УДК 517.927.4

Двухточечная краевая задача для матричного уравнения Ляпунова (двусторонняя регуляризация)

И. И. Маковецкий

Выведены эффективно проверяемые достаточные условия однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для нелинейного уравнения Ляпунова. Разработан итерационный алгоритм классического типа построения решения.

Ключевые слова: матричное дифференциальное уравнение, двухточечная краевая задача, однозначная разрешимость, построение решения.

Two-point boundary value problem for the Lyapunov matrix equation (two-sided regularization)

I. I. Makovetsky

Efficiently verifiable sufficient conditions for the unique solvability of a two-point boundary value problem for the nonlinear Lyapunov equation are derived. An iterative algorithm of the classical type for constructing a solution has been developed.

Keywords: matrix differential equation, two-point boundary value problem, unique solvability, solution construction.

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X + XB(t) + C_1(t)XC_2(t) + F(t,X),\ X \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{1}$$

$$MX(0) + NX(\omega) = 0, \tag{2}$$

где $A, B, C_i\,(i=1,2) \in \mathbb{C}(I, \mathbb{R}^{n\times n})$, $F \in \mathbb{C}(D_{\tilde{\rho}}, \mathbb{R}^{n\times n})$, M, N – вещественные $(n\times n)$-матрицы, $I = [0,\omega]$, $D_{\tilde{\rho}} = \{(t,X) : t \in I, \|X\| < \tilde{\rho}\}$, $0 < \tilde{\rho} \le \infty$. Предположим, что нелинейная функция $F(t,X)$ удовлетворяет в $D_{\tilde{\rho}}$ относительно X условию Липшица (локально); $F(t,0) \not\equiv 0$.

Задачу (1), (2) будем исследовать в конечномерной банаховой алгебре $\mathcal{B}(n)$ непрерывных матриц-функций с нормой $\|X\|_C = \max_t \|X(t)\|$, где $\|\bullet\|$ – подходящая норма матриц в рамках определения этой алгебры, например, любая из норм, приведенных в [1].

Данная работа является продолжением и обобщением [2–4]. На основе применения метода регуляризации [5] получены эффективно проверяемые достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2), алгоритм построения решения, а также оценка его области локализации.

Введем следующие обозначения:

$$D_\rho = \{(t,X): t\in I, \|X\|\le\rho\},\ \lambda_1=\max_t\|U(t)\|,\ \lambda_2=\max_t\|U^{-1}(t)\|,\ \mu_1=\max_t\|V(t)\|,$$
$$\mu_2=\max_t\|V^{-1}(t)\|,\ c_i=\max_t\|C_i(t)\|\ (i=1,2),\ P=U^{-1}(\omega)N^{-1}M,\ Q=-V(\omega),$$
$$\gamma=\|\Phi^{-1}\|,\ m=\max\{\|P\|,\|Q\|\},\ h=\max_t\|F(t,0)\|,$$
$$q=\gamma\lambda_0\mu_0 m\omega(c_1c_2+L),\ p=\gamma\lambda_0\mu_0 m\omega h,$$
где $t\in I$, $0<\rho<\tilde{\rho}$, $\lambda_0=\lambda_1\lambda_2$, $\mu_0=\mu_1\mu_2$, Φ – линейный оператор, $\Phi X = PX - XQ$, $L=L(\rho)>0$ – постоянная Липшица для $F(t,X)$ в D_ρ.

Теорема. *Пусть выполнены условия:* 1) $\det N\ne 0$, 2) *матрицы* P,Q *не имеют общих характеристических чисел,* 3) $q<1$, 4) $p/(1-q)\le\rho$.

Тогда в области D_ρ *решение задачи (1), (2) существует и единственно. Это решение представимо как предел равномерно сходящейся последовательности матричных функций, определяемых рекуррентным интегральным соотношением и удовлетворяющих условию (2), при этом справедлива оценка* $\|X\|_C\le p/(1-q)$.

