МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Маркетинг и менеджмент»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические рекомендации к самостоятельной работе
для студентов специальности
1-28 01 02 «Электронный маркетинг»
заочной формы обучения

Могилев 2023

УДК 517
ББК 22.161
М34

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Маркетинг и менеджмент» «09» января 2023 г., протокол № 8

Составитель канд. пед. наук, доц. Т. С. Старовойтова

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. И. И. Маковецкий

В методических рекомендациях представлены материалы для самостоятельной работы студентов заочной формы обучения по дисциплине «Математический анализ». Основные теоретические положения проиллюстрированы примерами решения задач для подготовки к аудиторной контрольной работе, предложен ее примерный вариант.

Учебно-методическое издание

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Ответственный за выпуск	А. В. Александров
Корректор	Т. А. Рыжикова
Компьютерная верстка	Е. В. Ковалевская

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 31 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

Содержание

1 Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Понятие функции нескольких переменных. Пусть задано множество D упорядоченных пар чисел (x, y). Зависимость f, при которой каждой паре чисел (x, y) ставится в соответствие единственное число $z \in R$, называется *функцией двух переменных*, определенной на множестве D, и записывается в виде $z = f(x, y)$. При этом переменные x и y называются *аргументами* или *независимыми переменными*, а z – *функцией* или *зависимой переменной*.

Множество D всех пар значений аргументов данной функции называется *областью определения* (или областью задания) функции и обозначается $D(f)$. Если $D = D(f)$ не указано, то областью определения называется множество всех пар чисел (x, y), при которых функция имеет смысл. Множество значений, принимаемых $z = f(x, y)$ в области определения, называется *областью значений* (областью изменения) этой функции и обозначается $E(f)$.

Графиком функции двух переменных является поверхность, образованная множеством точек $M(x, y, z)$ пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $z = f(x, y)$.

Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется множество точек плоскости xOy, в которых функция принимает одно и то же значение C.

Величина U называется *функцией n переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если каждой совокупности $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из некоторой области n-мерного пространства ставится в соответствие определенное значение U. Функция n независимых переменных записывается в виде $U = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Предел функции двух переменных. Множество точек $M(x, y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$, называется δ-окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$.

Число A называется *пределом функции* $z = f(x, y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$ или, что то же самое, при $M(x, y) \to M_0(x_0, y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$ и $y \neq y_0$, удовлетворяющих условию $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$, выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. Записывают $A = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ или $A = \lim\limits_{M \to M_0} f(M)$.

Из определения следует, что если предел существует, то он не зависит от пути, по которому $M \to M_0$.

Непрерывность функции двух переменных. Функция $z = f(x,y)$ (или $z = f(M)$) называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если:

а) она определена в этой точке и некоторой ее окрестности;

б) имеет предел $A = \lim\limits_{M \to M_0} f(M)$;

в) предел равен значению функции z в точке M_0, т. е. $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ или $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

Точки, в которых нарушается хотя бы одно условие непрерывности, называются *точками разрыва*.

Для функции $z = f(x,y)$ рассматриваются *приращения аргументов* $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ и *полное приращение функции* $\Delta z = z - z_0 = f(x,y) - f(x_0, y_0)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Функция $z = f(x,y)$ называется *непрерывной* в точке $M_0(x_0, y_0)$, если выполняется равенство $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$.

Пример 1 **–** Найти область определения функции $z = \arcsin\left(x^2 + y^2 - 3\right)$.

Решение

Функция определена при выполнении условия $-1 \le x^2 + y^2 - 3 \le 1$, которое равносильно условию $2 \le x^2 + y^2 \le 4$. Граничными линиями области определения являются окружности $x^2 + y^2 = 2$ и $x^2 + y^2 = 4$, которые также принадлежат этой окружности. Таким образом, область определения функции состоит из точек, лежащих между указанными окружностями, и точек, лежащих на этих окружностях.

Пример 2 – Найти предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2}$.

Решение

Преобразуем выражение под знаком предела, умножив числитель и знаменатель дроби на выражение $\sqrt{x^2 + y^2 + 4} + 2$, сопряженное знаменателю.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+4}-2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right)} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right)}{x^2+y^2+4-4} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right)}{x^2+y^2} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(\sqrt{x^2+y^2+4}+2\right) = 4.$$

Частные производные функции двух переменных. Пусть задана функция $z = f(x; y)$, которая определена и непрерывна в некоторой области D. Будем считать, что точки с координатами $(x; y)$, $(x+\Delta x; y)$, $(x; y+\Delta y)$, $(x+\Delta x; y+\Delta y)$, где $\Delta x, \Delta y$ – приращения аргументов, также принадлежат области D.

Разности $\Delta_x z = f(x+\Delta x; y) - f(x; y)$ и $\Delta_y z = f(x; y+\Delta y) - f(x; y)$ называются *частным приращением функции* $z = f(x; y)$ по независимым переменным x и y. *Разность* $\Delta z = f(x+\Delta x; y+\Delta y) - f(x; y)$ называется *полным приращением функции* $z = f(x; y)$, соответствующим приращениям аргументов Δx и Δy. В общем случае $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Частной производной функции $z = f(x; y)$ по переменным x и y называется предел отношения соответствующего частного приращения $\Delta_x z$ и $\Delta_y z$ к приращению данной переменной при условии, что приращение переменной стремится к нулю:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x; y) - f(x; y)}{\Delta x};$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x; y+\Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}.$$

Частная производная функции нескольких переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных независимых переменных. Поэтому частные производные функции $z = f(x; y)$ находят по формулам и правилам вычисления производных функции одной переменной (при этом, соответственно, x или y считается постоянной величиной).

