УДК 517.925

Анализ многоточечной краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова

А. Н. Бондарев

Выведены эффективно проверяемые достаточные условия однозначной разрешимости многоточечной краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова на основе правосторонней декомпозиции коэффициентов. Для построения решения разработан алгоритм с вычислительной схемой классического метода последовательных приближений.

Ключевые слова: матричное уравнение Ляпунова, многоточечная краевая задача, существование и единственность решения, алгоритм, сходимость.

Analysis of the multipoint boundary value problem for the Lyapunov matrix equation

A. N. Bondarev

Efficiently verifiable sufficient conditions for the unique solvability of the multipoint boundary value problem for the matrix Lyapunov equation are derived on the basis of a right-sided decomposition of the coefficients. To construct a solution,an algorithm with a computational scheme of the classical method of successive approximations has been developed.

Key words: Lyapunov matrix equation, multipoint boundary value problem, existence and uniqueness of solution, algorithm, convergence.

Рассмотрим краевую задачу для матричного уравнения

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + P(t)XQ(t) + XB(t) + F(t), \quad X \in \mathbb{R}^{n\times m}, \tag{1}$$

с условием

$$\sum_{i=1}^{k} M_i X(t_i) = 0, \quad 0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = \omega, \tag{2}$$

где $A(t)$, $P(t)$, $Q(t)$, $B(t)$, $F(t)$ – матрицы класса $\mathbb{C}[0,\omega]$ соответствующих размерностей, M_i – заданные постоянные $(n\times n)$-матрицы.

В данной работе, являющейся обобщением [1–3], задача (1), (2) исследуется в конечномерной банаховой алгебре $\mathfrak{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_C = \max\limits_{t\in[0,\omega]} \|X(t)\|$ на основе декомпозиции матрицы $B(t)$ в виде [3]:

$$B(t) = B_1(t) + B_2(t), \qquad (3)$$

где матрицы $B_1(t)$, $B_2(t)$ выбираются определенным способом (например, согласно, [4, гл. 1]).

Предлагаемая декомпозиция (3) для определенного типа краевых задач может быть более эффективной, чем левосторонняя. Это относится и к декомпозиции матриц $A(t)$, $B(t)$. Выбор декомпозиции зависит от алгебраических и функциональных свойств этих матриц.

Введем следующие обозначения:

$$\gamma = \left\|\Phi^{-1}\right\|, \quad m_i = \|M_i\|, \quad \alpha = \max_t \|A(t)\|, \quad \beta_2 = \max_t \|B_2(t)\|, \quad h = \max_t \|F(t)\|,$$

$$\delta_1 = \max_t \|P(t)\|, \quad \delta_2 = \max_t \|Q(t)\|, \quad \mu_1 = \max_t \|V(t)\|, \quad \mu_2 = \max_t \left\|V^{-1}(t)\right\|,$$

$$v_i = \|V_i\|, \quad q = \gamma\mu_1\mu_2(\alpha+\delta_1\delta_2+\beta_2)\omega\sum_{i=1}^{k} m_i v_i, \quad N = \gamma\mu_1\mu_2\omega h\sum_{i=1}^{k} m_i v_i,$$

где $t \in [0,\omega]$, $\|\cdot\|$ – определенная норма матриц в $\mathfrak{B}(n)$, например любая из норм, приведенных в [5, с. 21]; Φ – линейный матричный оператор типа [6], $\Phi Y \equiv \sum_{i=1}^{k} M_i Y V_i$; $V_i = V(t_i)$, $V(t)$ – фундаментальная матрица уравнения

$$\frac{dV}{dt} = VB_1(t). \qquad (4)$$

Теорема. *Пусть оператор* Φ *однозначно обратим и выполнено условие* $q<1$. *Тогда задача* (1), (2) *однозначно разрешима; ее решение* $X(t)$ *представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию* (2)*, при этом справедлива оценка*

$$\|X\|_C \le N/(1-q). \qquad (5)$$

Доказательство. Сначала по методике [4] на основе (4) выведем матричное интегральное уравнение

$$X(t) = \left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} [A(\tau)X(\tau) + P(\tau)X(\tau)Q(\tau) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + X(\tau)B_2(\tau) + F(\tau)]V^{-1}(\tau)d\tau\, V_i\right\}\right)V(t), \qquad (6)$$

эквивалентное задаче (1), (2).

Уравнение (6) относится к типу уравнений [6, 7] и представляет собой весьма непростой объект для конструктивного исследования ввиду отсутствия явного представления оператора Φ^{-1}. Случай $k=2$ в научной литературе достаточно хорошо изучен. В общем случае в работе [6] предложены два формальных способа построения Φ^{-1}: в одном из них используется алгебраический аппарат, другой фактически основан на методе малого параметра.

