УДК 517.925

Анализ разрешимости и построение решения краевой задачи Валле – Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка

А. И. Кашпар

На основе применения конструктивного метода регуляризации получены эффективно проверяемые достаточные условия однозначной разрешимости задачи Валле – Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка. Разработан итерационный алгоритм классического типа построения решения, удобный для применений, а также выведена оценка его области локализации.

Ключевые слова: матричное дифференциальное уравнение, краевая задача, однозначная разрешимость, алгоритм построения решения.

Analysis of solvability and construction of a solution to the boundary value problem de la Valle Poussin for nonlinear matrix equation Lyapunov second order

A. I. Kashpar

By applying the constructive regularization method, the effectively verifiable sufficient conditions of one-valued solvability of a de la Vallée Poussin problem for a nonlinear matrix equation Lyapunov second order. An iterative algorithm of the classical type for constructing a solution has been developed, and also assessment of its localization area has been received.

Keywords: matrix differential equation, boundary value problem, the one-valued solvability, algorithm for constructing a solution.

Рассмотрим краевую задачу [1–4 и др.]:

$$\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2}=\mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt}+\mathbf{C}_1(t)\frac{d\mathbf{X}}{dt}\mathbf{C}_2(t)+\frac{d\mathbf{X}}{dt}\mathbf{B}(t)+\mathbf{F}\left(t,\mathbf{X},\frac{d\mathbf{X}}{dt}\right), \qquad (1)$$

$$\mathbf{X}(0)=\mathbf{M},\quad \mathbf{X}(\omega)=\mathbf{N}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}_i\in\mathbf{C}\left(I,\mathbf{R}^{n\times n}\right),\mathbf{F}\in\mathbf{C}\left(D,\mathbf{R}^{n\times n}\right),D=\left\{(t,\mathbf{X},\mathbf{Y}):t\in I,\|\mathbf{X}\|<\tilde{\rho}_1,\|\mathbf{Y}\|<\tilde{\rho}_2\right\}$ $(\mathbf{Y}=d\mathbf{X}/dt), i=1,2;$ $\mathbf{M},\mathbf{N}$ – заданные вещественные матрицы. Предположим также, что функция $\mathbf{F}(t,\mathbf{X},\mathbf{Y})$ удовлетворяет относительно $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ в области D условию Липшица (локально); $0<\tilde{\rho}_i\le\infty, I=[0,\omega]$.

В данной работе, являющейся продолжением и обобщением [1–4], с помощью конструктивного метода [5] задача (1), (2) исследуется в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой

$\|\mathbf{X}\|_C = \max_{t\in I}\|\mathbf{X}(t)\|$, где $\|\cdot\|$ – норма матриц в рамках определения этой алгебры, например одна из норм, приведенных в [6].

Вместо задачи (1), (2) рассмотрим эквивалентную ей задачу

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}}{dt} &= \mathbf{Y}, \\ \frac{d\mathbf{Y}}{dt} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{Y} + \mathbf{C}_1(t)\mathbf{Y}\mathbf{C}_2(t) + \mathbf{Y}\mathbf{B}(t) + \mathbf{F}(t,\mathbf{X},\mathbf{Y}), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{M}, \quad \mathbf{X}(\omega) = \mathbf{N}. \tag{4}$$

Введем следующие обозначения:

$$h_1 = \max_{t\in I}\|\mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_1(\mathbf{0},\mathbf{0})\|,\ h_2 = \max_{t\in I}\|\mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) + \mathcal{L}_2(\mathbf{0},\mathbf{0})\|,\ h = \max_{t\in I}\|\mathbf{F}(t,0,0)\|,$$

$$\gamma = \|\mathbf{\Phi}^{-1}\|,\ c_i = \max_{t\in I}\|\mathbf{C}_i(t)\|,\ \lambda_U = \max_{0\le s\le\tau\le\omega}\|\mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s)\|,\ \lambda_V = \max_{0\le s\le\tau\le\omega}\|\mathbf{V}(s)\mathbf{V}^{-1}(\tau)\|,$$