Пример 3 – Найти частные и полное приращение функции $z = xy^2 - \dfrac{x}{y}$ в точке $M_0(3; -2)$ при приращениях аргументов $\Delta x = 0{,}1$ и $\Delta y = -0{,}05$.

Решение

Так как $x_0 = 3$, $y_0 = -2$, то $x_0 + \Delta x = 3{,}1$, $y_0 + \Delta y = -2{,}05$, $M_1(3{,}1; -2{,}05)$.

Определим $z(M_0) = z(3; -2) = 3 \cdot (-2)^2 + \dfrac{3}{2} = 13{,}50.$

Тогда

$$z(x_0 + \Delta x; y_0) = z(3{,}1; -2) = 3{,}1 \cdot (-2)^2 + \frac{3{,}1}{2} = 13{,}95;$$

$$z(x_0; y_0 + \Delta y) = z(3; -2{,}05) = 3 \cdot (-2{,}05)^2 + \frac{3}{2{,}05} = 14{,}07;$$

$$z(M_1) = z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y\ ) = z(3{,}1; -2{,}05) = 3{,}1 \cdot (-2{,}05)^2 + \frac{3{,}1}{2{,}05} = 14{,}54.$$

Таким образом,

$$\Delta_x z = z(x_0 + \Delta x; y_0) - z(x_0; y_0) = 0{,}45;$$
$$\Delta_y z = z(x_0; y_0 + \Delta y) - z(x_0; y_0) = 0{,}57;$$
$$\Delta z = z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - z(x_0; y_0) = 14{,}54 - 13{,}50 = 1{,}04.$$

Очевидно, что $\Delta z = 1{,}04 \neq 0{,}45 + 0{,}57 = 1{,}02 = \Delta_x z + \Delta_y z$.

Пример 4 – Найти частные производные функции $z = \ln\left(x^6 + y^5 + 4xy - 3x + 7y\right)$.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (y = \mathrm{Const}) = \frac{1}{x^6 + y^5 + 4xy - 3x + 7y} \cdot \left(x^6 + y^5 + 4xy - 3x + 7y\right)' =$$
$$= \frac{1}{x^6 + y^5 + 4xy - 3x + 7y} \cdot \left(6x^5 + 4y - 3\right) = \frac{6x^5 + 4y - 3}{x^6 + y^5 + 4xy - 3x + 7y}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x = \mathrm{Const}) = \frac{1}{x^6 + y^5 + 4xy - 3x + 7y} \cdot \left(x^6 + y^5 + 4xy - 3x + 7y\right)' =$$
$$= \frac{1}{x^6 + y^5 + 4xy - 3x + 7y} \cdot \left(5y^4 + 4x + 7\right) = \frac{5y^4 + 4x + 7}{x^6 + y^5 + 4xy - 3x + 7y}.$$

Частными производными второго порядка называются частные производные, взятые от частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=x''_{xx};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=x''_{yy}.$$

Частная производная второго и более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется *смешанной частной производной*:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=x''_{xy};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=x''_{yx}.$$

Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

Пример 5 – Найти частные производные второго порядка функции $z=7x^5y^3+8xy+5x-3y$.

Решение

Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(y=\mathrm{Const}\right)=\left(7x^5y^3+8xy+5x-3y\right)'_x=35x^4y^3+8y+5;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x=\mathrm{Const}\right)=\left(7x^5y^3+8xy+5x-3y\right)'_y=21x^5y^2+8x-3.$$

Найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(35x^4y^3+8y+5\right)'_x=140x^3y^3;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(35x^4y^3+8y+5\right)'_y=105x^4y^2+8;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(21x^5y^2+8x-3\right)'_y=42x^5y;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(21x^5y^2+8x-3\right)'_x=105x^4y^2+8.$$

Очевидно, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Теорема Шварца. Если смешанные частные производные второго порядка непрерывны, то они равны между собой. Другими словами, результат смешанного дифференцирования не зависит от порядка.

Полный дифференциал функции двух переменных. Пусть функция $z=f\left(x;y\right)$ определена в некоторой окрестности точки $M\left(x;y\right)$ и полное приращение этой функции в указанной точке равняется $\Delta z = f(x+\Delta x;\, y+\Delta y) - f(x;\, y)$.

Функция $z = f(x;\, y)$ называется *дифференцируемой в точке* $M(x;\, y)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ и $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Сумма первых двух слагаемых в этом равенстве называется *главной частью приращения функции.*

Главная часть полного приращения функции $z = f(x;\, y)$, линейно зависящая от приращения независимых переменных Δx и Δy, называется *полным дифференциалом функции* $z = f(x;\, y)$ и обозначается dz.

Если функция имеет непрерывные частные производные, то *полный дифференциал* существует и равен $dz = A\Delta x + B\Delta y$.

Необходимое условие дифференцируемости функции: если функция $z = f(x;\, y)$ дифференцируема в точке $M(x;\, y)$, то она непрерывна в этой точке, имеет в ней частные производные, причем $\dfrac{\partial z}{\partial x} = A$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = B$.

Так как приращения независимых переменных Δx и Δy совпадают с их дифференциалами dx и dy, т. е. $dx = \Delta x, dy = \Delta y$, то дифференциал функции $z = f(x;\, y)$ вычисляется по формуле $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot dy$ или $dz = z'_x\, dx + z'_y\, dy$.

