

уровня предлагаются нетипичные задачи, но знакомые студентам или выходящие за рамки известного лишь незначительно; задачи третьего уровня требуют творчества в выборе математического аппарата, интегрируют знания из разных разделов курса, разрабатывается алгоритм решения. Работа с разноуровневыми задачами позволяет формировать у обучающихся умение применять знания, фиксировать степень овладения этим умением, судить о качестве усвоения учебного материала и управлять процессом учения.

Дифференциацию процесса обучения можно соотносить либо с отбором форм, методов и приемов обучения, либо с содержанием образования, либо с выделением мобильных групп студентов, нацеленных на решение не только образовательных задач, но и на личностное развитие обучающихся.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Столяр, А. А.** Педагогика математики: учебное пособие для пединститутов / А. А. Столяр. – Минск: Вышэйшая школа, 1986. – 414 с.
2. **Якиманская, И. С.** Личностно-ориентированное обучение в современной школе / И. С. Якиманская. – 2-е изд. – Москва: Сентябрь, 2000. – 112 с.
3. **Капинос, А. Н.** Уровневая дифференциация при обучении математике / А. Н. Капинос // Математика в школе. – 1990. – № 5. – С. 31–40.

УДК 004.421.2:06:519.67

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БИБЛИОТЕКИ SYMPY

Г. Ч. ШУШКЕВИЧ, С. В. ШУШКЕВИЧ

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
Гродно, Беларусь

Современный образовательный процесс невозможен без применения систем компьютерной математики (СКМ) для решения учебных и научно-исследовательских задач, что изменяет технологии обучения студентов и меняет их отношение к изучению математических, технических и других дисциплин [1–5].

Коммерческие СКМ, такие как Maple, Mathematica, Mathcad, Matlab, достаточно дороги, и не каждый пользователь или учебное заведение может приобрести системы с высокой стоимостью индивидуальной лицензии. В образовательном процессе возможно приобретение недорогой подписки на веб-сервис СКМ, либо для замены коммерческого программного обеспечения, использование бес-

платных СКМ, например, Maxima, Scilab, Octave, Smath Studio, Symru. Со сравнительным анализом СКМ – Maple, Mathematica, Matlab и Symru можно ознакомиться в [6].

В данной статье приведены примеры использования бесплатной библиотеки Symru, написанной на языке Python, для аналитического решения дифференциальных уравнений.

Функция dsolve находит аналитические решения обыкновенных дифференциальных уравнений различных типов [7]: dsolve(equation,y(x)), где equation – дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции y(x).

Функция checkodesol(eqn,y) проверяет правильность полученного аналитического решения задачи.

Задача 1. Найти аналитическое решение обыкновенного дифференциального уравнения Бернулли $xy'(x) + y(x) = x^3 y(x)^2$.

Python – документ.

```
from sympy.plotting import plot
from sympy import *
x,z = symbols("x,z"); y = symbols('y', cls=Function)
# Уравнение Бернулли
eqn = Eq(x*diff(y(x), x) + y(x), y(x)**2*x**3)
print(' Уравнение Бернулли ')
pprint(eqn); z = dsolve(eqn, y(x))
print("----- Решение уравнения Бернулли")
pprint(z); print(); print("----- Проверка")
print(checkodesol(eqn,z))
```

Результат вычисления

<p>Уравнение Бернулли</p> $x \cdot \frac{d}{dx}(y(x)) + y(x) = x^3 \cdot y^2(x)$ <p>----- Решение уравнения Бернулли</p> $y(x) = \frac{2}{x \cdot (C_1 - x^2)}$ <p>----- Проверка</p> <p>(True, 0)</p>
--

Задача 2. Найти решение задачи Коши: $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \cos x + e^{-x} \sin 2x$; $y(0) = 1,25$; $y'(0) = 1$. Построить график функции y(x).

