Задания такого типа хорошо развивают ориентирование в системе терминов учебного курса, закрепляют понятия в виде словосочетаний, связи понятий.

Большим плюсом составления тестового задания в MOODLE является то, что с учётом конкретных целей преподаватель может настроить тесты как на показ правильных ответов с целью коррекции знаний, так и только на контроль знаний (при этом будет выводиться лишь итоговый результат).

УДК 372.851

ИЗУЧЕНИЕ ТЕМЫ «МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ» В РАМКАХ РАБОТЫ ВЫЕЗДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ РТУ МИРЭА

Н. В. БЕЛЕЦКАЯ, А. В. ШАТИНА
Российский технологический университет
Москва, Россия

Выездная математическая школа Российского технологического университета (РТУ МИРЭА) традиционно ежегодно проводится в осеннем семестре, ее занятия посвящены тем разделам математики, которые не входят в академические курсы, преподаваемые в университете. Так, традиционно, на школе читаются лекции и проводятся занятия по теме «Функциональные уравнения». Приведем разбор некоторых функциональных уравнений, предлагавшихся на студенческих олимпиадах различного уровня.

Задача 1. Решить функциональное уравнение $f\left(\frac{1}{x}\right)+f(1-x)=x$.

Решение

Выполним замену переменной $t=\frac{1}{x}$ и введем в рассмотрение функцию $\varphi(t)=\frac{t-1}{t}$. Тогда уравнение примет вид

$$f(t)+f(\varphi(t))=\frac{1}{t}.$$

Заметим, что $\varphi(\varphi(t))=-\frac{1}{t-1}$, $\varphi(\varphi(\varphi(t)))=t$. Подставляя в последнее уравнение вместо t последовательно $\varphi(t)$, $\varphi(\varphi(t))$, имеем

$$f\left(\frac{t-1}{t}\right)+f\left(-\frac{1}{t-1}\right)=\frac{t}{t-1}; \quad f\left(-\frac{1}{t-1}\right)+f(t)=-t+1.$$

Таким образом, получена система линейных уравнений третьего порядка относительно неизвестных $a=f(t),\ b=f\left(\frac{t-1}{t}\right),\ c=f\left(-\frac{1}{t-1}\right)$

$$\begin{cases} a+b=\dfrac{1}{t}; \\ b+c=\dfrac{t}{t-1}; \\ a+c=1-t. \end{cases}.$$

Откуда находим $a=f(t)=\dfrac{t^3-t^2+1}{2t(1-t)}$.

Следовательно, $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+1}{2x(1-x)},\ x\neq 0,\ x\neq 1$.

Задача 2. Найти на промежутке $(0;+\infty)$ дифференцируемое решение функционального уравнения $f(xy)=f(x)+f(y)$.

Решение

Продифференцируем заданное уравнение сначала по переменной x, а затем по переменной y:

$$f'(xy)\cdot y=f'(x); \quad f'(xy)\cdot x=f'(y).$$

Умножим первое равенство на x, а второе – на y:

$$f'(xy)\cdot yx=f'(x)x; \quad f'(xy)\cdot xy=f'(y)y.$$

Так как левые части полученных равенств равны, то равны и правые части этих равенств: $f'(x)x=f'(y)y$.

Выражение в левой части последнего равенства зависит только от переменной x, а в правой части – только от y. Это возможно только тогда, когда $f'(x)x=f'(y)y=C$, где C – константа. Тогда

$$f'(x)=\frac{C}{x}; \quad f(x)=C\ln x+C_1.$$

Подставим полученную функцию в исходное уравнение:

$$C\ln xy + C_1 = C\ln x + C_1 + C\ln y + C_1 \Rightarrow C_1 = 0\,.$$

Тогда $f(x) = C\ln x$.

Задача 3. Пусть функция f непрерывна в нуле и на всей оси удовлетворяет соотношению $2f(2x) = f(x) + x$. Найти f .