Доказательство. Сначала по методике [5] с использованием условий 1), 2) теоремы получим матричное интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2),

$$X(t)=U(t)\Bigg\{\Phi^{-1}\Bigg[P\int_0^t U^{-1}(\tau)\big(C_1(\tau)X(\tau)C_2(\tau)+F(\tau,X(\tau))\big)V^{-1}(\tau)+$$
$$+\int_t^\omega U^{-1}(\tau)\big(C_1(\tau)X(\tau)C_2(\tau)+F(\tau,X(\tau))\big)V^{-1}(\tau)Q\Bigg]\Bigg\}V(t). \qquad (3)$$

Для исследования разрешимости уравнения (3) воспользуемся принципом Каччопполи – Банаха [6] сжимающих отображений. Уравнение (3) запишем в следующем виде:

$$X=\mathrm{L}(X), \qquad (4)$$

где через L обозначен нелинейный интегральный оператор, определяемый правой частью уравнения (3). Этот оператор действует из $\mathbb{C}(I,\mathbb{R}^{n\times n})$ в $\mathbb{C}^1(I,\mathbb{R}^{n\times n})$. Для произвольной матрицы $X(t)$, принадлежащей шару $\|X\|_C\le\rho$, с учетом того, что $\|F(t,X)\|\le L\|X\|_C+h$, имеем

$$\|\mathcal{L}(X)\|\le\|U(t)\|\|\Phi^{-1}\|\Bigg[\|P\|\int_0^t\big\|U^{-1}(\tau)\big(C_1(\tau)X(\tau)C_2(\tau)+F(\tau,X(\tau))\big)V^{-1}(\tau)\big\|d\tau+$$
$$+\int_t^\omega\big\|U^{-1}(\tau)\big(C_1(\tau)X(\tau)C_2(\tau)+F(\tau,X(\tau))\big)V^{-1}(\tau)\big\|d\tau\|Q\|\Bigg]\|V(t)\|\le$$
$$\le\lambda_1\mu_1\gamma m\omega\lambda_1\mu_1\big[(c_1c_2+L)\|X\|_C+h\big]\le q\rho+p\le q\rho+(1-q)\rho=\rho. \qquad (5)$$

Из (5) следует оценка

$$\left\|\mathcal{L}(X)\right\|_C \le \rho \tag{6}$$

Теперь установим сжимаемость оператора $\mathcal{L}$ в шаре $\|X\|_C \le \rho.$ Из (3) имеем для всех *X, Y* таких, что $\|X\|_C \le \rho, \|Y\|_C \le \rho,$ $\mathcal{L}(X) - \mathcal{L}(Y) = U(t)\times$

$$\times\left\{\Phi^{-1}\left[P\int_0^t U^{-1}(\tau)\Big(C_1(\tau)\big(X(\tau)-Y(\tau)\big)C_2(\tau)+F\big(\tau,X(\tau)\big)-F\big(\tau,Y(\tau)\big)\Big)V^{-1}(\tau)d\tau+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_t^\omega U^{-1}(\tau)\Big(C_1(\tau)\big(X(\tau)-Y(\tau)\big)C_2(\tau)+F\big(\tau,X(\tau)\big)-F\big(\tau,Y(\tau)\big)\Big)V^{-1}(\tau)d\tau Q\right]\right\}V(t). \tag{7}$$

Выполнив оценки по норме в (7), аналогичные (5), получим

$$\left\|\mathcal{L}(X)-\mathcal{L}(Y)\right\|_C \le \gamma\lambda_0\mu_0 m\omega(c_1c_2+L)\|X-Y\|_C = q\|X-Y\|_C. \tag{8}$$

Соотношения (6), (8) являются условиями принципа Каччопполи – Банаха применительно к (4) в шаре $\|X\|_C \le \rho.$ На основании этого принципа с учетом условий 3), 4) теоремы уравнение (3) однозначно разрешимо в области D_ρ. Стало быть, решение задачи (1), (2) существует и единственно в указанной области.

