4. **Кулюткин, Ю. Н.** Психология изучения взрослых / Ю. Н. Кулюткин. – Москва: Просвещение, 1985. – 128 с.

УДК 378

РЕШЕНИЯ НАИБОЛЕЕ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ XII ОТКРЫТОЙ ОЛИМПИАДЫ БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ПО МАТЕМАТИКЕ

В. Г. ЗАМУРАЕВ
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

XII Открытая олимпиада Белорусско-Российского университета по математике ([1, 2] и список литературы в [1]) состоялась 17 февраля 2022 г. В соревновании приняли участие 25 студентов и аспирантов из 12 вузов Беларуси, России и Таджикистана. Участникам было предложено для решения 30 заданий в тестовой форме, которые следовало выполнить в течение 5 ч. Жюри проверяло лишь ответы. При подсчёте количества набранных баллов учитывались коэффициенты сложности заданий: чем меньшее число участников дали правильный ответ, тем более сложным считалось задание.

Победителем олимпиады стал студент Университета ИТМО (Санкт-Петербург, Россия) Захар Яковлев, давший 26 правильных ответов. Второе место занял студент Университета ИТМО Геннадий Короткевич (25 правильных ответов), третьим стал студент Санкт-Петербургского государственного университета (Россия) Никита Вяткин (24 правильных ответа).

Наиболее сложными заданиями двенадцатой олимпиады оказались рассматриваемые ниже задачи 1–3. Задачу 1 решил один участник, а правильные ответы в задачах 2 и 3 смогли дать по 2 участника.

Задача 1 [3, с. 20]. При каком наибольшем значении λ уравнение $y' = ax^3 + by^\lambda$ приводится к однородному с помощью замены $y = z^m$?

Решение

Сделаем замену $y = z^m$, $y' = mz^{m-1}z'$. После замены получаем уравнение $mz^{m-1}z' = ax^3 + bz^{\lambda m}$. В дифференциальной форме

$$mz^{m-1}dz = \left(ax^3 + bz^{\lambda m}\right)dx .$$

Полученное уравнение будет однородным, если функции mz^{m-1} и

$$ax^3 + bz^{\lambda m}$$

будут однородными функциями одного и того же порядка 3. Откуда

$$m = 4,\ \lambda m = 3,\ \lambda = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $\frac{3}{4}$.

Задача 2 [4, с. 46]. Найдите площадь фигуры, образованной при касании парабол $x^2 = \pm 22y$, $y^2 = \pm 22\left(x \mp a\right)$.

Решение

В силу симметрии рассмотрим параболы в первой четверти:

$$x^2 = 22y,\ y^2 = 22\left(x - a\right),\ x \ge 0,\ y \ge 0.$$

В точке касания совпадают значения функций и их производных:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{22} = \sqrt{22\left(x - a\right)}; \\ \dfrac{x}{11} = \dfrac{\sqrt{22}}{2\sqrt{x - a}}. \end{cases}$$

Откуда $x = 11\sqrt[3]{2}$, $y = \dfrac{11}{\sqrt[3]{2}}$, $a = \dfrac{33}{4}\sqrt[3]{2}$.

Площадь области определяется интегралом

$$S = 4\int\limits_0^{11/\sqrt[3]{2}} \left(\frac{y^2}{22} + \frac{33}{4}\sqrt[3]{2} - \sqrt{22y}\right)dy =$$

$$= 4\left(\frac{y^3}{66} + \frac{33\sqrt[3]{2}y}{4} - \frac{2\sqrt{22}y\sqrt{y}}{3}\right)\Bigg|_0^{11/\sqrt[3]{2}} = \frac{242}{3}.$$

Ответ: $\frac{242}{3}$.

Задача 3 [5, с. 51]. Пусть $F\left(x\right)$ – преобразование Вейерштрасса функции $f\left(t\right) = \cos t$:

$$F\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x - t\right)^2}\cos t dt.$$

Найдите $F\left(\pi\right)$.

Решение

Полагая, что $x-t=\tau$, получаем

$$F\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\tau^2}\cos\left(x-\tau\right)d\tau=$$

$$=\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\tau^2}\cos\tau d\tau+\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\tau^2}\sin\tau d\tau\,.$$

Второй интеграл равен нулю в силу нечётности подынтегральной функции. Первый интеграл, в силу чётности подынтегральной функции,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\tau^2}\cos\tau d\tau=2\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\tau^2}\cos\tau d\tau\,.$$

Рассмотрим интеграл более общего вида $I\left(a\right)=\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\tau^2}\cos a\tau d\tau$, $a\in\mathbb{R}$.