Решение

Из условия задачи следует, что $2f(0) = f(0) + 0$, откуда $f(0) = 0$.
Далее

$$f(2x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{x}{2}.$$

Из этого соотношения получим цепочку равенств

$$f(x) = \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{4} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x}{8}\right] + \frac{x}{4} = \frac{1}{2^2}f\left(\frac{x}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4}\right)x =$$

$$= \frac{1}{2^2}\left[\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2^3}\right) + \frac{x}{16}\right] + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right)x = \frac{1}{2^3}f\left(\frac{x}{2^3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}\right)x = \ldots =$$

$$= \frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots + \frac{1}{2^{2n}}\right)x\,.$$

Таким образом,

$$f(x) = \frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right) + \frac{x}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right).$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $n \to \infty$, получим $f(x) = \dfrac{x}{3}$. Проверкой убеждаемся, что найденная функция удовлетворяет исходному уравнению.

Ряд задач по теме «Функциональные уравнения» можно отнести к функциональным уравнениям Коши.

Определение. Функциональными уравнениями Коши называются уравнения вида

$$1^0.\ f(x+y)=f(x)+f(y),\quad x,y\in R;$$
$$2^0.\ f(x+y)=f(x)\cdot f(y),\quad x,y\in R;$$
$$3^0.\ f(x\cdot y)=f(x)+f(y),\quad x>0, y>0;$$
$$4^0.\ f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y),\quad x>0, y>0.$$

В курсе математического анализа доказывается [1], что единственными решениями в классе непрерывных функций являются

$$1^0.\ f(x)=cx,\ c=\text{const},\quad c\in R;$$
$$2^0.\ f(x)=a^x\ \ (a>0)\ \text{ и }\ f(x)\equiv 0;$$
$$3^0.\ f(x)=\log_a x,\ \ (a>0,\ a\neq 1)\ \text{ и }\ f(x)\equiv 0;$$
$$4^0.\ f(x)=x^{\alpha},\ \alpha\in R\ \text{ и }\ f(x)\equiv 0.$$

Задача 4. Найти непрерывное решение функционального уравнения

$$f\left(\sqrt[3]{x^3+y^3}\right)=f(x)+f(y),\quad x,y\in R,$$

удовлетворяющее условию $f(2)=1$.

Решение

Выполним замену переменных: $x=\sqrt[3]{u},\ y=\sqrt[3]{v}$. Тогда уравнение примет вид

$$f\left(\sqrt[3]{u+v}\right)=f\left(\sqrt[3]{u}\right)+f\left(\sqrt[3]{v}\right).$$

Положим, что $g(t)=\sqrt[3]{t}$, и рассмотрим сложную функцию $\varphi(t)=f\left(g(t)\right)$. Тогда последнее равенство запишется в виде

$$\varphi(u+v)=\varphi(u)+\varphi(v).$$

Уравнение для функции φ относится к уравнению Коши типа 1^0. Поэтому $\varphi(t)=Ct\Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{t}\right)=Ct$. Следовательно, $f(x)=Cx^3$. Учитывая условие $f(2)=1$, найдем $C=\frac{1}{8}$. Соответственно, $f(x)=\frac{x^3}{8}$.

Задача 5. Найти все непрерывные на R функции f такие, что

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+x^2y+xy^2,\quad \forall x,y\in R.$$

Решение

Сначала предположим, что функция f дважды дифференцируема на всей числовой прямой и продифференцируем данное равенство сначала по переменной x, а затем по переменной y:

$$f'(x+y) = f'(x) + 2xy + y^2; \quad f''(x+y) = 2x + 2y.$$

В последнем равенстве положим, что $y = 0$. Получим $f''(x) = 2x$. Тогда $f'(x) = x^2 + C$, $f(x) = \frac{x^3}{3} + Cx + C_1$. Положив в исходном уравнении, что $x = 0,\ y = 0$, получим $f(0) = 0$. Поэтому $C_1 = 0$ и $f(x) = \frac{x^3}{3} + Cx$.

