риалу [1]. Обеспечивает этот прием реализацию образовательной, диагностирующей, практической, прогностической функций обучения.

Таким образом, при использовании различных приемов интерактивного обучения математике учебный процесс организован таким образом, что в определенной степени обеспечивается реализация всех указанных функций обучения математике.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бутома, А. М.** Приемы интерактивного обучения математике как средство развития критического мышления студентов / А. М. Бутома // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2021. – С. 29–32.

УДК 378.147:51

ТЕОРИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В ДЕЙСТВИИ

Л. Л. ВЕЛИКОВИЧ
Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого
Гомель, Беларусь

«*Легкость, с которой удается вспомнить информацию, влияет на умозаключения*».
Лиоба Верт

Некоторые сведения из теории решения задач (ТРЗ). В основе ТРЗ лежит следующее (авторское) описание предмета математики: «Математика – это игра по правилам, в соответствии с которыми строятся необходимые логические цепочки с целью получения полезной информации» [1].

Полезной считается та информация, которая способствует продвижению в решении задачи. В ТРЗ под *задачей* будем понимать упорядоченную четверку (Ω, A, B, X), где Ω – носитель задачи, A – условие (множество посылок), B – заключение (множество следствий), X – решение задачи как процесс получения информации.

Примечание. Заключение B, очевидно, является требуемым конечным результатом (ТКР) данной деятельности.

В качестве первичных (неопределяемых) понятий ТРЗ принимаем следующие: объект, субъект, связь, действие. *Операцией* будем называть некоторую последовательность действий (в частности, она может состоять из одного действия). *Ситуацией* будем называть любое множество объектов и связей между ними. Минимальная ситуация содержит два объекта и одну связь. Назовем ее *связной парой* (СП). Это понятие лежит в основе универсального метода решения математических (и не только) задач, которому было дано название «метод связных пар». Его идея состоит в следующем:

– процесс поиска решения задачи включает в себя поиск информационной структуры решения (ИСР);

– носителем структурной единицы информации является связная пара (в терминах теории графов – это ребро);

– ИСР – некоторая совокупность структурных единиц информации, причем возможен вариант, когда ребро превращается в точку для построения следующего ребра.

Замечание. Сразу же возникает главный вопрос: «А как строить (находить) СП?». Понятно, что общего рецепта для этого, увы, не существует. Но достаточно часто может оказаться полезной следующая схема (рис. 1), которую будем называть основной схемой решения задач (ОСРЗ).

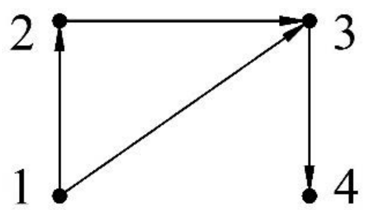

Рис. 1. ОСРЗ: 1 – моя ситуация (МС); 2 – стандартная ситуация (СС); 3 – целевая ситуация (ЦС); 4 – требуемый конечный результат (ТКР); (1, 2) – поиск СС; (2, 3) – стандартное решение (СР); (1, 3) – мое решение; (3, 4) – получение ТКР

Комментарий. Предположим, что в процессе поиска решения задачи пришли к некоторой ситуации (назовем ее «моей ситуацией»), которую требуется разрешить. Если повезет и удастся свести «мою ситуацию» к стандартной (см. рис. 1, цифра 2), т. е. известной из соответствующей теории (называют еще так: patterns), то дела идут на лад. Например, в геометрии роль СС выполняют теоремы и аксиомы.

Метод связных пар в действии.

Задача 1. Точка пересечения медиан прямоугольного треугольника лежит на окружности, вписанной в треугольник. Найти острые углы треугольника [2, с. 24, № 25].

Решение

Для ΔACB, где C – прямой угол, введем систему координат следующим образом: начало находится в точке C. Ось Ox направим по катету CA, а ось Oy – по катету CB. Пусть далее $\angle ABC = \beta$, $AC = a$, $BC = b$. Тогда вершины треугольника имеют координаты $C(0;0)$, $A(a;0)$, $B(0;b)$. Точка пересечения медиан $M\ (a/3;\ b/3)$.

Радиус вписанной окружности $r=(a+b-c)/2$. Уравнение этой окружности $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$.

