$$

где r_a, r_s – радиусы делительных окружностей колёс a и s соответственно.

Принимая во внимание, что $r_s = (r_b - r_a) / 2$, $|K| = r_b / r_a$, получаем

$$\omega_{s.отн} = -\frac{2\omega_a}{1+K}.$$

Тогда

$$E_{кс.отн} = 2n_s J_s \frac{\omega_a^2}{(1+K)^2}. \quad (4)$$

Переносная скорость сателлита $v_{s.пер}$ определяется угловой скоростью водила ω_h , т. е. $v_{s.пер} = r_h \omega_h$, где r_h – радиус расположения осей сателлитов (см. рис. 2, б). С учётом этого

$$E_{кс.пер} = 0,5n_s m_s r_h^2 \omega_h^2. \quad (5)$$

В результате получаем следующие выражения для вычисления кинетических энергий основных звеньев планетарной передачи с учётом взаимодействия их с сателлитами:

$$E_{ка} = J_a \frac{\omega_a^2}{2} + 2n_s J_s \frac{\omega_a^2}{(1+K)^2}; \quad (6)$$

$$E_{кб} = J_b \frac{\omega_b^2}{2}; \quad (7)$$

$$E_{кх} = J_h \frac{\omega_h^2}{2} + n_s m_s \frac{r_h^2 \omega_h^2}{2}. \quad (8)$$

Для определения приведенных моментов инерции, соответствующих представленной на рис. 3 динамической модели, вычислим производные кинетических энергий основных звеньев планетарной передачи по их фазовым координатам, т. е. по угловым скоростям ω_a, ω_b и ω_h соответственно. В результате получаем следующие выражения для вычисления моментов инерций динамической модели планетарной передачи:

$$J_2 = J_a + \frac{4n_s J_s}{(1+K)^2}; \quad (9)$$

$$J_3 = J_b + n_s m_s r_h^2; \quad (10)$$

$$J_4 = J_b. \quad (11)$$

Коэффициенты жёсткости входного c_1 и выходного c_3 валов планетарного редуктора вычисляются по методике, изложенной в [2], в зависимости от их конфигурации и геометрических размеров. Значение c_4 реактивного упругого элемента зависит от способа крепления ЦКВЗ к корпусу и упругих свойств деталей крепежа. Если корпус передачи устанавливается на фундамент посредством резиновых подушек, то c_4 определяется их жёсткостью.

Определение c_2 осуществляется с учётом изгибных и контактных дефор-

маций зубьев планетарной передачи. В [3] изложена методика их определения. На её основе было получено значение коэффициента жёсткости c_2 зубчатой передачи исследуемого планетарного редуктора.

Передаточное число u_1 трансформаторного элемента ТЭ₁ соответствует формуле (3), а элемента ТЭ₂ – $u_2 = |K|$.

Для моделируемой передачи получены следующие значения параметров элементов динамической модели: $J_1 = 0,0349$; $J_2 = 5,715 \cdot 10^{-4}$; $J_3 = 5,845 \cdot 10^{-2}$ кг·м². Значение момента инерции J_4 зависит от способа крепления корпуса передачи к фундаменту. При установке его на резиновых подушках колесо b поворачивается под действием реактивного момента вместе с корпусом, поэтому момент инерции оказывается весьма значительным. В рассматриваемом примере получено $J_4 = 5,424 \cdot 10^{-1}$ кг·м². Если же корпус к фундаменту прикреплен жёстко, то деформируется только лишь конструктивный элемент крепления колеса к корпусу, например шпонка. В расчётах получилось в этом случае $J_4 = 4,458 \cdot 10^{-3}$ кг·м². Значение J_5 было принято равным 1,5 кг·м².