Теперь будем искать решение уравнения в классе непрерывных функций. Положим, что $f(x) = \frac{x^3}{3} + g(x)$, где $g(x)$ – неизвестная непрерывная функция. Из начального уравнения получим

$$\frac{(x+y)^3}{3} + g(x+y) = \frac{x^3}{3} + g(x) + \frac{y^3}{3} + g(y) + x^2y + xy^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x+y) = g(x) + g(y).$$

Относительно функции $g(x)$ получили функциональное уравнение Коши типа 1^0. Следовательно, $g(x) = Cx$. Тогда $f(x) = \frac{x^3}{3} + Cx$.

Задача 6. Найти все непрерывные на R функции f такие, что

$$f(xy) = yf(x) + xf(y), \quad \forall x, y \in R.$$

Решение

Найдем некоторые частные значения функции f, используя уравнения $x = 0,\ \ y = 0 \Rightarrow f(0) = 0$; $x = 1,\ \ y = 1 \Rightarrow f(1) = 0$; $x = -1,\ \ y = -1 \Rightarrow f(1) = -f(-1) - f(-1) \Rightarrow f(-1) = 0$.

Далее из исходного равенства получим

$$f(-xy) = yf(-x) - xf(y); \quad f(-xy) = -yf(x) + xf(-y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow yf(-x) - xf(y) = -yf(x) + xf(-y).$$

Полагая в последнем равенстве, что $y = 1$, с учетом найденных частных значений функции f, получим $f(-x) = -f(x)$, т. е. функция f является нечетной. Далее будем решать задачу для положительных значений аргумента.

Поделим обе части уравнения на xy и введем в рассмотрение функцию $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Тогда $g(xy) = g(x) + g(y)$. То есть функция $g(x)$ удовлетворяет уравнению Коши типа 3^0. Поэтому $g(x) = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$. Следовательно, $f(x) = x\log_a x$. Учитывая нечетность функции f, получаем ответ.

$$f(x) = \begin{cases} x\log_a |x| \ (a > 0,\ a \neq 1),\ x \neq 0; \\ 0,\ x = 0. \end{cases}$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Фихтенгольц, Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – Москва: Наука, 1969. – Т. 1. – 728 с.

2. **Садовничий, В. А.** Задачи студенческих олимпиад по математике / В. А. Садовничий, А. С. Подколозин. – Москва: Наука, 1978. – 208 с.

3. **Лихтарников, Л. М.** Элементарное введение в функциональные уравнения / Л. М. Лихтарников. – Санкт-Петербург: Лань, 1997. – 156 с.

4. **Попов, И. Ю.** Задачи повышенной трудности в курсе высшей математики: учебное пособие / И. Ю. Попов. – Санкт-Петербург: СПбГУ ИТМО, 2008. – 214 с.

5. **Борисов, А. А.** Решение функциональных уравнений с использованием понятия группы / А. А. Борисов // Вопросы методики подготовки к математическим олимпиадам в высшей школе: сб. докл. семинара. – Санкт-Петербург: СПбТПП, 2005. – Вып. 7. – С. 20–26.

6. **Гулевич, Н. М.** Функциональные уравнения Коши / Н. М. Гулевич, О. Н. Амплеева, В. О. Кузнецова // Вопросы методики подготовки к математическим олимпиадам в высшей школе: сб. докл. семинара. – Санкт-Петербург: СПбТПП, 2005. – Вып. 7. – С. 29–32.

УДК 372.8

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОНЛАЙН-КАЛЬКУЛЯТОРОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ НА АВТОМЕХАНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЯХ

А. Н. БОНДАРЕВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Важнейшей составляющей процесса обучения математике в высших учебных заведениях, помимо лекций и практических занятий, является самостоятельная работа студентов, которая может быть организована различными спосо-