УДК 004.421.2:06:519.67

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ В СРЕДЕ MATHCAD

Г. Ч. ШУШКЕВИЧ, С. В. ШУШКЕВИЧ
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
Гродно, Беларусь

Компьютерное моделирование является важнейшим способом познавательной, учебной и практической деятельности студентов. Его рассматривают и как метод научного познания, и как самостоятельный вид деятельности. В компьютерное моделирование входят: построение математической модели с учетом оговоренных допущений и рамок ее применимости, разработка методов расчета сформулированной математической задачи, создание компьютерной программы, проведение вычислительного эксперимента, обработка результатов расчетов и формулировка выводов [1]. Применение систем компьютерной математики существенно облегчает и расширяет возможности проведения аналитических и численных вычислений, визуализацию и хранение данных на всех этапах компьютерного моделирования. Визуализация промежуточных результатов и решения задачи облегчает студенту понимание сути исследуемых процессов и явлений, изменения решения в зависимости от значений используемых параметров или переменных [2, 3].

Задача. Пусть в пространстве R^3 находится тонкостенная цилиндрическая трубка кругового сечения радиуса a и длины L. Боковая поверхность трубки S заряжена до потенциала V, а оба основания трубки $\Gamma_н$, $\Gamma_в$, заземлены. Оценить потенциал электростатического поля внутри и вне данной трубки для разных значений переменных, построить эквипотенциальные линии внутри цилиндра. Физические величины измеряются в системе СИ.

Математическая постановка задачи. Для решения задачи в точке $O \in R^3$ введем декартовы $\{x, y, z\}$ и цилиндрические $\{r, z, \varphi\}$ координаты, связанные соотношением

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z,$$

где $0 \le r < \infty;\ -\pi \le \varphi \le \pi;\ -\infty < z < \infty.$

Нижнее круговое основание трубки $\Gamma_н$ расположено на плоскости Oxy с центром в точке O. Образующие трубки параллельны оси Oz.

Потенциал U поля удовлетворяет уравнению Лапласа [4]:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0, \tag{1}$$

граничным условиям на основаниях трубки, условию на боковой поверхности:

$$U(M)\big|_{M\in\Gamma_н} = 0; \quad U(M)\big|_{M\in\Gamma_в} = 0; \quad U(M)\big|_{M\in S} = V, \tag{2}$$

и условию на бесконечности

$$U(M) \to 0 \quad \text{при} \quad M \to \infty, \tag{3}$$

где M – произвольная точка R^3.

Используя метод разделения переменных и учитывая независимость потенциала U от переменной φ [4], решение поставленной граничной задачи (1)–(3) можно представить в виде $V(r, z) = V_1(r, z) + V_1(r, z)$:

$$V_1(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{I_0(\pi nr / L)}{I_0(\pi na / L)} \sin(\pi nz / L), \quad \rho \le a;$$

$$V_2(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{K_0(\pi nr / L)}{K_0(\pi na / L)} \sin(\pi nz / L), \quad \rho \ge a,$$

где $b_n = \int_0^L V(z)\sin(\pi nz / L)dz$; $I_0(x)$, $K_0(x)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода, соответственно нулевого порядка.

MathCad – документ.

1. Исходные данные.

L - длина цилиндрической трубки,
a - радиус основания трубки,
V(z) - заданный потенциал на боковой поверхности

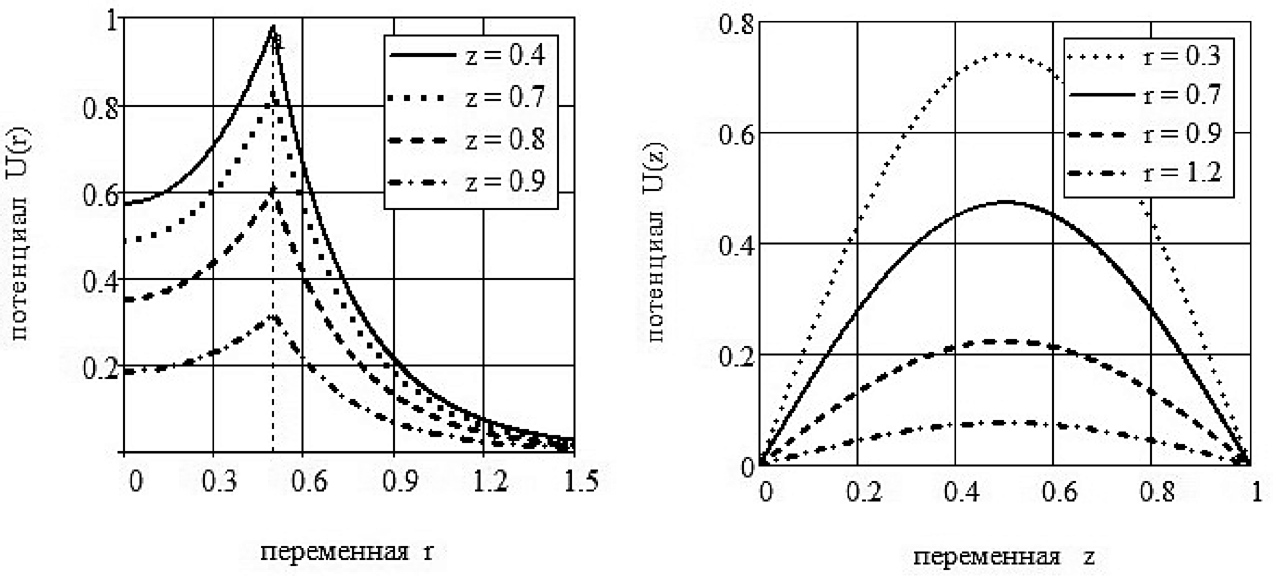
$$L := 1 \quad a := 0.5 \quad V(z) := -4\cdot z^2 + 4\cdot z \qquad b(n) := \frac{2}{L}\cdot\int_0^L V(z)\cdot\sin\left(\frac{n\cdot z\cdot\pi}{L}\right) dz$$