Коэффициенты жёсткости упругих элементов: $c_1 = 2,076 \cdot 10^4$; $c_2 = 5,727 \cdot 10^5$; $c_3 = 1,099 \cdot 10^5$; $c_4 = 6,408 \cdot 10^6$ Н·м/рад. Коэффициенты демпфирования диссипативных элементов вычислялись на основе частичных моделей [4] при следующих значениях относительных коэффициентов затухания: $\gamma_1 = 0,25$; $\gamma_2 = 0,1$; $\gamma_3 = 0,15$; $\gamma_4 = 0,25$. При жёстком креплении корпуса к фундаменту принималось $\gamma_4 = 0,1$. Получены следующие значения коэффициентов демпфирования: $\mu_1 = 1,709$; $\mu_2 = 3,007$; $\mu_3 = 23,585$;

$\mu_4 = 38,598 \text{ Н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}/\text{рад}$. При жёстком креплении корпуса $\mu_4 = 106,890$.

Для получения математической модели мотор-редуктора с планетарной

передачей использован структурно-матричный метод [4]. Система дифференциальных уравнений соответствует динамической модели на рис. 3:

$$\left. \begin{aligned} d\omega_1/dt &= (M_1 - M_{y1} - M_{д1})/J_1; \\ d\omega_2/dt &= (M_{y1} + M_{д1} - M_{y2} - M_{д2})/J_2; \\ d\omega_3/dt &= [(M_{y2} + M_{д2})u_1\eta_1 - M_{y3} - M_{д3}]/J_3; \\ d\omega_4/dt &= [(M_{y2} + M_{д2})u_2\eta_2 - M_{y4} - M_{д4}]/J_4; \\ d\omega_5/dt &= (M_{y3} + M_{д3} - M_2)/J_5; \\ dM_{y1}/dt &= c_1(\omega_1 - \omega_2); \\ dM_{y2}/dt &= c_2(\omega_2 - \omega_3u_1 - \omega_4u_2); \\ dM_{y3}/dt &= c_3(\omega_3 - \omega_5); \\ dM_{y4}/dt &= c_4\omega_4, \end{aligned} \right\} (12)$$

где M_1, M_2 – внешние воздействия; M_{y1}, \dots, M_{y4} – моменты упругих элементов; $M_{д1}, \dots, M_{д4}$ – моменты диссипативных элементов.

Моменты $M_{д1}, \dots, M_{д4}$ вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} M_{д1} &= \mu_1(\omega_1 - \omega_2); \\ M_{д2} &= \mu_2(\omega_2 - \omega_3u_1 - \omega_4u_2); \\ M_{д3} &= \mu_3(\omega_3 - \omega_5); \\ M_{д4} &= \mu_4\omega_4. \end{aligned} \right\} (13)$$

На основе уравнений (12) выполнено моделирование переходных характеристик и процесса разгона системы электродвигатель – мотор-редуктор – рабочий механизм.

На рис. 4 приведены переходные характеристики для двух вариантов крепления корпуса редуктора к фундаменту, графики на рис. 4, а, в, д соответствуют установке корпуса на резиновых подушках, а на рис. 4, б, г, е – жёсткому креплению.

Переходная характеристика – это реакция системы на внешнее ступенчатое воздействие. При моделировании

было принято скачкообразное изменение вращающего момента M_1 с 20 на 40 Н·м. Исходное состояние объекта – статическое равновесие, соответствующее постоянному внешнему воздействию $M_1 = 20 \text{ Н}\cdot\text{м}$. После скачкообразного изменения M_1 возникает переходный процесс, и объект постепенно переходит в новое статическое состояние. Поскольку время окончательного перехода сравнительно велико, полагают, что переходный процесс завершён, если переходная характеристика входит в заданный коридор стабилизации, ширина которого составляет 5 % от полного статического изменения регистрируемых графиков этих характеристик [4].

Согласно рис. 4, а–е, графики переходных характеристик рассматриваемых вариантов существенно различаются. При эластичном креплении корпуса процессы более плавные и быстрее затухают, а значения нагрузок на элементы объекта, оцениваемые величинами упругих элементов $M_{yi}, i = \overline{1,4}$, существенно меньше, чем при жёстком креплении.