Приняты также обозначения $d_x z = z'_x\, dx$ и $d_y z = z'_y\, dy$ – *частные дифференциалы функции* $z = f(x;\, y)$.

Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Из определения дифференциала функции $z = f(x;\, y)$ следует, что при достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ имеет место приближенное равенство $\Delta z \approx dz$.

Так как полное приращение $\Delta z = f(x+\Delta x;\, y+\Delta y) - f(x;\, y)$, то получается формула приближенного вычисления значения функции:

$$f(x+\Delta x;\, y+\Delta y) \approx f(x;\, y) + f'_x(x;\, y)\Delta x + f'_y(x;\, y)\Delta y.$$

Пример 6 – Найти полный дифференциал функции $z = \cos\dfrac{x^2+y^2}{x^3+y^3}$.

Решение

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\left(\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\right)'_x = -\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\frac{2x\left(x^3+y^3\right)-3x^2\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^3+y^3\right)^2} =$$

$$= -\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\frac{-x^4-3x^2y^2+2xy^3}{\left(x^3+y^3\right)^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\left(\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\right)'_x = -\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\frac{2x\left(x^3+y^3\right)-3x^2\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^3+y^3\right)^2} =$$

$$= -\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\frac{-x^4-3x^2y^2+2xy^3}{\left(x^3+y^3\right)^2};$$

Запишем частные дифференциалы: $d_x z = \frac{x^4+3x^2y^2-2xy^3}{\left(x^3+y^3\right)^2}\cdot\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}dx;$ $d_y z = \frac{y^4+3x^2y^2-2x^3y}{\left(x^3+y^3\right)^2}\cdot\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}dy.$ Тогда полный дифференциал функции

$$dz = \frac{1}{\left(x^3+y^3\right)^2}\cdot\sin\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}\cdot\left[x\left(x^3+3xy^2-2y^3\right)dx + y\left(y^3+3x^2y-2x^3\right)dy\right].$$

Дифференциалы высших порядков. Вторым дифференциалом, или *дифференциалом второго порядка*, для функции z называется выражение вида $d^2z = d\left(dz\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$ Третьим дифференциалом, или *дифференциалом третьего порядка*, для функции z называется выражение $d^3z = d\left(d^2z\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$

Пример *7* – Найти дифференциал второго порядка d^2z для функции $z = \frac{xy}{x-y}.$

Решение

Найдем первый дифференциал: $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{-y^2}{\left(x-y\right)^2}dx + \frac{x^2}{\left(x-y\right)^2}dy.$

Находим вторые производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y^2}{(x-y)^2}\right)=\frac{2y^2}{(x-y)^3};\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{(x-y)^2}\right)=\frac{2x^2}{(x-y)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y^2}{(x-y)^2}\right)=\frac{-2xy}{(x-y)^3}.$$

Тогда $d^2z=d^2\left(\dfrac{xy}{x-y}\right)=\dfrac{2\left(y^2dx^2-2xy\,dx\,dy+x^2dy^2\right)}{(x-y)^3}.$

Пример 8 – Вычислить приближенно $1{,}07^{3,97}$.

Решение

Рассмотрим функцию $f(x;y)=x^y$, тогда данное число $1{,}07^{3,97}$ является частным значением этой функции при следующих значениях: $x=1{,}07$, $y=3{,}97$. Так как $1{,}07=1+0{,}07$; $3{,}97=4-0{,}03$, то принимаем $x_0=1, y_0=4$, тогда $\Delta x=0{,}07$; $\Delta y=-0{,}03$.

Найдем следующие значения:

$$f'_x(x;y)=yx^{y-1};\ f'_y(x;y)=x^y\ln x;\ f'_y(x;y)=x^y\ln x;\ f(1;4)=1^4=1;$$
$$f'_x(1;4)=4\cdot 1^{4-1}=4;\ f'_y(x;y)=1^4\ln 1=0.$$

Тогда $df(1;4)=4\cdot 0{,}07+0\cdot(-0{,}03)=0{,}28$, значит $1{,}07^{3,97}\approx 1+0{,}28=1{,}28$.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Плоскость P, которая касается графика дифференцируемой функции $z=f(x;y)$, т. е. поверхности, в единственной точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$, называется *касательной плоскостью*, а ее уравнение имеет вид $f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)=z-f(x_0,y_0)$.

Прямая L, проходящая через точку касания $M_0(x_0;y_0;z_0)$ и перпендикулярная касательной плоскости, называется *нормалью*, и ее уравнение имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_{0,},y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_{0,},y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Если функция задана неявно уравнением $F(x;y;z)=0$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ имеет вид:

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0.$$

Если функция задана неявно, т. е. уравнением $F(x; y; z) = 0$, то уравнение нормали в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_{0,})} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_{0,})} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_{0,})}.$$

Пример 9 – Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 - 16x + y^2 - 10y + 23$ в точке $M_0(1; 2)$.

Решение

Найдем $z_0 = f(x_0; y_0) = 1^2 - 16 + 2^2 - 10 \cdot 2 + 23 = -8$; $z'_x = 2x - 16$; $z'_y = 2y - 10$; $z'_x(M_0) = z'_x(x_0; y_0) = 2 \cdot 1 - 16 = -14$; $z'_y(M_0) = z'_y(x_0; y_0) = 2 \cdot 2 - 10 = -6$.

Запишем уравнение касательной плоскости в виде $z - (-8) = -14(x - 1) - 6(y - 2)$ и преобразуем его. Получим $14x + 6y + z - 18 = 0 -$ уравнение касательной плоскости.

