УДК 533.6

К задаче о тепловом пограничном слое в турбулентном течении

В. Н. Лаптинский

Рассматривается задача Прандтля о тепловом пограничном слое конечной толщины в случае плоского турбулентного течения несжимаемой жидкости. Установлена аналитическая структура решения и изучены его структурные свойства.

Ключевые слова: тепловой пограничный слой, турбулентное течение, задача Прандтля, структура решения.

On the problem of a thermal boundary layer in a turbulent flow

V. N. Laptinskiy

The Prandtl problem of a thermal boundary layer of finite thickness in the case of a plane turbulent flow of an incompressible fluid is considered. The analytical structure of the solution is established and its structural properties are studied.

Keywords: thermal boundary layer, turbulent flow, Prandtl problem, solution structure.

Рассмотрим задачу типа [1, с. 630], [2, с. 388]:

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = U\frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(l^2(y)\left|\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|\frac{\partial u_x}{\partial y}\right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

$$u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} = a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(l_1^2(y)\left|\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|\frac{\partial T}{\partial y}\right), \tag{3}$$

$$u_x\big|_{y=0} = 0,\; u_y\big|_{y=0} = 0,\; u_x\big|_{y=\delta(x)} = U(x), \tag{4}$$

$$T\big|_{y=0} = T_0(x),\; T\big|_{y=\delta_T(x)} = T_1(x). \tag{5}$$

Соотношения (1)–(5) представляют собой задачу о тепловом пограничном слое конечной толщины $\delta_T(x)$ в случае плоского несжимаемого турбулентного течения, при этом в полном напряжении трения $\tau = \tau_l + \tau_t$ и полной плотности потока тепла $q = q_l + q_t$, согласно гипотезе Л. Прандтля, приняты выражения

$$\tau = \mu\frac{\partial u_x}{\partial y} + l^2(y)\left|\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|\frac{\partial u_x}{\partial y}, \tag{6}$$

$$-q = \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + l_1^2(y) \left| \frac{\partial u_x}{\partial y} \right| \frac{\partial T}{\partial y}, \qquad (7)$$

где $\tau_l = \mu \partial u_x / \partial y$, $q_l = \lambda \partial T / \partial y$ – ламинарные составляющие соответственно для τ, q. Искомыми величинами являются функции $\delta_T(x)$ и $\alpha_0(x)$ – коэффициент теплоотдачи, при этом соотношения (1), (2), (4) представляют собой самостоятельную задачу о динамическом пограничном слое конечной толщины $\delta(x)$ с искомыми величинами $\delta(x)$ и $\tau_0(x)$ – касательное напряжение; $\tau(x,0) = \tau_0(x)$; знак осреднения опущен.

Функции $\delta(x)$, $\delta_T(x)$, $\tau_0(x)$, $\alpha_0(x)$ играют основную роль в теории пограничного слоя ([1, 2] и др.).

Замечание 1. В (6), (7) вместо абстрактных путей перемешивания $l(y)$, $l_1(y)$ можно принять величины $l = \kappa y$, $l_1 = \kappa_1 y$ соответственно при $0 \le y \le \delta(x)$, $0 \le y \le \delta_T(x)$. Это жесткое ограничение, но оно позволяет получить явные выражения для структуры решений задач (1), (2), (4), (6); (1)–(7). Очевидно, вблизи обтекаемой поверхности знак модуля может быть опущен, это дает основу для конкретного анализа указанных задач.

Вследствие чрезвычайно сложной картины турбулентного течения и отсутствия рациональных теорий турбулентности решение задач (1), (2), (4); (1)–(5) в строгой математической постановке в настоящее время невозможно. При решении отдельных задач теории пограничного слоя вводится много предложений и упрощающих допущений, поэтому в принятых методах расчета турбулентного теплообмена решающее значение приобретает эксперимент [1–4].