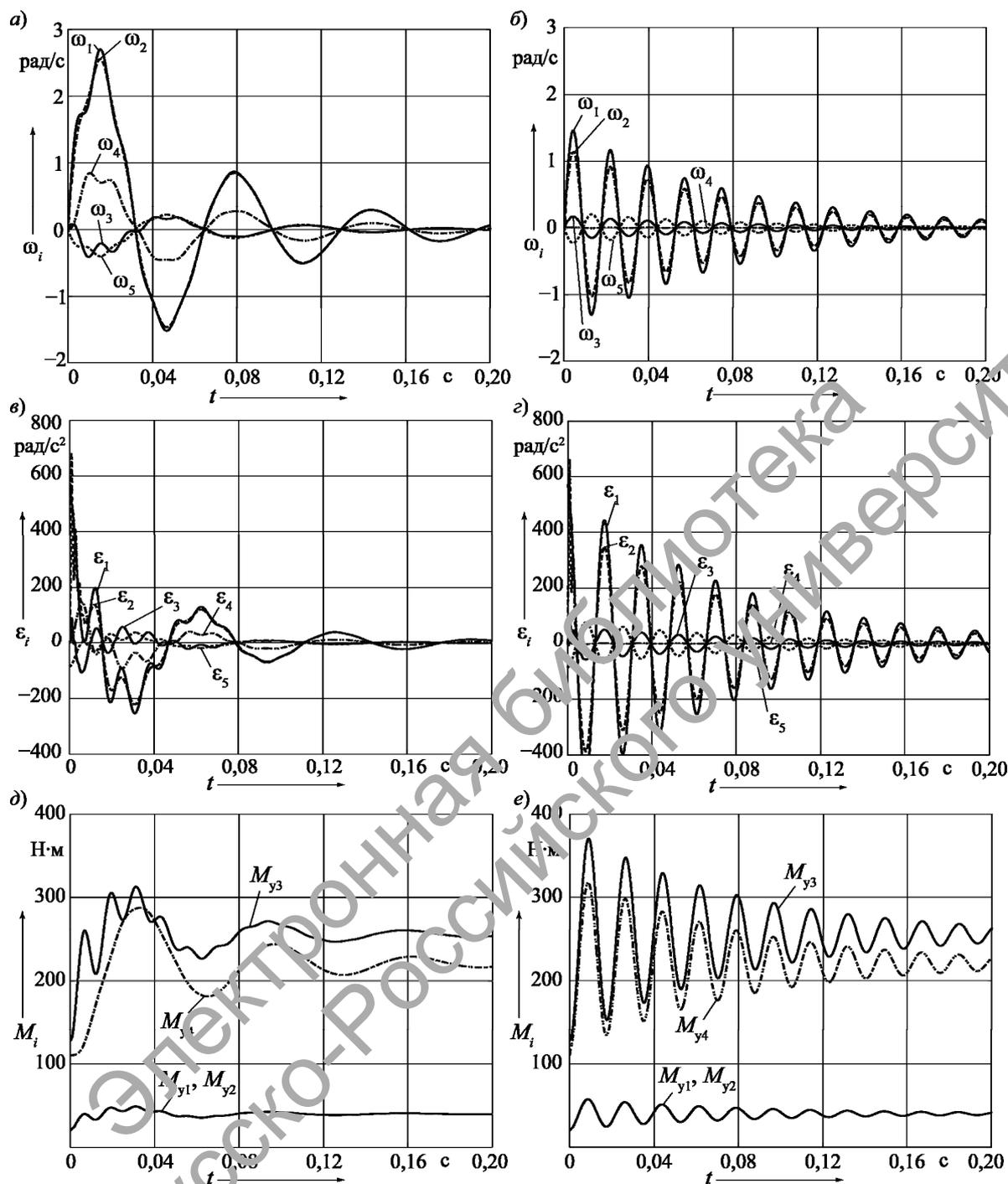


Рис. 4. Переходные характеристики объекта моделирования

В табл. 1 приведены численные значения показателей оценки качества переходных характеристик. Отметим, что коэффициент динамичности $k_{дi}$ и время переходного процесса $t_{пi}$ представляют собой общепринятые крите-

рии качества переходного процесса. В сопоставляемых вариантах коэффициенты динамичности различаются на 18 %, а время переходного процесса – на 85 %.