$$G = \left\{(t,\mathbf{X},\mathbf{Y}) : t\in[0,\omega], \|\mathbf{X}\|\le\rho_1, \|\mathbf{Y}\|\le\rho_2\right\},\ \tilde{G} = \left\{(\mathbf{X}(t),\mathbf{Y}(t)) : \|\mathbf{X}\|_C\le\rho_1, \|\mathbf{Y}\|_C\le\rho_2\right\},$$

$$p_1 = \frac{1}{3}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^3 L_1,\ p_2 = \frac{1}{2}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^2 L_1,\ q_1 = \frac{1}{3}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^3(c_1c_2 + L_2),$$

$$q_2 = \frac{1}{2}\gamma\lambda_{\mathbf{U}}^2\lambda_{\mathbf{V}}^2\omega^2(c_1c_2 + L_2), \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix}\|\mathbf{X}\|_C \\ \|\mathbf{Y}\|_C\end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2\end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{U}}(\tau,s) = \mathbf{U}(\tau)\mathbf{U}^{-1}(s), \quad \mathbf{K}_{\mathbf{V}}(s,\tau) = \mathbf{V}(s)\mathbf{V}^{-1}(\tau),$$

где $0<\rho_i<\tilde{\rho}_i$; $i=1,2$; $\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{V}(t)$ – интегральные матрицы уравнений $d\mathbf{U}/dt = \mathbf{A}(t)\mathbf{U}$ ($\mathbf{U}(0)=\mathbf{E}$), $d\mathbf{V}/dt = \mathbf{V}\mathbf{B}(t)$ ($\mathbf{V}(0)=\mathbf{E}$), $\mathbf{E}$ – единичная матрица;

$$\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) = \int_0^t \mathbf{U}(\tau)(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M}))\mathbf{V}(\tau)d\tau, \quad \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) = \mathbf{U}(t)\left(\mathbf{\Phi}^{-1}(\mathbf{N}-\mathbf{M})\right)\mathbf{V}(t);$$

$\mathbf{\Phi}$ – линейный оператор,

$$\mathbf{\Phi}\mathbf{Z}(t) = \int_0^\omega \mathbf{U}(\tau)\mathbf{Z}(t)\mathbf{V}(\tau)d\tau, \quad \mathbf{Z}(t) = \mathbf{U}^{-1}(t)\mathbf{Y}(t)\mathbf{V}^{-1}(t); \tag{5}$$

$L_i = L_i(\rho_1,\rho_2), (i=1,2)$ – постоянные Липшица для $\mathbf{F}(t,\mathbf{X},\mathbf{Y})$ в области G; L_1, L_2 – интегральные операторы

$$L_1(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \int_0^t \mathbf{U}(\varphi)\mathbf{\Phi}^{-1}\times$$

$$\times\left(\int_0^\omega\left(\int_\tau^\varphi \mathbf{K}_{\mathbf{U}}(\tau,s)\left(\mathbf{C}_1(s)\mathbf{Y}(s)\mathbf{C}_2(s) + \mathbf{F}\left(s,\mathbf{X}(s),\mathbf{Y}(s)\right)\right)\mathbf{K}_{\mathbf{V}}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(\varphi)d\varphi, \tag{6}$$

$$L_2(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbf{U}(t)\mathbf{\Phi}^{-1} \times$$

$$\times\left(\int_0^{\omega}\left(\int_{\tau}^{t}\mathbf{K}_{\mathbf{U}}(\tau,s)\big(\mathbf{C}_1(s)\mathbf{Y}(s)\mathbf{C}_2(s)+\mathbf{F}\big(s,\mathbf{X}(s),\mathbf{Y}(s)\big)\big)\mathbf{K}_{\mathbf{V}}(s,\tau)ds\right)d\tau\right)\mathbf{V}(t). \qquad (7)$$