Запишем уравнение нормали: $\frac{x-1}{-14} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z+8}{-1}$ или $\frac{x-1}{14} = \frac{y-2}{6} = \frac{z+8}{1}$.

Экстремум функции двух переменных. Пусть функция $z = f(x; y)$ определена в некоторой области D и точка $M_0(x_0; y_0) \in D$. Точка $M_0(x_0; y_0)$ называется точкой *локального максимума* (*минимума*) функции $z = f(x; y)$, если существует такая δ-окрестность точки $(x_0; y_0)$, что для каждой точки $M(x; y)$ из этой окрестности, отличной от точки $M_0(x_0; y_0)$, выполняется неравенство $f(x; y) < f(x_0; y_0)$ $\left(f(x; y) > f(x_0; y_0)\right)$.

Значение функции в точке максимума (минимума) называется *максимумом* (*минимумом*) функции. Максимум и минимум функции называются *экстремумами* функции.

Необходимые условия существования экстремума. Если функция $z = f(x; y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю либо не существуют:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = 0.$$

Точки, в которых частные производные первого порядка функции $z = f(x; y)$ равны нулю, называются *стационарными* (*критическими*) *точками* функции.

Достаточные условия существования экстремума. Пусть функция $z = f(x; y)$ в некоторой области, содержащей точку $M_0(x_0; y_0)$, имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно и частные производные в этой точке равны нулю.

Введем следующие обозначения:

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0}; \; B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0}; \; C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0}; \; \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Тогда:

а) если $\Delta > 0$, то функция $z = f(x; y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ максимум, если $A < 0$;

б) если $\Delta > 0$, то функция $z = f(x; y)$ имеет в точке $M_0(x_0; y_0)$ минимум, если $A > 0$;

в) если $\Delta < 0$, то функция в точке $M_0(x_0; y_0)$ экстремума не имеет;

г) если $\Delta = 0$, то экстремум в точке $M_0(x_0; y_0)$ может быть, а может и не быть; необходимы дополнительные исследования.

Схема исследования функции на экстремум:

а) найти область определения функции;

б) определить критические точки функции, для этого найти частные производные, приравнять их к нулю и решить полученную систему;

в) найти частные производные второго порядка и вычислить их значения в критических точках;

г) выяснить знак выражения $AC - B^2$ и сделать вывод на основании достаточных условий;

д) вычислить значения функции в точках экстремума.

Пример 10 – Найти локальные экстремумы функции $z = x^2 + y^2 - xy + 9x - 6y + 22$.

Решение

Область определения функции $D(z)$ – вся плоскость xOy. Найдем частные производные: $z'_x = 2x - y + 9$, $z'_y = 2y - x - 6$.

Критические точки находим как решение системы $\begin{cases} 2x - y + 9 = 0; \\ 2y - x - 6 = 0. \end{cases}$ Система имеет единственное решение: $x = -4$, $y = 1$, одна критическая точка $M_0(-4; 1)$.

Находим вторые производные: $z''_{xx} = 2$, $z''_{yy} = 2$, $z''_{xy} = z''_{yx} = -1$. Вторые производные являются постоянными во всей области определения, а значит, и в критической точке. В соответствии с введенными ранее обозначениями имеем $A = z''_{xx}(-4;1) = 2$; $B = z''_{yy}(-4;1) = 2$; $C = z''_{xy}(-4;1) = -1$.

Вычислим значение $\Delta = AB - C^2 = 3 > 0$. Значит, в точке $M_0(-4;1)$ экстремум есть, а т. к. $A = 2 > 0$ $(B = 2 > 0)$, то в точке $M_0(-4;1)$ данная функция имеет локальный минимум и $z_{\min} = z(-4;1) = 1$.

Формула Тейлора для функции двух переменных. Формула Тейлора второго порядка для функции $f(x,y)$ в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ имеет вид

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)\right) +$$

$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2\right) + \mathrm{o}(\rho^2),$$

где $\mathrm{o}(\rho^2)$ – остаточный член формулы Тейлора функции двух переменных в форме Пеано.

Пример 11 **–** Разложить функцию $f(x,y) = -x^3 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(-2;1)$.

Решение

Сначала найдем частные производные: $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + 2y - 6$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 6y - 2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 2$. Все остальные частные производные равны нулю, поэтому формула Тейлора имеет ограниченное число членов.

Найдем значение функции и ее частных производных в точке $M_0(-2;1)$. Получим $f(-2;1) = 1$; $\frac{\partial f}{\partial x}(-2;1) = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y}(-2;1) = 0$.

Вторые частные производные равны константам, поэтому получим следующее разложение данной функции по формуле Тейлора в окрестности указанной точки:

$$f(x;y) = f(-2;1) + \frac{1}{2!}\left(-2\cdot(x+2)^2 + 2\cdot 2\cdot(x+2)\cdot(y-1) + 6\cdot(y-1)^2\right) =$$

$$= 1 - (x+2)^2 + 2\cdot(x+2)\cdot(y-1) + 3\cdot(y-1)^2.$$

2 Интегральное исчисление функций многих переменных

Двойной интеграл. Пусть в ограниченной замкнутой области D плоскости xOy задана непрерывная ограниченная функция $z = f(x; y)$. Разобъем область D на n элементарных (частичных) областей D_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$, площади которых обозначим ΔS_i. Наибольшее расстояние между точками на границе в каждой частичной области обозначим d_i, а наибольший из диаметров всех областей – $\Delta = \max\limits_{i=1,n}\{d_i\}$. В каждой области произвольным образом выберем точку $M_i(x_{i;}\, y_i)$ и найдем значение функции $f(M_i)$. Умножим это значение функции на площадь ΔS_i и составим сумму таких произведений $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$. Эту сумму называют *интегральной* суммой.