Табл. 1. Показатели оценки переходных характеристик планетарной передачи

Показатель оценки переходной характеристики	С учётом упругих свойств зубчатого зацепления		Без учёта упругих свойств зубчатого зацепления
	с эластичной установкой корпуса передачи	с жёстким креплением корпуса передачи	
Максимальный момент, Н·м, и коэффициент динамичности $M_{yi}/k_{дi}$: входной вал выходной вал зубчатое зацепление реактивный элемент	49,2 / 1,23	57,8 / 1,45	59,8 / 1,46
	313,5 / 1,23	371,5 / 1,45	378,7 / 1,48
	49,2 / 1,23	57,8 / 1,45	–
	288,2 / 1,30	318,1 / 1,44	–
Максимальное угловое ускорение сосредоточенной массы, рад/с ² : ротор двигателя рабочий механизм ЦКНЗ ЦКВЗ водило	570,3	584,7	578,3
	40,2	78,7	71,5
	622,7	663,5	226,5
	136,5	0	1
	104,4	101,2	34,2
Время переходного процесса, с	0,1	0,185	0,117

При моделировании разгона исследуемого объекта характеристика воздействия электродвигателя $M_1(t)$ описывалась выражением

$$M_1(t) = \begin{cases} M_{10} + At & \text{при } t < t_1; \\ M_{1\max} & \text{при } t_1 \leq t \leq t_2; \\ B + C/\omega_1 & \text{при } t > t_2, \end{cases} \quad (14)$$

где M_{10} – начальное значение вращающего момента электродвигателя; $M_{1\max}$ – максимальный момент электродвигателя; A, B, C – параметры характеристики момента $M_1(t)$; t_1, t_2 – значения временных интервалов характеристики момента; t – текущее время.

На рис. 5, а, б, в, д представлены характеристики разгона при установке корпуса планетарной передачи на резиновых подушках, а на рис. 5, б, г, е – при жёстком креплении корпуса к фундаменту.

Графики на рис. 5 получены при следующих параметрах характеристики воздействия электродвигателя (4):
 $M_{10} = 20$ Н·м; $M_{1\max} = 70$ Н·м;
 $A = 500$ Н·м/с; $B = 6,957$ Н·м;

$C = 1980,5$ Н·м·рад/с. Значение момента нагрузки рабочего механизма $M_2 = M_{10} u_1 \eta_1$. Из приведенных графиков видно существенное различие полученных характеристик. При эластичном креплении происходит быстрое затухание колебаний моментов упругих элементов M_{yi} и затем осуществляется плавный разгон сосредоточенных масс системы J_i . При жёстком же креплении корпуса в течение длительного времени наблюдаются высокочастотные колебания моментов M_{yi} , угловых скоростей ω_i и угловых ускорений ε_i сосредоточенных масс с большими амплитудами, что отрицательно отражается на плавности процесса разгона.

В табл. 2 приведены значения показателей оценки качества процесса разгона сравниваемых вариантов.

Если не учитывать упругие свойства зубчатых зацеплений планетарной передачи, то динамическая модель приобретает следующий вид (рис. 6).