Для построения решения уравнения (3) воспользуемся классическим методом последовательных приближений (см., например, [6]). Применительно к (3) имеем

$$X_{k+1}(t)=U(t)\left\{\Phi^{-1}\left[P\int_0^t U^{-1}(\tau)\Big[C_1(\tau)X_k(\tau)C_2(\tau)+F\big(\tau,X_k(\tau)\big)\Big]V^{-1}(\tau)d\tau+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_t^\omega U^{-1}(\tau)\Big[C_1(\tau)X_k(\tau)C_2(\tau)+F\big(\tau,X_k(\tau)\big)\Big]V^{-1}(\tau)d\tau Q\right]\right\}V(t), k=0,1,2,..., \tag{9}$$

где $X_0(t)$ – произвольная матрица класса $\mathbb{C}\left(I,\mathbb{R}^{n\times n}\right)$, принадлежащая шару $\|X\|_C \le \rho.$ Тогда, согласно (6), $\|X_i\|_C \le \rho\,(i=1,2...).$ Это нетрудно установить индукцией по *k* и на основании условия 4).

Установим, что все приближения, построенные согласно алгоритму (9), подчиняются краевому условию (2). Дифференцируя по *t* обе части формулы (9), запишем полученное выражение в виде

$$\Big[C_1(t)X_k(t)C_2(t)+F\big(t,X_k(t)\big)\Big]dt = dX_{k+1}(t)-\Big[A(t)X_{k+1}(t)+B(t)X_{k+1}(t)\Big]dt. \tag{10}$$

При $t=\omega$ из (9) следует

$$X_{k+1}(\omega)=U(\omega)\Phi^{-1}\left\{P\int_0^\omega U^{-1}(\tau)\Big[C_1(\tau)X_k(\tau)C_2(\tau)+F\big(\tau,X_k(\tau)\big)\Big]V^{-1}(\tau)d\tau\right\}V(\omega). \tag{11}$$

Запишем теперь (11) в следующем виде:

$$\Phi U^{-1}(\omega) X_{k+1}(\omega) V^{-1}(\omega) = P\int_0^{\omega} U^{-1}(\tau)\Big(C_1(\tau) X_k(\tau) C_2(\tau) + F\big(\tau, X_k(\tau)\big)\Big) V^{-1}(\tau) d\tau. \tag{12}$$

Подставляя (10) в (12) и выполняя интегрирование по частям с использованием тождеств $dU^{-1} / dt = -U^{-1}A(t)$, $dV^{-1} / dt = -B(t)V^{-1}$, получим

$$\Phi U^{-1}(\omega) X_{k+1}(\omega) V^{-1}(\omega) = P\left[U^{-1}(\omega) X_{k+1}(\omega) V^{-1}(\omega) - X_{k+1}(0)\right]. \tag{13}$$

Используя явный вид левой части (13), придем к равенству

$$MX_{k+1}(0) + NX_{k+1}(\omega) = 0,\ k = 0,1,2,... \tag{14}$$

Справедливость равенства (14) позволяет строить приближенные решения задачи (1), (2) в классе допустимых функций, то есть функций класса $\mathbb{C}^1\left(I, \mathbb{R}^{n\times n}\right)$, удовлетворяющих условию (14).

На основе (8) получим неявную рекуррентную оценку

$$\left\|X_{m+1} - X_m\right\|_C \le q\left\|X_m - X_{m-1}\right\|_C,\ m = 1,2...,$$

а затем и явную

$$\left\|X_{m+1} - X_m\right\|_C \le q^m\left\|X_1 - X_0\right\|_C,\ m = 1,2... \tag{15}$$

На основании условий 3), 4) последовательность $\left\{X_k(t)\right\}_0^{\infty}$ сходится равномерно по $t \in I$ к решению $X(t) \in D_\rho$ уравнения (3).