Python – документ.

```

from sympy.plotting import plot
from sympy import *
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x=symbols("x"); y=symbols('y', cls=Function)
eqn=Eq(y(x).diff(x,2)+2*y(x).diff(x)+y(x), sin(2*x)*exp(-x)+cos(2*x))
print('***** Исходное дифференциальное уравнение *****')
pprint(eqn); print()
zk=dsolve(eqn, y(x), ics={y(0):1.25,y(x).diff(x).subs(x,0):1})
print("----- Решение задачи Коши"); pprint(zk);
print("----- Проверка"); print(checkodesol(eqn,zk))
# Построение графика решения
Ys = lambdify(x, zk.rhs, 'numpy'); t = np.linspace(0, 10, 100)
plt.title('Решение задачи Коши', fontsize=14)
plt.xlabel('Переменная x', fontsize=12); plt.ylabel('Функция y', fontsize=12)
plt.plot(t, Ys(t),linewidth=2); plt.grid(True)

```

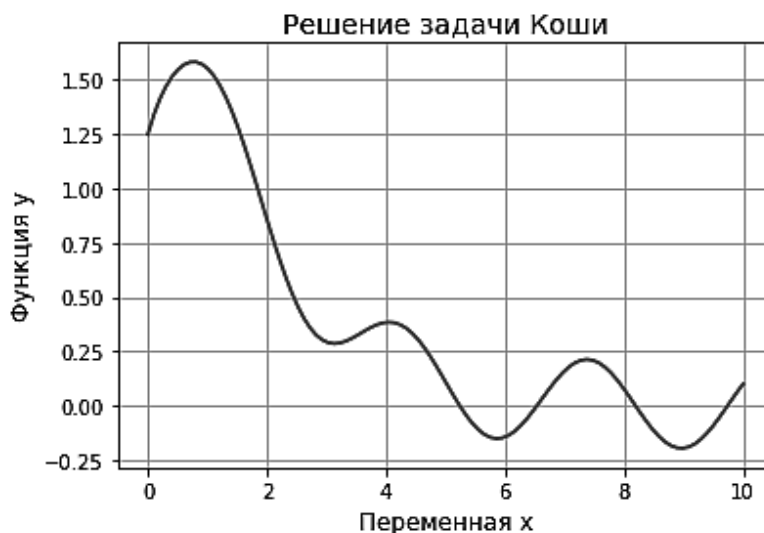
Результат вычисления

```

***** Исходное дифференциальное уравнение *****
              2
          d      d
y(x) + 2·—(y(x)) + —(y(x)) = cos(2·x) + e-x · sin(2·x)
          dx      dx
----- Решение задачи Коши
y(x) = ( sin(2·x) )-x +  $\frac{4 \cdot \sin(2 \cdot x)}{25}$  -  $\frac{3 \cdot \cos(2 \cdot x)}{25}$ 
        ( 2.55·x -  $\frac{\sin(2 \cdot x)}{4}$  + 1.37 ) · e
----- Проверка
(True, 0)

```

График функции $y(x)$



СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шушкевич, Г. Ч.** Компьютерные технологии в математике. Система Mathcad 14: учебное пособие: в 2 ч. / Г. Ч. Шушкевич, С. В. Шушкевич. – Минск: Изд-во Гревцова, 2012. – Ч. 2. – 256 с.
2. **Воронич, В. Е.** Применение системы MathCad для расчетов переходных процессов в курсе электротехники / В. Е. Воронич, Г. Ч. Шушкевич // Математическое моделирование и новые образовательные технологии в математике: сб. тез. докл. Респ. науч.-практ. конф. – Брест: БрГУ им. А. С. Пушкина, 2016. – С. 6–8.
3. **Горский, А. В.** О возможностях использования систем компьютерной математики в учебном процессе / А. В. Горский // Вестн. ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. – 2017. – № 3 (95). – Ч. 1. – С. 90–99.
4. **Шушкевич, Г. Ч.** Применение облачных технологий Wolfram Cloud для решения дифференциальных уравнений / Г. Ч. Шушкевич, С. В. Шушкевич // Инновационные технологии в современном образовании : материалы VI Междунар. науч.-практ. интернет-конф. – Москва: Научный консультант, 2019. – С. 724–730.
5. **Шушкевич, С. В.** Построение регрессионной модели в системе компьютерной математики Mathcad / С. В. Шушкевич, Г. Ч. Шушкевич // Преподавание математики в высшей школе и работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. науч.-практ. семинара. – Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2021. – С. 120–124.
6. Сравнительный анализ универсальных математических пакетов: Matlab, Maple, Mathematica и высокоуровневого языка программирования Python [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://the-unl.com/sravnitelnyy-analiz-universalnykh-matematicheskikh-paketov-matlab-maple-mathematica-i-vysokourovnevoy-yazyka-programmirovaniya-python-27>.
7. ODE. User Functions [Electronic resource]. – Mode of access: <https://docs.sympy.org/latest/modules/solver/ode.html>.