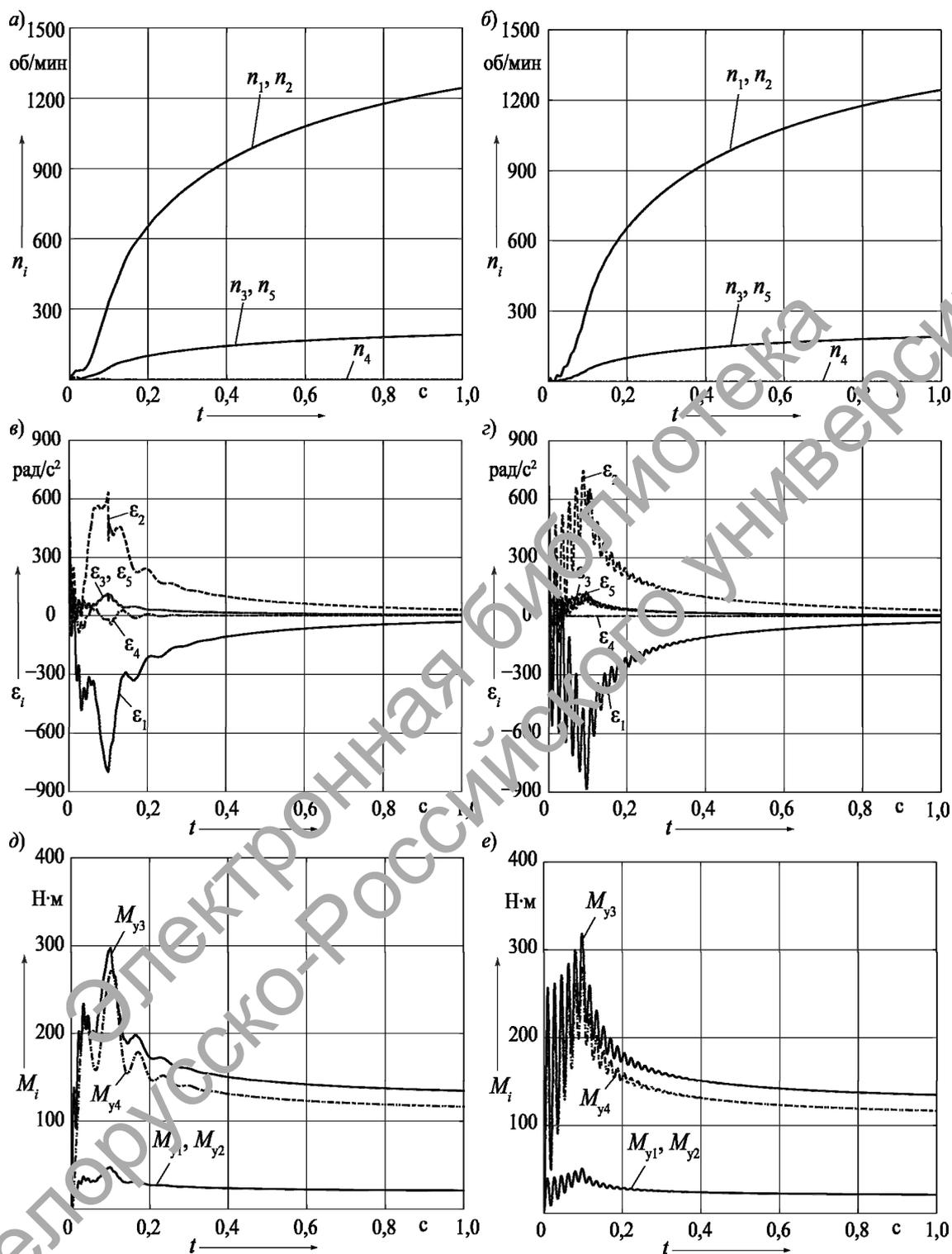


Рис. 5. Графики процесса разгона системы электродвигатель – мотор-редуктор – рабочий механизм

Табл. 2. Показатели оценки процесса разгона системы электродвигатель – мотор-редуктор – рабочий механизм

Показатель оценки процесса разгона	С учётом упругих свойств зубчатого зацепления		Без учёта упругих свойств зубчатого зацепления
	с эластичной установкой корпуса передачи	с жёстким креплением корпуса передачи	
Максимальный момент M_{yi} , Н·м:			
входной вал	47,5	50,6	47,9
выходной вал	297,3	318,1	298,2
зубчатое зацепление	47,5	50,6	–
реактивный элемент	271,7	279,2	–
Максимальное угловое ускорение сосредоточенной массы, рад/с ² :			
ротор двигателя	572,9 / –799,0	573,1 / –884,3	573,1 / –799,4
рабочий механизм	70,8 / –85,1	126,9 / –85,1	113,6 / –85,2
ЦКНЗ	693,6 / –8,1	746,1 / –325,2	699,1 / –88,1
ЦКВЗ	150,4 / –85,7	≈ 0	–
водило	91,1 / –102,6	113,5 / –47,9	107,2 / –13,5