Используя оценку (15), получим оценку, характеризующую скорость сходимости алгоритма (9),

$$\left\|X_k - X\right\|_C \le q^k \frac{\left\|X_1 - X_0\right\|_C}{1-q},\ k = 1,2... \tag{16}$$

Из (16) при $k = 0$, $X_0 = 0$ получим

$$\left\|X\right\|_C \le \frac{\left\|X_1\right\|_C}{1-q}. \tag{17}$$

На основе (17) по исходным данным задачи получим оценку для $\left\|X\right\|_C$. При $k = 0$, $X_0 = 0$ из (9) имеем

$$X_1(t) = U(t)\left\{\Phi^{-1}\left[P\int_0^t U^{-1}(\tau)F(\tau,0)V^{-1}(\tau)d\tau + \int_t^{\omega} U^{-1}(\tau)F(\tau,0)V^{-1}(\tau)d\tau Q\right]\right\}V(t) \tag{18}$$

Выполнив последовательно оценки по норме в (18), имеем

$$\left\|X_1(t)\right\| \le \left\|U(t)\right\|\left\|\Phi^{-1}\right\|\left[\left\|P\right\|\int_0^t\left\|U^{-1}(\tau)F(\tau,0)V^{-1}(\tau)\right\|d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_t^{\omega}\left\|U^{-1}(\tau)F(\tau,0)V^{-1}(\tau)\right\|d\tau\left\|Q\right\|\right]\left\|V(t)\right\| \le \gamma\lambda_0\mu_0\omega h = p.$$

Отсюда следует оценка

$$\left\| X_1(t) \right\| \le p. \tag{19}$$

Используя (19), получим из (17)

$$\left\| X \right\|_C \le \frac{\left\| X_1 \right\|_C}{1-q} \le \frac{p}{1-q}. \tag{20}$$

Теперь получим априорную оценку для $\left\| X \right\|_{\mathbb{C}}$ на основе уравнения (4):

$$\left\| X \right\|_C \le \frac{p}{1-q}. \tag{21}$$

Очевидно, оценка (21) грубее оценки (20).

Замечание. В работе [7] краевая задача (1), (2) качественными методами изучается в области $I \times \mathbb{R}^{n\times n}$. Теорема, приведенная в предлагаемой работе, очевидно, эффективнее соответствующей теоремы из [7], поскольку получена для области более общей конфигурации.

Библиографический список

1. *Демидович, Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – Москва, 1967. – 472 с.
2. *Лаптинский, В. Н.* Двусторонняя регуляризация нелинейно возмущенной двухточечной краевой задачи для матричного уравнения Ляпунова с параметром / В. Н. Лаптинский, И. И. Маковецкий // Веснік Магілёускага дзяржаунага універсітэту імя А.А. Куляшова. Сер. В. – 2019. – № 2 (54). – С. 12–20.
3. *Лаптинский, В. Н.* Матричные дифференциальные уравнения Ляпунова и Риккати / В. Н. Лаптинский, И. И. Маковецкий, В. В. Пугин. – Могилев : БРУ, 2012. – 167 с.
4. *Лаптинский, В. Н.* К построению решения двухточечной краевой задачи для нелинейного матричного уравнения Ляпунова / В. Н. Лаптинский, И. И. Маковецкий // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 137–141.
5. *Лаптинский, В. Н.* Конструктивный анализ управляемых колебательных систем. – Минск : ИМ НАН Беларуси, 1998. – 300 с.
6. *Канторович, Л. В.* Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – Москва : Наука, 1977. – 744 с.
7. *Murty, K. N.* Two (multi) point nonlinear Lyapunov systems existence and uniqueness / K. N. Murty, G. W. Howell, S. Sivasundaram // Journal of mathematical analysis and applications. 1992. 167. P. 505–515.

Сведения об авторе

Илья Иванович Маковецкий, кандидат физико-математических наук, доцент, декан экономического факультета, Белорусско-Российский университет (Республика Беларусь, г. Могилев), imi.makzi@gmail.com