Если существует конечный предел интегральной суммы, не зависящий от способа разбиения области D на частичные области D_i и от выбора точек разбиения $M_i(x_{i;}\, y_i)$ в них, то он называется *двойным интегралом* от функции $z = f(x; y)$ по области D и обозначается как $\iint\limits_D f(x; y)dS = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \Delta\to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i; y_i)dS_i$, где $dS -$ элемент площади области D.

Геометрический смысл двойного интеграла: двойной интеграл от *неотрицательной* функции $z = f(x; y)$ численно равен объему цилиндрического тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x; y)$, снизу – замкнутой областью D плоскости xOy, с боков – цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz, а направляющей служит граница области D, т. е. $\iint\limits_D f(x; y)dxdy = V$.

Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах:

а) пусть в плоскости xOy область D представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную сверху линией $y = \varphi_2(x)$, снизу – линией $y = \varphi_1(x)$, при этом функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны, а с боков – прямыми $x = a$ и $x = b$ (рисунок 1).

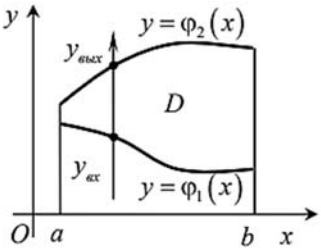

Рисунок 1 – Простая (правильная) область D в направлении оси Oy

Область D называется *простой или правильной* в направлении оси Oy, если любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает границу области не более, чем в двух точках (вход в область и выход).

В этом случае двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint_D f(x;y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy.$$

Правая часть формулы называется *двукратным или повторным интегралом* по области D от функции $f(x;y)$.

Интеграл $\int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x;y)\,dy$ называют *внутренним*, а интеграл $\int_a^b dx$ – *внешним*.

При вычислении двойного интеграла сначала берут внутренний интеграл по переменной y, считая x постоянной, а затем – внешний по переменной x;

б) пусть область D ограничена справа линией $y=\psi_2(x)$, слева – линией $y=\psi_1(x)$, при этом функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ непрерывны, снизу – прямой $y=c$ и сверху прямой $y=d$. Область D является простой в направлении оси Ox (рисунок 2).

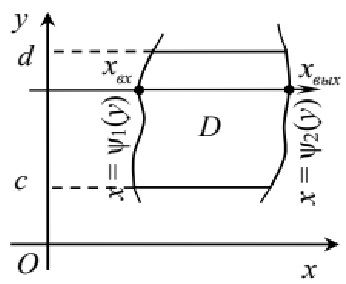

Рисунок 2 – Простая (правильная) область D в направлении оси Ox

При вычислении двойного интеграла в этом случае используется формула

$$\iint_D f(x;y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{y=\psi_1(x)}^{y=\psi_2(x)} f(x;y)\,dx.$$

Сначала берут внутренний интеграл по переменной x, считая y постоянной, а затем – внешний по переменной y.

Если область D *прямоугольная* (рисунок 3), то двойной интеграл вычисляется по формуле $\iint_D f(x;y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x;y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x;y)\,dx.$

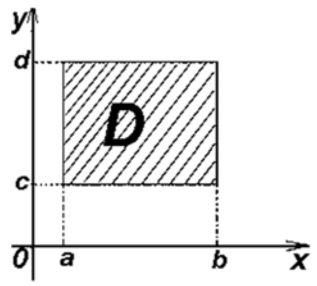

Рисунок 3 – Прямоугольная область

Пример 1 – Вычислить $\iint\limits_D \left(2x+y^3\right)dxdy$, где область D ограничена линиями $x=1,\ x=2,\ y=0,\ y=2.$

Решение

Область D прямоугольная, поэтому $\iint\limits_D \left(2x+y^3\right)dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^2 \left(2x+y^3\right)dy =$

$$= \int\limits_1^2 \left(2xy+\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=2} dx = \int\limits_1^2 (4x+4)\,dx = \left(2x^2+4x\right)\Big|_1^2 = (8+8)-(2+4)=10.$$

Изменим порядок интегрирования: $\iint\limits_D \left(2x+y^3\right)dxdy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_1^2 \left(2x+y^3\right)dx =$

$$= \int\limits_0^2 \left(2\frac{x^2}{2}+y^3x\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2} dy = \int\limits_0^2 \left(x^2+y^3x\right)\Big|_{x=1}^{x=2} dy = \int\limits_0^2 \left(4+2y^3-1-y^3\right)dy = \int\limits_0^2 \left(y^3+3\right)dy =$$

$$= \left(\frac{y^4}{4}+3y\right)\Bigg|_0^2 = 4+6=10.$$

Результат не зависит от порядка интегрирования.