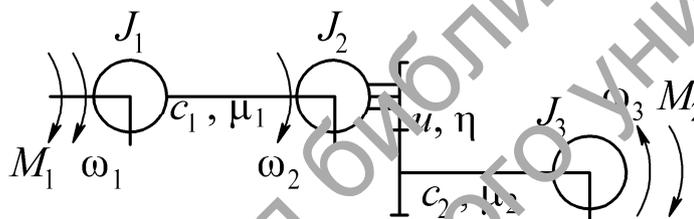


Рис. 6. Упрощённая динамическая модель планетарной передачи

Момент инерции J_2 учитывает инерционные свойства всех компонентов планетарной передачи и определяется из условия сохранения неизменной кинетической энергии $E_k = E_{ka} + E_{kb} + E_{kh}$. На основе этого равенства осуществляется приведение моментов инерции всех компонентов планетарной передачи J_a, J_b, J_h к массе колеса a , т. е. к моменту инерции J_2 на рис. 6. Поскольку

в данном случае колесо b планетарной передачи неподвижно, то принимаем $J_b = 0$. В результате

$$J_2 = J_a + J_h/u^2. \quad (15)$$

Математическая модель мотор-редуктора в данном случае описывается системой дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} d\omega_1/dt &= (M_1 - M_{y1} - M_{д1})/J_1; \\ d\omega_2/dt &= [M_{y1} + M_{д1} - (M_{y2} + M_{д2})/(u\eta)]/J_2; \\ d\omega_3/dt &= (M_{y2} + M_{д2} - M_2)/J_3; \\ dM_{y1}/dt &= c_1(\omega_1 - \omega_2); \\ dM_{y2}/dt &= c_2(\omega_2/u - \omega_3). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

На рис. 7, а–в показаны графики переходных характеристик для модели без учёта упругих свойств зубчатых зацеплений. По форме они аналогичны графикам, представленным на рис. 4, б, г, е, а различаются количественными значениями показателей, что

видно из табл. 1. В табл. 1 и 2 даны значения моментов в упругих элементах M_{yi} и максимальных угловых ускорений ε_i сосредоточенных масс системы, полученные без учёта упругих свойств зубчатых зацеплений.