Замечание. Матричное уравнение $\Phi Z = H$ с $(n\times n)$-матрицей Φ и $(n\times m)$-матрицей Z равносильно векторно-матричному уравнению $\tilde{\Phi}\tilde{Z} = \tilde{H}$, где $\tilde{\Phi}$ – квадратная матрица порядка nm, $\tilde{Z}$, $\tilde{H}$ – nm-векторы, определяемые на основе матриц Z, H. Очевидно, в случае $\det\tilde{\Phi} \neq 0$ оператор Φ однозначно обратим; это подразумевается в данной работе.

Разрешимость уравнения (6) будем изучать на основе принципа сжимающих отображений, применив метод последовательных приближений с вычислительной схемой, используемой в работах [1–3],

$$X_p(t) = \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} [A(\tau)X_{p-1}(\tau) + P(\tau)X_{p-1}(\tau)Q(\tau) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + X_{p-1}(\tau)B_2(\tau) + F(\tau)]V^{-1}(\tau)d\tau\, V_i \right\} \right) V(t), \quad p = 1, 2, ... \tag{7}$$

В качестве начального приближения принимаем произвольную матрицу $X_0(t) \in \mathbb{C}([0,\omega], \mathbb{R}^{n\times m})$. Очевидно, алгоритм (7) определяет последовательность $\{X_p(t)\}_1^\infty \subset \mathbb{C}^1([0,\omega], \mathbb{R}^{n\times m})$. Сначала докажем, что функции $X_p(t)$ удовлетворяют краевому условию (2). На основании (7) имеем

$$\frac{dX_p(t)}{dt} = X_p(t)B_1(t) +$$

$$+\left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{k} M_i [A(t)X_{p-1}(t) + P(t)X_{p-1}(t)Q(t) + X_{p-1}(t)B_2(t) + F(t)]V^{-1}(t)V_i \right\} \right) V(t) =$$

$$= X_p(t)B_1(t) +$$

$$+(\Phi^{-1}\{\Phi[A(t)X_{p-1}(t) + P(t)X_{p-1}(t)Q(t) + X_{p-1}(t)B_2(t) + F(t)]V^{-1}(t)\})V(t) =$$

$$= X_p(t)B_1(t) + [A(t)X_{p-1}(t) + P(t)X_{p-1}(t)Q(t) + X_{p-1}(t)B_2(t) + F(t)]V^{-1}(t)V(t) =$$

$$= X_p(t)B_1(t) + [A(t)X_{p-1}(t) + P(t)X_{p-1}(t)Q(t) + X_{p-1}(t)B_2(t) + F(t)].$$

Таким образом, получили соотношение

$$\frac{dX_p(t)}{dt} = X_p(t)B_1(t) + [A(t)X_{p-1}(t) + P(t)X_{p-1}(t)Q(t) + X_{p-1}(t)B_2(t) + F(t)]. \tag{8}$$

Из (8) имеем

$$[A(t)X_{p-1}(t) + P(t)X_{p-1}(t)Q(t) + X_{p-1}(t)B_2(t) + F(t)]dt = dX_p(t) - X_p(t)B_1(t)dt. \tag{9}$$

Используя (9), запишем (7) в следующем виде:

$$X_p(t) = \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} [dX_p(\tau) - X_p(\tau)B_1(\tau)d\tau]V^{-1}(\tau)\, V_i \right\} \right) V(t). \tag{10}$$

Выполнив в (10) интегрирование по частям, получим

$$X_p(t)=X_p(t)-\left(\Phi^{-1}\sum_{i=1}^{k}M_iX_p(t_i)\right)V(t).$$

Отсюда имеем соотношение

$$\left(\Phi^{-1}\sum_{i=1}^{k}M_iX_p(t_i)\right)V(t)=0$$

или

$$\sum_{i=1}^{k}M_iX_p(t_i)=0.$$

Стало быть, все члены последовательности $\{X_p(t)\}_1^{\infty}$ удовлетворяют краевому условию (2).

При изучении сходимости построенной последовательности будем следовать известному приему (см., например, [8, 9]), рассматривая ряд

$$X_0(t)+(X_1(t)-X_0(t))+\ldots+(X_p(t)-X_{p-1}(t))+\ldots \tag{11}$$

Докажем равномерную по $t\in[0,\omega]$ сходимость ряда (11) на основе построения соответствующего мажорантного сходящегося числового ряда.

Из (7) имеем

$$X_{p+1}(t)-X_p(t)=\mathfrak{L}(X_p)-\mathfrak{L}(X_{p-1}),\quad p=1,2,\ldots, \tag{12}$$

где

$$\mathfrak{L}(Y)=$$

$$=\left(\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}[A(\tau)Y(\tau)+P(\tau)Y(\tau)Q(\tau)+Y(\tau)B_2(\tau)+F(\tau)]V^{-1}(\tau)d\tau\,V_i\right\}\right)V(t).$$