2. Подпрограмма – функции для вычисления потенциалов.

$$a1(n,r,z) := b(n)\cdot\frac{I0\left(\frac{\pi\cdot n\cdot r}{L}\right)}{I0\left(\frac{\pi\cdot n\cdot a}{L}\right)}\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot n\cdot z}{L}\right) \quad b1(n,r,z) := b(n)\cdot\frac{K0\left(\frac{\pi\cdot n\cdot r}{L}\right)}{K0\left(\frac{\pi\cdot n\cdot a}{L}\right)}\cdot\sin\left(\frac{\pi\cdot n\cdot z}{L}\right)$$

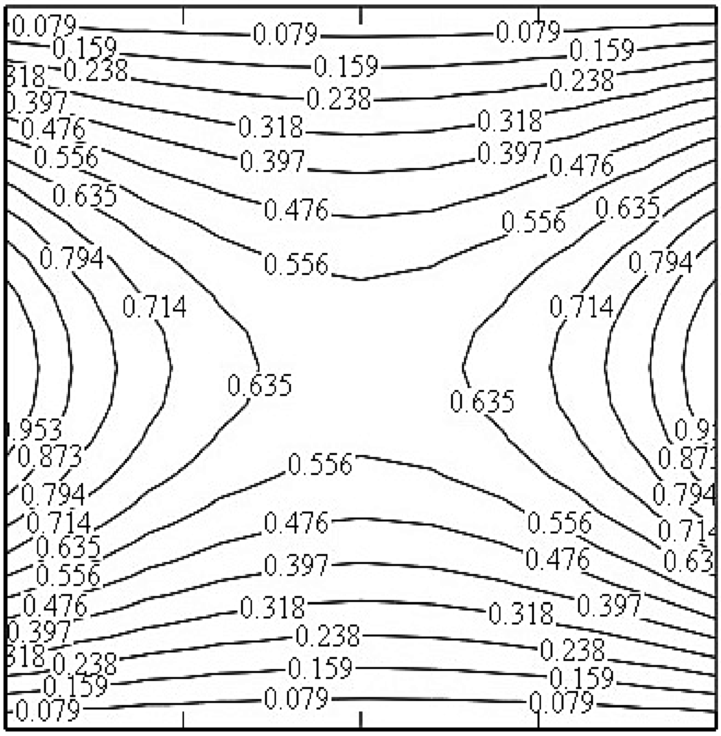
```
U1(r,z) := | n ← 0                      U2(r,z) := | n ← 1
           | S ← a1(n,r,z)                         | S ← b1(n,r,z)
           | R ← 1                                 | R ← 1
           | while |R| > 0.0001                    | while |R| > 0.0001
           |    | n ← n + 1                        |    | n ← n + 1
           |    | R ← a1(n,r,z)                    |    | R ← b1(n,r,z)
           |    | S ← S + R                        |    | S ← S + R
           | S                                     | S

U(r,z) := if(r ≤ a,U1(r,z),U2(r,z))
```

3. Графики потенциала V(r, z) для некоторых значений z (слева) и r (справа).



4. Построение эквипотенциальных линий внутри цилиндрической трубки.

$i := 0, 1 .. 10 \quad j := 0, 1 .. 20 \quad r_i := 0.1 \cdot i - 0.5 \quad z_j := 0.05 \cdot j \quad U_{i,j} := U(r_i, z_j)$



СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шушкевич, С. В.** Научные основы обучения учащихся моделированию в среде MathCAD / С. В. Шушкевич, Г. Ч. Шушкевич. – Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2019. – 164 с.

2. **Шушкевич, Г. Ч.** Компьютерные технологии в математике. Система Mathcad 14: учебное пособие: в 2 ч. / Г. Ч. Шушкевич, С. В. Шушкевич. – Минск: Изд-во Гревцова, 2012. – Ч. 2. – 256 с.

3. **Шушкевич, Г. Ч.** Компьютерное моделирование физических процессов с использованием системы Mathematica / Г. Ч. Шушкевич, С. В. Шушкевич // Инновационные технологии в современном образовании: материалы V Междунар. науч.-практ. интернет-конф. – Москва: Научный консультант, 2018. – С. 525–530.

4. **Шушкевич, Г. Ч.** Моделирование полей в многосвязных областях в задачах электростатики / Г. Ч. Шушкевич. – Saarbruchen: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 228 с.