Пример 2 – Вычислить $\iint\limits_D \left(x^2+yx+2y^2\right)dxdy$, если область D ограничена линиями $x=0,\ \ x=1,\ y=0,\ y=1-x.$

Решение

Относительно осей Ox и Oy область D является простой. В этом случае

$$\iint\limits_D \left(x^2+yx+2y^2\right)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{y=0}^{y=1-x} \left(x^2+yx+2y^2\right)dy =$$

$$=\int_0^1 \left(x^2 y + \frac{xy^2}{2} + \frac{2y^3}{3} \right)\Bigg|_{y=0}^{y=1-x} dx == \int_0^1 \left(x^2(1-x) + x \cdot \frac{(1-x)^2}{2} + 2 \cdot \frac{(1-x)^3}{3} \right) dx =$$

$$=\int_0^1 \left(x^2 - x^3 + \frac{x - 2x^2 + x^3}{2} + \frac{2 - 6x + 6x^2 - 2x^3}{3} \right) dx = \int_0^1 \left(-\frac{7}{6}x^3 + 2x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{2}{3} \right) dx =$$

$$=\left(-\frac{7x^4}{24} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{4} + \frac{2x}{3} \right)\Bigg|_0^1 = -\frac{7}{24} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{7}{24}.$$

3 Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения первого порядка. *Дифференциальное уравнение* – это уравнение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию y и ее производные различных порядков y', y'', y''' и т. д. Наибольший из порядков производных, входящих в уравнение, называется *порядком* дифференциального уравнения.

Уравнение $F(x; y; y') = 0$, связывающее между собой независимую переменную, искомую (неизвестную) функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$, $y'(x)$, называется *дифференциальным уравнением первого порядка*. Если дифференциальное уравнение можно записать в виде $y' = f(x; y)$, то говорят, что оно *разрешимо* относительно производной. Это уравнение иногда записывают в виде $dy = f(x; y)dx$ или в более общем виде $P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0$ (*дифференциальная форма*).

Решением или интегралом дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество. График функции $y = \varphi(x)$ в этом случае называется *интегральной кривой*. Процесс нахождения решений данного дифференциального уравнения называется *интегрированием* этого уравнения.

Задача отыскания решения дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется *задачей Коши*. Геометрически это означает следующее: требуется найти интегральную кривую дифференциального уравнения, проходящую через точку $M_0(x_0; y_0)$.

Общим решением дифференциального уравнения называется такая функция $y = \varphi(x; C)$, где $C -$ произвольная постоянная, что при любом конкретном значении C она является решением этого равнения и для любого допустимого начального условия $y(x_0) = y_0$ найдется такое значение постоянной $C = C_0$, что $\varphi(x_0; C_0) = y_0$.

В некоторых случаях общее решение дифференциального уравнения приходится записывать *в неявном виде*: $\Phi(x; y\, C) = 0$. Это выражение называется *общим интегралом* этого уравнения. Геометрически общее решение представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости xOy.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x; C_0)$, полученная из общего решения при конкретном значении постоянной $C = C_0$. *Частным интегралом* уравнения называется равенство $\Phi(x; y\, C_0) = 0$, полученное из общего интеграла при фиксированном значении C.

Простейшими дифференциальными уравнениями первого порядка являются уравнения, которые не содержат неизвестной функции y. Такие ДУ либо уже разрешены относительно производной $y' = f(x)$, либо их можно разрешить относительно производной $f(x) \cdot y' = g(x)$.

Общее решение дифференциальных уравнений вида $y' = f(x)$ на заданном интервале X можно отыскать, проинтегрировав обе части этого равенства. Получим $\int y' dx = \int f(x) dx$. Общее решение $y = F(x) + C$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$ на промежутке X, а C – произвольная постоянная.

Если интервал X не указан, то решение надо искать для всех x, при которых и искомая функция y, и исходное уравнение имеют смысл.

Если требуется найти частное решение дифференциального уравнения $y' = f(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, то после нахождения общего интеграла $y = F(x) + C$ нужно еще вычислить значение постоянной $C = C_0$, используя начальное условие. Таким образом, $C = C_0$ определяется из уравнения $y_0 = F(x_0) + C$ и искомое частное решение дифференциального уравнения будет иметь вид $y = F(x) + C_0$.

Пример 1 – Найти общее решение уравнения $y' = x \cdot e^{2x+3}$ и его частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y\left(-\frac{3}{2}\right) = 1$.

Решение

Проинтегрируем исходное уравнение: $y = \int x \cdot e^{2x+3} dx$. Применим метод интегрирования по частям: $\int x \cdot e^{2x+3} dx = \begin{bmatrix} u = x, dv = e^{2x+3}dx, \\ du = dx, v = \frac{1}{2}e^{2x+3} \end{bmatrix} = \frac{x}{2} \cdot e^{2x+3} - \frac{1}{2}\int e^{2x+3} dx =$

$$=\frac{x}{2}\cdot e^{2x+3}-\frac{1}{4}e^{2x+3}+C=\frac{e^{2x+3}}{2}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)+C.$$

Общее решение дифференциального уравнения $y=\frac{e^{2x+3}}{2}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)+C$.

Определим частное решение. Найдем значение C, при котором будет выполняться условие $y\left(-\frac{3}{2}\right)=\left.\left(\frac{e^{2x+3}}{2}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)+C\right)\right|_{x=-\frac{3}{2}}=1$.

Получим $\frac{e^{2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+3}}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)+C=1$, $-1+C=1$, $C=2$.

Частным решением дифференциального уравнения, удовлетворяющим заданному начальному условию, является $y=\frac{e^{2x+3}}{2}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)+2$.

Дифференциальные уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения вида $y'=f(x)g(y)$, где $f(x)$ и $g(x)$ – заданные функции, называются *уравнениями с разделяющимися переменными*.

Пример 2 – Решить уравнение $xy'+y=0$.