Матричное уравнение $\mathbf{\Phi Z}(t)=\mathbf{K}(t)$ относительно $(n\times n)$-матрицы $\mathbf{Z}(t)$ эквивалентно уравнению $\tilde{\mathbf{\Phi}}\tilde{\mathbf{Z}}(t)=\tilde{\mathbf{K}}(t)$ с квадратной матрицей $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ порядка n^2 и векторами $\tilde{\mathbf{Z}}(t)$, $\tilde{\mathbf{K}}(t)$ соответствующей размерности. Условие $\det\tilde{\mathbf{\Phi}}\neq 0$ равносильно однозначной обратимости оператора $\mathbf{\Phi}$. Некоторые способы построения $\mathbf{\Phi}^{-1}$ предложены в [7]; там же даны оценки для $\left\|\mathbf{\Phi}^{-1}\right\|$.

Справедлива лемма типа [8].

Лемма 1. *Для того чтобы в случае однозначной обратимости оператора* $\mathbf{\Phi}$ *пара функций* $\big(\mathbf{X}(t),\mathbf{Y}(t)\big):[0,\omega]\to\mathbf{R}^{n\times n}\times\mathbf{R}^{n\times n}$ *представляла собой решение задачи (3), (4), необходимо и достаточно, чтобы эти функции являлись решением системы интегральных уравнений*

$$\mathbf{X}(t)=\mathbf{M}+\mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t)+L_1(\mathbf{X},\mathbf{Y}), \qquad (8)$$

$$\mathbf{Y}(t)=\mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t)+L_2(\mathbf{X},\mathbf{Y}). \qquad (9)$$

С помощью модификации типа [5] обобщенного принципа сжимающих отображений [9] доказана лемма 2.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия*

$$\begin{aligned} p_1\rho_1+q_1\rho_2+h_1&\le\rho_1,\\ p_2\rho_1+q_2\rho_2+h_2&\le\rho_2, \end{aligned} \qquad (10)$$

$$p_1+q_2<1. \qquad (11)$$

Тогда задача (8), (9) однозначно разрешима на множестве $\tilde{G}$, *при этом справедлива оценка*

$$\mathbf{Z}\le(\mathbf{E}-\mathbf{P})^{-1}\mathbf{H}. \qquad (12)$$

Теорема. *Пусть оператор* $\mathbf{\Phi}$ *однозначно обратим и выполнены условия (10), (11). Тогда задача (3), (4) однозначно разрешима в области* G, *при этом справедлива оценка (12).*

Для доказательства теоремы достаточно на основании условий теоремы воспользоваться леммами 1, 2.

Рассмотрим задачу (1), (2) в рамках векторной постановки [10], полагая

$$\mathbf{A}(t)\equiv 0,\quad \mathbf{B}(t)\equiv 0,\quad \mathbf{C}_i(t)\equiv 0. \qquad (13)$$

Следствие. *Пусть выполнены условия*

$$\frac{\omega^2}{8}h + \frac{\omega^2}{8}L_1\rho_1 + \frac{\omega^2}{8}L_2\rho_2 \le \rho_1,$$
$$\frac{\omega}{2}h + \frac{\omega}{2}L_1\rho_1 + \frac{\omega}{2}L_2\rho_2 \le \rho_2, \tag{14}$$

$$\frac{\omega^2}{8}L_1 + \frac{\omega}{2}L_2 < 1. \tag{15}$$

Тогда задача (1), (2) с учетом (13) однозначно разрешима в области G.

Доказательство. Чтобы установить справедливость этого следствия, рассмотрим теорему с использованием (13). В этом случае соответствующая эквивалентная система матричных интегральных уравнений примет вид, принятый в методе функций Грина [10, с. 496] (см. также [7]),

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{M} + \mathbf{P}_{\mathbf{UV}}(t) + \int_0^{\omega} G(t,\tau)\mathbf{F}\big(\tau, \mathbf{X}(\tau), \mathbf{Y}(\tau)\big)d\tau,$$

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Q}_{\mathbf{UV}}(t) + \int_0^{\omega} G'_t(t,\tau)\mathbf{F}\big(\tau, \mathbf{X}(\tau), \mathbf{Y}(\tau)\big)d\tau.$$