По условию точка пересечения медиан лежит на окружности. Следовательно, $(a/3-r)^2+(b/3-r)^2=r^2$. Учитывая, что $a^2+b^2=c^2$, после тождественных преобразований приходим к уравнению $5c^2-3ab-3ac-3bc=0$. Откуда $5-3\dfrac{ab}{c^2}-3\dfrac{ac}{c^2}-3\dfrac{bc}{c^2}=0$. Так как $\dfrac{a}{c}=\sin\beta$, $\dfrac{b}{c}=\cos\beta$, то последнее равенство перепишется в виде $5/3=\sin\beta+\cos\beta+\sin\beta\cos\beta$.

Откуда

$$\frac{25}{9}-\frac{10}{3}\sin\beta\cos\beta+\sin^2\beta\cos^2\beta=\sin^2\beta+\cos^2\beta+2\sin\beta\cos\beta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\sin^2 2\beta-\frac{8}{3}\sin 2\beta+\frac{16}{9}=0 \;\Rightarrow\; \sin 2\beta=\frac{\frac{8}{3}\pm\frac{4}{3}\sqrt{3}}{2\cdot\frac{1}{4}} \;\Rightarrow\; \beta=\frac{16-8\sqrt{3}}{3},$$

ибо

$$\frac{\frac{8}{3}+\frac{4}{3}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}>1.$$

Комментарий.

1 В данной задаче, следуя Р. Декарту, обошлись без чертежа.

2 Данное решение осуществил студент Виталий Писарев (гр. НР-11).

3 В [2, с. 68] в результате элементарного решения И. Ф. Шарыгин приводит следующий ответ: углы треугольника равны $\pi/4\pm\arccos((4\sqrt{6}-3\sqrt{2})/6)$. Было бы интересно сверить результаты.

4 Проведем анализ решения с позиций МСП:

а) главная «ситуация-идея» − это воспользоваться методом координат; для этого установили естественную связь между объектом (ΔACB) и системой координат xOy;

б) далее идут в ход стандартные ситуации («ситуации-инструменты») из аналитической геометрии: центр тяжести однородной треугольной пластины, уравнение окружности, факт принадлежности точки пересечения медиан треугольника окружности;

в) тут же на помощь им спешат patterns из элементарной геометрии: выражение радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, через стороны и теорема Пифагора.

5. Связная пара: «точка пересечения медиан треугольника лежит на вписанной окружности» − вряд ли выглядит очень естественно. Откуда и не очень эстетичные результаты.

Прием «понижения-повышения» размерности.

Значительно чаще используется его вторая составляющая, а именно «повышение размерности», с целью увеличения степени свободы ситуации [3].

Хорошим примером может служить решение Ж. Л. Лагранжем следующей задачи оптимизации: требуется найти экстремум функции двух переменных $U = f(x, y)$ при условии связи $\varphi(x, y) = 0$. Лагранж предложил связать два объекта f и φ с помощью новой функции $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, \varphi(x, y)$, где параметр λ как раз и обеспечивает дополнительную степень свободы. Иногда, если повезет и удастся уравнение $\varphi(x, y) = 0$ разрешить относительно одной из переменных (скажем, $y = h(x)$), то, подставляя эту связь в основное уравнение, получим $U = f(x, h(x))$ и тем самым понизим размерность проблемы, а далее − включаются методы безусловной оптимизации. В заключение приведем занятную задачу на применение данного приема.

Задача 2. По поверхности единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ползет жук. Найти для него маршрут кратчайшей длины из точки A в точку C_1 и вычислить его длину.

Читателю предоставляется возможность самому понять, какую составляющую приема «понижение-повышение размерности» следует выбрать для решения задачи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Великович, Л. Л.** Информационный подход к математике и её преподаванию / Л. Л. Великович // Актуальные проблемы естественных наук и их преподавания: сб. науч. ст. Междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 100-летию МГУ им. А. А. Кулешова, Могилев, 20–22 февр. 2013 г. – Могилев, 2013. – С. 97–101.

2. **Шарыгин, И. Ф.** Задачи по геометрии (планиметрия) / И. Ф. Шарыгин. – Москва: Наука, 1982. – Вып. 17. – 328 с.

3. **Великович, Л. Л.** Теория решения задач: тезисы и комментарии / Л. Л. Великович // Методология и технологии образования в XXI веке: математика, информатика, физика: материалы Междунар. науч.-практ. конф. – Минск: Белорус. гос. пед. ун-т им. М. Танка, 2005. − С. 20–23.