Решение

Разрешим данное уравнение относительно y', получим $y'=-\frac{y}{x}$; запишем уравнение в виде $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$; разделим переменные $\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$. Интегрируя, получим $\ln|y|=\ln|x|+C_1$, где C_1 – произвольная постоянная. Положим $C_1=\ln C_2$ $(C_2>0)$. Тогда решение запишется в виде $\ln|y|=-\ln|x|+\ln C_2$, откуда $|y|=\frac{C_2}{|x|}$ или $y=\pm\frac{C_2}{x}$. Полагая $\pm C_2=C$, получим $y=\frac{C}{x}$, где C – произвольная постоянная.

Геометрически полученное общее решение представляет собой семейство равносторонних гипербол.

Пусть требуется из найденного общего решения выделить частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=4}=\frac{1}{2}$. Заменяя в полученном общем решении x и y начальными данными, получим $\frac{1}{2}=\frac{C}{4}$, $C=2$. Искомое частное решение имеет вид $y=\frac{2}{x}$.

Дифференциальное уравнение называется *линейным*, если в нём функция и все её производные содержатся только в первой степени, отсутствуют и их произведения. Общий *вид линейного дифференциального уравнения первого порядка* $y' + a_1(x)y = f(x)$, где $a_1(x)$ и $f(x)$ – непрерывные функции от x.

Алгоритм решения. Искомую функцию, т. е. решение уравнения, представим в виде произведения двух неизвестных функций $u(x)$ и $v(x)$ (u и v). Пусть $y = uv$, тогда по правилу дифференцирования произведения функций $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + \frac{dv}{dx}u$. Линейное дифференциальное уравнения первого порядка примет вид $\frac{du}{dx}v + \frac{dv}{dx}u + a_1(x)uv = f(x)$ или $v\frac{du}{dx} + u\left(\frac{dv}{dx} + a_1(x)v\right) = f(x)$.

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы в этом уравнении выражение в скобках обратилось в нуль, т. е. $\frac{dv}{dx} + a_1(x)v = 0$. Таким образом, в качестве функции v берётся одно из частных решений этого уравнения с разделяющимися переменными, отличное от нуля. Разделяя переменные в уравнении $\frac{dv}{dx} + a_1(x)v = 0$ и выполняя затем почленное интегрирование, находим функцию v.

Так как функция v – решение уравнения, то её подстановка в уравнение $v\frac{du}{dx} + u\left(\frac{dv}{dx} + a_1(x)v\right) = f(x)$ даёт $v\frac{du}{dx} = f(x)$. Таким образом, для нахождения функции u получили дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Определив функцию u как общее решение этого уравнения, находим решение исходного линейного дифференциального уравнения первого порядка. Оно равно произведению функций u и v, т. е. $y = uv$.

Пример 3 – Решить линейное дифференциальное уравнение первого порядка $y' - \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}$.

Решение

Так как $y = uv$, то, подставляя выражения $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + \frac{dv}{dx}u$ в данное уравнение $y' - \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}$, получим уравнение вида $v\frac{du}{dx} + u\left(\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v\right) = \frac{x+1}{x}$.

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы выполнялось равенство $\frac{dv}{dx}-\frac{1}{x}v=0$ или $\frac{dv}{dx}=\frac{v}{x}$. После разделения переменных это уравнение принимает вид $\frac{dv}{v}=\frac{dx}{x}$, и после почленного интегрирования получим $\ln|v|=\ln|x|$ и $v=x$.

Подставив найденное значение функции v в равенство $v\frac{du}{dx}=f(x)$, получим $x\frac{du}{dx}=\frac{x+1}{x}$. Это уравнение с разделяющимися переменными для нахождения функции u. Разделяем переменные $du=\frac{x+1}{x^2}dx$, интегрируем почленно и находим $u=\int\frac{x+1}{x^2}dx=\int\frac{x}{x^2}dx+\int\frac{1}{x^2}dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{1}{x^2}dx=\ln|x|-\frac{1}{x}+C$.

Общее решение данного линейного дифференциального уравнения первого порядка и имеет вид $y=\left(\ln x-\frac{1}{x}+C\right)x=x\ln x-1+Cx$.

Дифференциальное уравнение первого порядка вида $P(x;y)dx+Q(x;y)dy=0$ называется *уравнением в полных дифференциалах*, если $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ – непрерывные функции вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в некоторой области G, а левая часть уравнения является полным дифференциалом некоторой функции $U(x;y)$ (тождественно выполняется равенство $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$). т. е. $dU(x;y)=P(x;y)dx+Q(x;y)dy$.

Это уравнение может быть записано в виде $dU(x;y)=0$. Функция $U(x;y)$ находится следующим образом: $U(x;y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(t;y_0)dt+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x;t)dt$.

Общий интеграл имеет вид: $\int\limits_{x_0}^{x}P(t;y_0)dt+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x;t)dt=C$, где $(x_0;y_0)$ – произвольная фиксированная точка области G.

Пример 4 – Проинтегрировать уравнение $\frac{dy}{dx}=\frac{1-2xy}{3y^2+x^2}$.

Решение

Запишем данное уравнение в виде $\left(3y^2+x^2\right)dy=(1-2xy)dx$ или, преобразовав, в виде $(2xy-1)dx+\left(3y^2+x^2\right)dy=0$. Очевидно, что $P(x;y)=2xy-1$, а $Q(x;y)=3y^2+x^2$.

Проверим выполнение условия $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Получим $\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x$. Условие выполняется, значит, данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Находим общий интеграл, полагая для упрощения вычислений $x_0=y_0=0$; тогда $\int\limits_0^x(2t\cdot 0-1\,)dt+\int\limits_0^y\left(3t^2+x^2\right)dt=C$. Интегрируя, находим общий интеграл данного уравнения: $-t\,\Big|_0^x+\left(t^3+x^2t\right)\Big|_0^y=C$ или $-x+y^3+x^2y=C$.