При этом в основе способов расчета турбулентных полей течений, температуры лежат эмпирические гипотезы, связывающие силы турбулентной вязкости, вызываемой турбулентным перемешиванием, с осредненными во времени скоростями, а также соответствующие гипотезы для теплообмена. Только после введения таких гипотез гидродинамические уравнения осредненного движения, а также дифференциальные уравнения для распределения температуры принимают вид, допускающий интегрирование различными методами, в том числе аналитическими. Основы полуэмпирической теории теплообмена созданы Л. Прандтлем и Д. Тейлором [2, с. 67]. К этим гипотезам относятся гипотезы (6), (7).

В предлагаемой работе на основе метода [5] изучены структурные свойства и структура решения комплексной задачи (1)–(7). В [6] (см. также [7]) с помощью величины ударной вязкости пограничного слоя в случае несжимаемого течения получены соотношения

$$\delta(x) = \frac{\nu}{U} h_\delta, \qquad (8)$$

$$\tau_0(x) = \rho U^2 h_\tau, \qquad (9)$$

где

$$h_\delta = \frac{(c_\tau - c_l)\,c_l}{c_t}, \quad h_\tau = \frac{c_t}{(c_\tau - c_l)\,c_l^2};$$

при этом c_τ, c_l, c_t – структурные функции, определяемые на основе безразмерных интегральных средних $\bar{\tau}, \bar{\tau}_l, \bar{\tau}_t$ на промежутке $\left[0, \delta(x)\right]$ напряжений трения соответственно τ, τ_l, τ_t; c_τ, c_l, c_t – постоянные величины для профиля скоростей автомодельного типа [2, с. 334], [8, с. 356].

Из (8), (9) следуют формулы

$$\delta\tau_0 = \mu U \frac{1}{c_l}, \tag{10}$$

$$\delta^2\tau_0 = \nu\mu H, \tag{11}$$

где

$$H = H(x) = \frac{h_\delta(x)}{c_l(x)} = \frac{1}{h_\tau(x) c_l^2(x)} = \frac{c_\tau(x) - c_l(x)}{c_l^2(x)},$$

при этом выражение (10) описывает ударную вязкость $\tilde{a}$ пограничного слоя, формула (11) имеет размерность момента соответствующей силы.

Наряду с (7) рассмотрим функцию

$$\tilde{q}(x,y) = \lambda \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y} + \rho c_p l_1^2(y) \left| \frac{\partial u_x}{\partial y} \right| \frac{\partial \tilde{T}}{\partial y}, \tag{12}$$

где $\tilde{T}$ – безразмерная температура [2, с. 337], $\tilde{T} = \dfrac{T - T_0}{T_1 - T_0}$.

Поскольку $\tilde{q}(x,0) = \alpha_0(x)$, то целесообразно ввести полную теплоотдачу $\alpha(x,y) = \tilde{q}(x,y)$ пограничного слоя при помощи соотношения

$$\alpha(x,y) = \alpha_l(x,y) + \alpha_t(x,y), \tag{13}$$

где $\alpha_l(x,y) = \lambda \dfrac{\partial \tilde{T}}{\partial y}, \quad \alpha_t(x,y) = \rho c_p l_1^2(y) \left| \dfrac{\partial u_x}{\partial y} \right| \dfrac{\partial \tilde{T}}{\partial y}.$

В данной работе по методу [5] на основе (1)–(7) с помощью величины полной теплоотдачи (13) получены выражения

$$\tau_0 = \frac{\mu a}{\delta_T^2} F, \tag{14}$$

$$\alpha_0 = \frac{\lambda}{\delta_T} \cdot \frac{1}{r_l}, \tag{15}$$

где

$$F = F(x) = \frac{r_\alpha(x) - r_l(x)}{r_t\ (x)};$$

здесь r_α, r_l, r_t – структурные функции, определяемые на основе безразмерных интегральных средних $\overline{\alpha}, \overline{\alpha}_l, \overline{\alpha}_t$ на промежутке $\left[0, \delta_T(x)\right]$ теплопередач соответственно $\alpha, \alpha_l, \alpha_t$, при этом r_α, r_l, r_t – постоянные величины для профилей скорости и температуры автомодельного типа [1, с. 354, с. 394], [2, с. 356].

