УДК 517.3

ИНФОРМАЦИОННАЯ ЕМКОСТЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

В. А. ШИРОКОВА
Научный руководитель Е. Л. СТАРОВОЙТОВА, канд. пед. наук, доц.
Белорусско-Российский университет
Могилев, Беларусь

Определённый интеграл (ОИ) нашёл своё применение в экономике, биологии, химии, медицине, физике и геометрии. Применение ОИ во многом облегчает решение прикладных задач. Ниже приведены некоторые его приложения.

Экономические расчёты.

$$D=\int_0^T f(t)\,dt,$$

где D – объём продукции; $f(t)$ – производительность труда в момент времени t; $[T,0]$ – рассматриваемый промежуток времени.

$$t_{cp}=\frac{1}{x_1-x_2}\int_{x_1}^{x_2} t(x)\,dx,$$

где t_{cp} – среднее время изготовления изделия; $t(x)$ – функция, описывающая изменение затрат; x_1, x_2 – количество изделий.

$$P=\int_0^T f(t)e^{-pt}dt\ ,$$

где P – дисконтированный доход; $f(t)$ – функция, описывающая ежегодный доход; e^{-pt} – удельная норма процента.

Химия, биология, медицина.

$$q=\int_0^r Idt,$$

где q – количество электричества, протекшее через электролизер; r – длительность электролиза; I – функция изменения силы тока.

$$p_{ср} = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} p(t)\,dt,$$

где $p_{ср}$ – среднее кровяное давление; $p(t)$ – давление крови в выделенной точке сосуда с барорецепторами в момент времени t; $T \geq 0$.

$$M(T) = \int_{0}^{T} N(\tau)\cdot P(\tau)\,dt,$$

где $M(T)$ – биомасса популяции; τ – возраст популяции; $N(\tau)$ – число особей популяции, возраст которых равен τ; $P(\tau)$ – средняя масса особи возраста τ; T – максимальный возраст особи популяции.

$$N(t) = \int_{t_0}^{T} v(t)\,dt,$$

где $v(t)$ – скорость роста некоторой популяции; $N(t)$ – прирост численности за промежуток времени от t_0 до T.

Пример 1 – Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от $x_1 = 50$ до $x_1 = 75$ изделий, если функция изменения затрат времени $t = 100x^{\frac{-1}{2}}dx$ (в часах).

Решение

$$t_{ср} = \frac{1}{75-50}\int_{50}^{75} 100x^{\frac{-1}{2}}dx = \frac{100}{25}\int_{50}^{75}\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 8\sqrt{x}\Big|_{50}^{75} = 11{,}2 \text{ ч.}$$

Пример 2 – Определить объём произведённой продукции за время t = 5 ч, если производительность труда задана формулой $f(t) = t^2 + 6t$ (единиц в час).

Решение

$$D = \int_{0}^{5}\left(t^2 + 6t\right)dt = \left(\frac{t^2}{3} + 3t^2\right)\Bigg|_{0}^{5} = 116{,}6 \text{ у. е.}$$

Пример 3 – Определить дисконтированный доход за 3 года при процентной ставке 10 %, если первоначальное капиталовложение составило 15 млн р.

и намечается ежегодно капитал увеличивать на 5 млн р.

Решение

Составим функцию ежегодного дохода $f(t)=15+5t$. Тогда дисконтированная сумма капиталовложения $P=\int\limits_0^3 f(15+5e)e^{-0,1t}dt$. Интегрируем по частям (метод подстановки): $u=15+5t;\ du=5dt;\ dv=e^{-0,1t}tdt;\ V=-10e^{-0,1t}$.

Отсюда

$$P=-10(15+5t)e^{-0,1t}\Big|_0^3+50\int\limits_0^3 e^{-0,1t}dt=-72-500e^{-0,1t}\Big|_0^3=-72+130=58\,\text{млн р.}$$

Это означает, что для получения одинаковой наращенной суммы через 3 года ежегодные капиталовложения от 10 до 30 млнр. равны одновременным первоначальным вложениям 58 млнр. при той же исчисляемой непрерывной процентной ставке.

Пример 4 – За первые 15 дней химиотерапии масса злокачественного новообразования уменьшалась со скоростью $N(t)=-1,5t+0,018t^2$ (грамм в день). Какова масса опухоли на двенадцатый день лечения, если начальная ее масса равнялась 250 г?

Решение

$$N(12)=N(0)+\int\limits_0^{12}N(t)dt=N(0)+\int\limits_0^{12}\left(-1,5t+0,018t^2\right)dt=250+\left(\frac{-3t^2}{4}+\frac{t^3}{150}\right)\Bigg|_0^{12}=$$

$$=250+(-108+12)=154\ \text{г.}$$

Пример 5 – Вычислить прирост численности популяции за 3 года, если функция скорости роста имеет вид: $v(t)=16t^2+4$.

Решение

Воспользовавшись формулой $N(t)=\int\limits_{t_0}^{T}v(t)dt$, получим

$$N(t)=\int\limits_0^3\left(6t^2+4\right)dt=\int\limits_0^3 6t^2dt+\int\limits_0^3 4dt=\left(2t^3+4t\right)\Big|_0^3=66\ \text{особей.}$$

Таким образом, прирост популяции за 3 года составит 66 особей.

Пример 6 – Комната похожа на две пересекающиеся параболы. Какое количество краски понадобится для ее покраски, если длина комнаты – 80 м, ширина в центре – 20 м, а на каждый квадратный метр необходимо 0,25 кг краски?

Решение

Введем систему координат: начало координат поместим в центре, а ось x – вдоль комнаты (рис. 1).

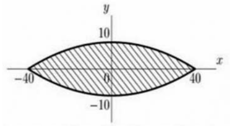

Рис. 1

Определим уравнение одной из парабол для нахождения площади комнаты. Общее уравнение параболы имеет вид: $y = ax^2 + bx + c$.

Точки $(-40;0)$, $(40;0)$, $(0;10)$ принадлежат параболе, значит решением

системы уравнений $\begin{cases} 40a^2 + 40b + c = 0; \\ 40a^2 - 40b + c = 0; \\ c = 10 \end{cases}$

являются следующие числа: $a = -\dfrac{1}{160}$, $b = 0$, $c = 10$. Значит уравнение искомой параболы имеет вид: $y = -\dfrac{1}{160}x^2 + 10$. Площадь половины комнаты найдём по формуле $S = \int\limits_a^b f(x)dx$, получим

$$S = \int\limits_{-40}^{40} \left(-\frac{1}{160}x^2 + 10\right)dx = \left(-\frac{x^3}{480} + 10x\right)\Bigg|_{-40}^{40} = \frac{1600}{3} \text{ м}^2.$$

Для окраски половины комнаты необходимо $0,25S = \dfrac{400}{3}$ кг краски. Значит для покраски всей комнаты понадобится $2 \cdot 0,25S = 2 \cdot \dfrac{400}{3} \approx 266,7$ кг.