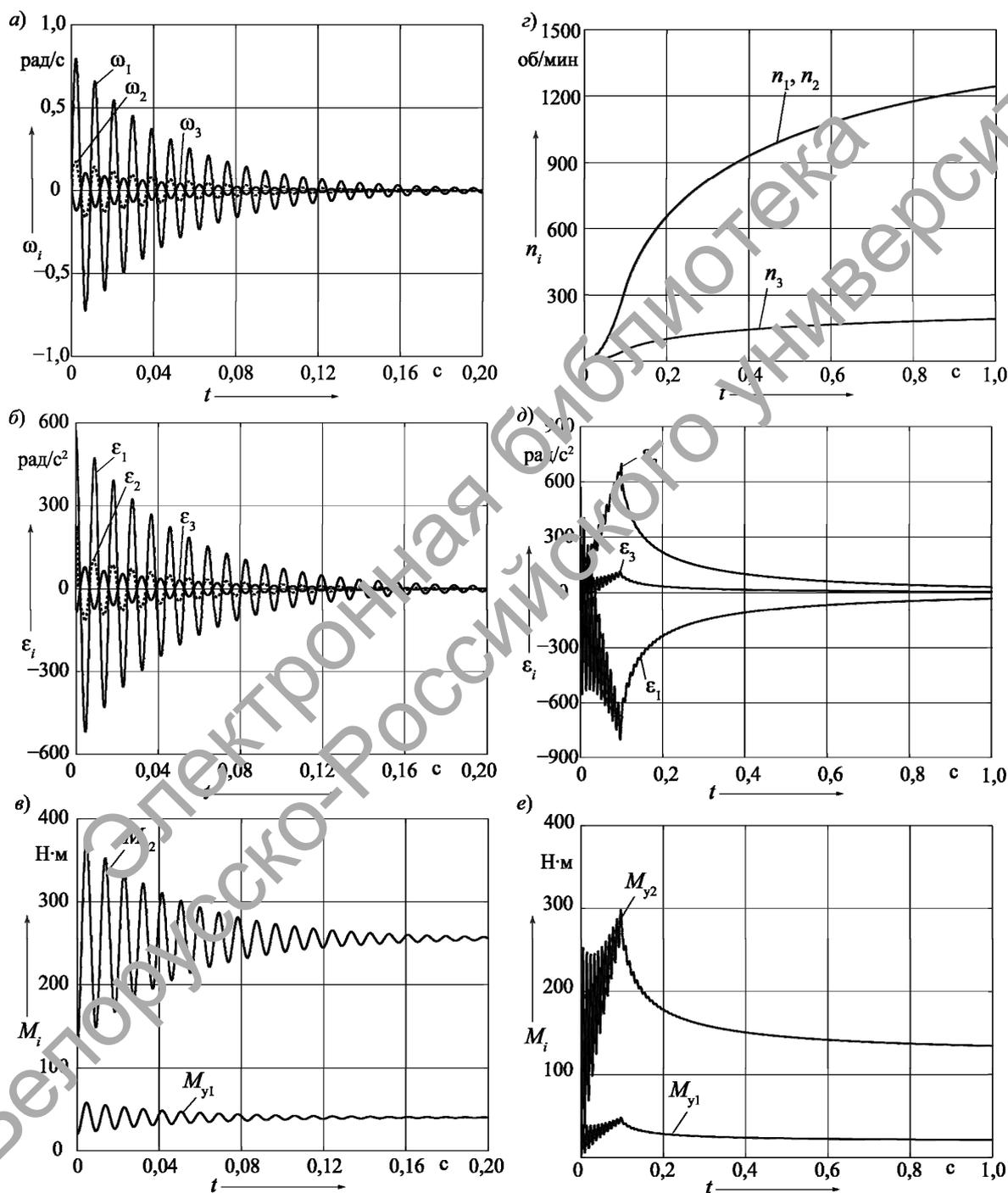


Рис. 7. Переходные характеристики (а–в) и характеристики разгона (г–е), полученные на основе упрощённой динамической модели

В табл. 3 приведены значения резонансных частот сравниваемых вариантов моделей. Очевидно, что они также существенно различаются. В трёх-массовой модели выявляются только

высокие частоты. Применение упрощённой модели не позволяет обнаружить низкочастотный резонанс проектируемого объекта.

Табл. 3. Резонансные частоты колебаний сосредоточенных масс динамических моделей

В герцах

Вид динамической модели	Номер резонансной частоты			
	1	2	3	4
5-массовая:				
с эластичной установкой корпуса	$6,045 \cdot 10^3$	$5,588 \cdot 10^2$	$8,009 \cdot 10^1$	$1,544 \cdot 10^1$
с жёстким креплением корпуса	$6,799 \cdot 10^3$	$1,713 \cdot 10^3$	$5,378 \cdot 10^2$	$5,690 \cdot 10^1$
3-массовая	$6,603 \cdot 10^3$	$1,087 \cdot 10^2$	–	–

Предлагаемая методика моделирования динамических характеристик планетарной передачи позволяет получить адекватное описание её физических свойств и обеспечить высокую точность определения показателей качества переходных характеристик и

процесса разгона объекта исследования. На её основе можно осуществлять оптимизацию параметров и характеристик планетарной передачи и всей механической системы в целом, в составе которой исполнена данная передача.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атлас конструкций узлов и деталей машин / О. А. Ряховский [и др.] ; под ред. О. А. Ряховского. – М. : МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2005. – 380 с.
2. Проектирование трансмиссий автомобилей : справочник / А. И. Гришкевич [и др.] ; под ред. д-ра техн. наук, проф. А. И. Гришкевича. – М. : Машиностроение, 1984. – 272 с.
3. Тарасик, В. П. Определение параметров жёсткости зубчатых передач автомобилей и тракторов / В. П. Тарасик // Тракторы и сельхозмашины. – 2016. – № 11. – С. 23–29.
4. Тарасик, В. П. Математическое моделирование технических систем : учебник / В. П. Тарасик. – Минск : Новое знание ; М. : ИНФРА-М, 2016. – 592 с.

Статья сдана в редакцию 29 сентября 2016 года

Владимир Петрович Тарасик, д-р техн. наук, проф., Белорусско-Российский университет. Тел.: +375-222-25-36-45.

Vladimir Petrovich Tarasik, DSc (Engineering), Prof., Belarusian-Russian University. Phone: +375-222-25-36-45.