Производя оценки по норме в (12), получим последовательно:

$$\|X_{p+1}(t)-X_p(t)\|=\|\mathfrak{L}(X_p)-\mathfrak{L}(X_{p-1})\|\le$$

$$\le\left\|\Phi^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{k}M_i\int_{t_i}^{t}[A(\tau)(X_p(\tau)-X_{p-1}(\tau))+P(\tau)(X_p(\tau)-X_{p-1}(\tau))Q(\tau)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(X_p(\tau)-X_{p-1}(\tau))B_2(\tau)]V^{-1}(\tau)d\tau\,V_i\right\}\right\|\|V(t)\|\le$$

$$\le\|\Phi^{-1}\|\sum_{i=1}^{k}\|M_i\|\|V_i\|\|V(t)\|\int_0^{\omega}[\|A(\tau)\|+\|P(\tau)\|\|Q(\tau)\|+\|B_2(\tau)\|]\|V^{-1}(\tau)\|d\tau\|X_p-X_{p-1}\|_C\le$$

$$\le\gamma\sum_{i=1}^{k}m_i\nu_i\mu_1\mu_2(\alpha+\delta_1\delta_2+\beta_2)\omega\|X_p-X_{p-1}\|_C=q\|X_p-X_{p-1}\|_C.$$

Отсюда следует оценка

$$\|X_{p+1}-X_p\|_C\le q\|X_p-X_{p-1}\|_C,\quad p=1,2,\ldots \tag{13}$$

На основе (13) имеем явную оценку

$$\|X_p-X_{p-1}\|_C\le q^p\|X_1-X_0\|_C,\quad p=1,2,\ldots, \tag{14}$$

при этом $\|X_1 - X_0\|_C = \|\mathfrak{L}(X_0) - X_0\|_C$.

Используя (14), можно доказать с помощью соответствующей методики (например, [8, 9]), что ряд (11), а значит, и последовательность $\{X_r\}_0^\infty$, сходится равномерно по $t \in [0, \omega]$ к решению интегрального уравнения (6), при этом справедлива оценка

$$\|X - X_r\|_C \le \frac{q^r}{1-q}\|X_1 - X_0\|_C, \quad r = 0, 1, 2, \ldots \tag{15}$$

На основе (15) имеем оценку области локализации решения $X(t)$, определяемую согласно алгоритму (7),

$$\|X\|_C \le \|X_0\|_C + \frac{\|X_1 - X_0\|_C}{1-q}. \tag{16}$$

Очевидно, из (16) при $X_0 \equiv 0$ следует оценка (5), при этом

$$\|X_1 - X_0\|_C = \|X_1\|_C = \|\mathfrak{L}(0)\|_C.$$

Получим оценку для $\|\mathfrak{L}(0)\|$:

$$\|\mathfrak{L}(0)\| = \left\| \left(\Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{k} M_i \int_{t_i}^{t} F(\tau) V^{-1}(\tau) d\tau \, V_i \right\} \right) V(t) \right\| \le$$

$$\le \left\|\Phi^{-1}\right\| \sum_{i=1}^{k} \|M_i\| \|V_i\| \int_0^{\omega} \left\|F(\tau)V^{-1}(\tau)\right\| d\tau \|V(t)\| \le \gamma \sum_{i=1}^{k} m_i v_i \mu_1 \mu_2 \omega h = N.$$

Теорема полностью доказана.

Библиографический список

1. *Бондарев, А. Н.* Регуляризация многоточечной краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова / А. Н. Бондарев // Актуальные проблемы науки и техники: материалы I Междунар. науч.-техн. конф. – Сарапул, 20–22 мая 2021 г. Ижевск : Изд-во УИР ИжГТУ им. М. Т. Калашникова. 2021. С. 50–55.

2. *Бондарев, А. Н.* Многоточечная краевая задача для уравнения Ляпунова в случае слабого вырождения краевых условий / А. Н. Бондарев, В. Н. Лаптинский // Дифференц. уравнения. – 2019. – Т. 55, № 3. – С. 423–427.

3. *Бондарев, А. Н.* Конструктивный анализ многоточечной краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова на основе правосторонней декомпозиции / А. Н. Бондарев // Весн. Магілёўскага дзярж. ўн-та імя А. А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі (матэматыка, фізіка, біялогія). – 2018. – № 2 (52). – С. 33–44.

4. *Лаптинский, В. Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. Мн. : ИМ НАН Беларуси. 1998. 300 с.

5. *Демидович, Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. Москва : Наука, 1967. – 472 с.

6. *Murty, K. N.* Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems – existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journal of Mathematical. Analysis and Applications. 1992. V. 167. P. 505–515.

7. *Зубов, В. И.* Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – Москва : Наука, 1975. – 496 с.

8. *Канторович, Л. В.* Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – Москва : Наука, 1977. – 744 с.

9. *Бибиков, Ю. Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Н. Бибиков. – Москва : Высш. шк., 1991. – 303 с.

Сведения об авторе

Александр Николаевич Бондарев, старший преподаватель кафедры «Высшая математика» Межгосударственного образовательного учреждения высшего образования «Белорусско-Российский университет» (Республика Беларусь, г. Могилёв), alex-bondarev@tut.by