При $\mathbf{M} = \mathbf{N} = 0$ на основе (8), (9) имеем

$$\|L_1(\mathbf{X},\mathbf{Y})\|_C \le \frac{\omega^2}{8}h + \frac{\omega^2}{8}L_1\rho_1 + \frac{\omega^2}{8}L_2\rho_2,$$
$$\|L_2(\mathbf{X},\mathbf{Y})\| \le \frac{\omega}{2}h + \frac{\omega}{2}L_1\rho_1 + \frac{\omega}{2}L_2\rho_2. \tag{16}$$

Аналогично получим следующие оценки:

$$\left\|L_1(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}},\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) - L_1(\tilde{\mathbf{X}},\tilde{\mathbf{Y}})\right\|_C \le \frac{\omega^2}{8}L_1\left\|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}}\right\|_C + \frac{\omega^2}{8}L_2\left\|\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\mathbf{Y}}\right\|_C,$$
$$\left\|L_2(\tilde{\tilde{\mathbf{X}}},\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}}) - L_2(\tilde{\mathbf{X}},\tilde{\mathbf{Y}})\right\|_C \le \frac{\omega}{2}L_1\left\|\tilde{\tilde{\mathbf{X}}} - \tilde{\mathbf{X}}\right\|_C + \frac{\omega}{2}L_2\left\|\tilde{\tilde{\mathbf{Y}}} - \tilde{\mathbf{Y}}\right\|_C. \tag{17}$$

Соотношения (16) на основании (10) приводят к условиям (14). Соотношения (17) определяют матрицу $\mathbf{P}$, поэтому $p_1 = \frac{\omega^2}{8}L_1$, $q_2 = \frac{\omega}{2}L_2$ и условие (11) принимает вид (15).

Для завершения доказательства достаточно с учетом (13) выполнить формальный переход от матричной задачи (1), (2) к соответствующей векторной задаче [10]. Тем самым справедливость следствия установлена.

Библиографический список

1. *Кашпар, А. И.* О разрешимости и построении решения задачи Валле-Пуссена для матричного уравнения Ляпунова второго порядка с параметром / А. И. Кашпар, В.Н. Лаптинский // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фіз.-матэм. навук. 2019. Т. 55, № 1. С. 50–61.

2. *Кашпар, А.И.* Разрешимость и построение решения краевой задачи Валле-Пуссена для нелинейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка / А.И. Кашпар, В.Н. Лаптинский // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 5. С. 570–583.

3. *Кашпар, А.И.* К разрешимости краевой задачи Валле-Пуссена для линейного матричного уравнения Ляпунова второго порядка/ А.И. Кашпар // Актуальные проблемы науки и техники. Материалы I Международной научно-технической конференции. Ижевск, 2021. С. 76–80.

4. *Кашпар, А. И.* К аналитическим методам расчета стационарного температурного поля в круговой цилиндрической оболочке / А.И. Кашпар, В.Н. Лаптинский // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фіз.-матэм. навук. 2021. Т. 57, № 4. С. 435–446.

5. *Лаптинский, В. Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем / В. Н. Лаптинский. Минск: ИМ НАН Беларуси, 1998. 300 с.

6. *Демидович, Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. М.: Наука, 1967. 472 с.

7. *Кашпар, А.И.* О краевой задаче Валле-Пуссена для матричного уравнения Ляпунова второго порядка / А.И. Кашпар, В.Н. Лаптинский // Веснік Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А.А. Куляшова. Серыя В. Прыродазнаўчыя навукі: матэматыка, фізіка, біялогія. 2021. № 2 (58). С. 16-27.

8. *Бибиков, Ю. Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Н. Бибиков. М.: Высш. шк., 1991. 304 с.

9. Приближённое решение операторных уравнений / М. А. Красносельский [и др.] М.: Наука, 1969. 456 с.

10. *Хартман, Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. М.: Мир, 1970. 720 с.

Сведения об авторе

Александр Иванович Кашпар, помощник ректора Межгосударственного образовательного учреждения высшего образования «Белорусско-Российский университет» (Республика Беларусь, г. Могилев), alex.kashpar@tut.by