Функции $f\left(a,\tau\right)=e^{-\tau^2}\cos a\tau$ и $f'_a\left(a,\tau\right)=-\tau e^{-\tau^2}\sin a\tau$ непрерывны в области $0\le\tau<+\infty$, $-\infty<a<+\infty$; интегралы

$$\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\tau^2}\cos a\tau d\tau\,,\ \int\limits_{0}^{+\infty}\tau e^{-\tau^2}\sin a\tau d\tau\,,$$

в силу признака Вейерштрасса, сходятся равномерно относительно параметра a. Следовательно, функции $I\left(a\right)$ и $I'\left(a\right)$ непрерывны $\forall a\in\mathbb{R}$ и

$$I'\left(a\right)=-\int\limits_{0}^{+\infty}\tau e^{-\tau^2}\sin a\tau d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}e^{-\tau^2}\sin a\tau\Big|_{0}^{+\infty}-\frac{a}{2}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\tau^2}\cos a\tau d\tau=-\frac{a}{2}I\left(a\right).$$

Отсюда $I'\left(a\right)+\frac{a}{2}I\left(a\right)=0$. Решая это уравнение, находим $I\left(a\right)=Ce^{-\frac{a^2}{4}}$.

Поскольку $I\left(0\right)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\tau^2}d\tau=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, то $I\left(a\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{a^2}{4}}$, $a\in\mathbb{R}$.

Тогда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\tau^2}\cos\tau d\tau=\sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4}}$, $F\left(x\right)=e^{-\frac{1}{4}}\cos x$, $F\left(\pi\right)=-e^{-\frac{1}{4}}$.

Ответ: $-e^{-\frac{1}{4}}$.

Правильный ответ в задании 1 дал Давид Габидуллин (Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Россия). Правильные ответы в задании 2 дали Захар Яковлев и Геннадий Короткевич, в задании 3 – Захар Яковлев и Чамолиддин Шарипов (филиал Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова в городе Душанбе, Таджикистан).

Наиболее простыми заданиями олимпиады оказались приведенные ниже задачи 4, 5 и 6, правильные ответы в которых дали 19, 17 и 16 участников соответственно.

Задача 4 [6, с. 31]. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить доску 8×8 клеток так, чтобы каждая клетка граничила по стороне хотя бы с двумя клетками своего цвета? Каждая клетка закрашивается целиком в один цвет.

Ответ: 16.

Задача 5 [7, с. 29]. Найдите количество чисел, одновременно являющихся членами двух арифметических прогрессий: 3, 7, 11, …, 407 и 2, 9, 16, …, 709.

Ответ: 14.

Задача 6 [8, с. 53]. Найдите определитель десятого порядка, на главной диагонали которого расположены числа 2023, а все остальные элементы равны 2022.

Ответ: 20221.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Замураев, В. Г.** Решения наиболее сложных задач XI Открытой олимпиады Белорусско-Российского университета по математике / В. Г. Замураев // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2021. – С. 50–56.

2. **Замураев, В. Г.** Решения некоторых сложных задач IX и XI Открытых олимпиад Белорусско-Российского университета по математике / В. Г. Замураев // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях : материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2022. – С. 54–59.

3. **Филиппов, А. Ф.** Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. – Иркутск: ИрГУПС, 2000. – 176 с.

4. **Толстых, О. Д.** Нестандартные и прикладные задачи высшей математики: учебное пособие: в 4 ч. / О. Д. Толстых. – Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2017. – Ч. 4. – 80 с.

5. Справочное пособие по высшей математике: в 5 т. Т. 3: Математический анализ: кратные и криволинейные интегралы / И. И. Ляшко [и др.]. – Москва: Едиториал УРСС, 2001. – 224 с.

6. **Екимова, М. А.** Задачи на разрезание / М. А. Екимова, Г. П. Кукин. – Москва: МЦНМО, 2002. – 120 с.

7. **Дорофеев, Г. В.** Пособие по математике для поступающих в вузы / Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов. – Москва: Наука, 1976. – 638 с.

8. **Ланкастер, П.** Теория матриц / П. Ланкастер. – Москва: Наука, 1973. – 280 с.

УДК 378.147

АКТУАЛЬНОСТЬ МЕЖКАФЕДРАЛЬНОГО НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКОГО СЕМИНАРА ПО РАБОТЕ С ОДАРЕННОЙ МОЛОДЕЖЬЮ

И. А. ИВАЩЕНКО, В. П. ДОМАШОВ
Военная академия Республики Беларусь
Минск, Беларусь

Руководством государства значимое внимание уделяется развитию творческих способностей и инициатив современной молодежи. На республиканском уровне организуются конкурсы, соревнования, олимпиады, создающие возможности студенческой молодежи проявить творческие и интеллектуальные способности в различных направлениях деятельности. Создана нормативная база, учреждены специальные фонды по поддержке одаренной молодежи.

В учреждении образования «Военная академия Республики Беларусь» (далее – Военная академия) одним из важнейших направлений организации работы с курсантами является создание условий для раскрытия и развития творческих способностей обучающихся. На это направлена деятельность отдела организации военно-научной работы с курсантами, на многих кафедрах работают научные и научно-технические кружки различного направления, творческие мастерские, организованы спортивные секции, кружки художественного творчества. Широкий спектр организуемых и поддерживаемых руководством академии научно-технических, военно-патриотических, спортивных мероприятий, наравне с непосредственно учебным процессом, направлен на воспитание и формирование компетентного специалиста, патриота, многогранной личности. Системный подход в работе кафедр позволяет разглядеть способности, создать