На основании (11), (14), используя равенство $Pr = \nu / a$, получим формулу типа [8, с. 120]

$$\delta = \delta_T \sqrt{Pr}\, \frac{H}{F}. \tag{16}$$

Аналогично

$$\delta = \delta_T^2 \frac{U}{a} \frac{1}{c_l F}. \tag{17}$$

Поскольку формулы (8), (9) содержат только физические параметры течения, то естественно установить аналогичные формулы для $\delta_T(x)$, $\alpha_0(x)$. В связи с этим из (8), (16) имеем

$$\delta_T = \frac{\nu}{U\sqrt{Pr}} \frac{h_\delta F}{H}. \tag{18}$$

Далее на основании (9), (14), (15) получим

$$\alpha_0 = \frac{\lambda U}{a\sqrt{Pr}} \frac{h_\tau}{r_l F}. \tag{19}$$

Соотношения (8), (9), (18), (19) описывают структуру решения задачи (1)–(7). Формулы (10), (11), (14)–(19) относятся к структурным свойствам решения, при этом функции H, F являются постоянными величинами в случае профилей скорости и температуры автомодельного типа. Связь между τ_0 и α_0 характеризуется выражением

$$\tau_0 = \frac{\alpha_0^2 \mu a}{\lambda^2} F r_l^2.$$

Замечание 2. Изложенные результаты получены математически строго в рамках принятых гипотез Л. Прандтля и соответствуют установленным физическим реалиям теории пограничного слоя.

Замечание 3. Приведенная структура решения задач (1), (2), (4), (6);

(1)–(7) имеет такой же вид и в соответствующей задаче о сжимаемом течении, однако структурные функции усложняются. Полученные структурные свойства и структура решения задачи (1)–(3) сохранятся и для более общей задачи типа [1, с. 630], [2, с. 388], учитывающей влияние числа Маха на формирование сжимаемого пограничного слоя.

Библиографический список

1. *Шлихтинг, Г.* Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – Москва : Наука, 1974. – 712 с.

2. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / В. С. Авдуевский [и др.]. – Москва : Машиностроение, 1975. – 624 с.

3. *Репик, Е. У.* Турбулентный пограничный слой. Методика и результаты экспериментальных исследований / Е. У. Репик, Ю. П. Соседко. – Москва : Физматлит, 2007. – 312 с.

4. Теория тепломассообмена : учебник для вузов / С. И. Исаев, И. А. Кожинов, В.И. Кофанов и др. ; под ред. А. И. Леонтьева. – Москва : Высш. шк., 1979. – 495 с.

5. *Лаптинский, В. Н.* Об одном аналитическом методе решения задачи о динамическом ламинарном пограничном слое в автомодельном случае / В. Н. Лаптинский // Ученые записки ЦАГИ. – 2013. – Т. XLIV, № 5. – С. 72– 93.

6. *Лаптинский, В. Н.* Структура по Прандтлю решения задачи о динамическом турбулентном пограничном слое / В. Н. Лаптинский // Материалы, оборудование и ресурсосберегающие технологии : материалы междунар. науч.-техн. конф., Могилев, 22–23 апр. 2021 г. / Белорус.-Рос. ун-т. – Могилев, 2021. – С. 384–385.

7. *Лаптинский, В. Н.* Структура по Прандтлю – Карману решения задачи о динамическом турбулентном пограничном слое/ В. Н. Лаптинский // Актуальные проблемы науки и техники. Материалы I Международной научно-технической конференции. Ижевск, 2021. С. 86–90.

8. *Кутателадзе, С. С.* Основы теории теплообмена / С.С. Кутателадзе. – Москва : Атомиздат, 1979. – 416 с.

Сведения об авторе

Валерий Николаевич Лаптинский, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры «Высшая математика», Белорусско-Российский университет (Республика Беларусь, г. Могилев), lavani@tut.by