Дифференциальные уравнения второго порядка. Дифференциальное уравнение второго порядка в общем случае записывается в виде $F(x;y;y';y'')=0$ или, если это возможно, в виде, разрешенном относительно второй производной $y''=f(x;y;y')$.

Рассмотрим простейшие уравнения*,* допускающие понижение порядка.

1 Уравнения вида $y''=f(x)$. Для их решения введем новую переменную $v(x)$, положив $y'=v(x)$, тогда $y''=v'(x)$. Получаем уравнение первого порядка $v'(x)=f(x)$. Его решение $v(x)=\int f(x)dx=F(x)+C_1$, где C_1 – одна из первообразных $f(x)$. Так как $y'=v(x)$, то $y'=F(x)+C_1$, значит, $y=\int F(x)dx+C_1x+C_2$ – общее решение уравнения $y''=f(x)$.

2 Уравнение $y''=f(x;y')$. Такое уравнение не содержит явно искомой функции y; вводим новую функцию $v(x)=y'$, тогда $v'(x)=y''$; получаем уравнение первого порядка относительно функции $v(x)$: $v(x)=f(x;v)$. Общее решение этого уравнения имеет вид $v=\varphi(x;C_1)$, а заменяя функцию v на функцию y', получаем уравнение $y'=\varphi(x;C_1)$. Общее решение уравнения $y''=f(x;y')$ будет иметь вид $y=\int\varphi(x;C_1)dx+C_2$.

Пример 5 – Найти общее решение уравнения $\left(1+x^2\right)y''-2xy'=0$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=1}=0$, $y'\big|_{x=1}=1$.

Решение

Пусть $y'=v(x)$, тогда $y''=v'(x)$ и $\left(1+x^2\right)v'-2xv=0$ – дифференциальное уравнение первого порядка. $\frac{dv}{v}=\frac{2x\,dx}{1+x^2}$, $\frac{dv}{v}=\frac{2x\,dx}{1+x^2}$, $\ln|v|=\ln\left(1+x^2\right)+\ln C_0$, $v=\pm C_0\left(1+x^2\right)=C_1\left(1+x^2\right)$. Так как $v=y'$, $y'=C_1\left(1+x^2\right)$, то общее решение уравнения имеет вид $y=C_1\left(x+\frac{x^3}{3}\right)+C_2$.

Если $y\,\big|_{x=1}=0$, то $0=C_1\left(1+\frac{1}{3}\right)+C_2$; если $y'\big|_{x=1}=1$, то $1=C_1\left(1+1\right)=2C_1$. $C_1=\frac{1}{2}$. Тогда $C_2=-\frac{2}{3}$. Искомое частное решение имеет вид $y=\frac{x^3}{6}+\frac{x}{2}-\frac{2}{3}$.

3 Уравнение $y''=f\left(y;y'\right)$. Оно не содержит явно независимую переменную x. Для понижения порядка введем функцию $v\left(y\right)=y'$, тогда $y''=\frac{d\left(y'\right)}{dx}=\frac{dv\left(y\right)}{dx}=\frac{dv\left(y\right)}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$. Так как $\frac{dy}{dx}=v\left(y\right)$, то $y''=\frac{dv}{dy}\cdot v$ и данное уравнение преобразуется в уравнение первого порядка относительно функции $v\left(y\right)$: $\frac{dv}{dy}\cdot v=f\left(y;v\right)$, а его общее решение имеет вид $v\left(y\right)=\varphi\left(x;C_1\right)$.

Так как $v\left(y\right)=\frac{dy}{dx}$, то получим уравнение с разделяющимися переменными $\frac{dy}{dx}=\varphi\left(y;C_1\right)$, тогда общий интеграл первоначального уравнения имеет вид $\int\frac{dy}{\phi\left(y;C_1\right)}=x+C_2$.

Пример 6 – Найти общее решение уравнения $1+y'^2=2yy''$.

Решение

Пусть $y'=v\left(y\right)$; $y''=\frac{dv}{dy}v$, тогда $1+v^2=2yv\frac{dv}{dy}$. Разделим переменные: $\frac{2v\,dv}{1+v^2}=\frac{dy}{y}$, тогда $\ln\left(1+v^2\right)=\ln|y|+\ln C_0$; значит, $1+v^2=\pm C_0y=C_1y$ и $v=\pm\sqrt{C_1y-1}$. Так как $v=\frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{C_1y-1}$ и $dx=\frac{dy}{\pm\sqrt{C_1y-1}}$. Тогда общий интеграл $x+C_2=\pm\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1y-1}$. Отсюда находим общее решение $y=\frac{C_1^2\left(x+C_2\right)^2+4}{4C_1}$.

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Дифференциальное уравнение вида $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$ называется *линейным* дифференциальным уравнением второго порядка. Коэффициенты уравнения $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ и свободный член $b(x)$ – заданные функции аргумента x. Если $b(x)=0$, то $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ – *однородное* линейное дифференциальное уравнение; если $b(x)\neq 0$, то $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$ – *неоднородное* линейное уравнение.

Однородные линейные дифференциальные уравнения. *Теорема*. Если функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ являются решениями линейного однородного дифференциального уравнения, то функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, являющаяся линейной комбинацией функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, также является решением этого уравнения при любых значениях постоянных C_1 и C_2.

Два частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка образуют *фундаментальную систему решений* на некотором интервале (α, β), если ни в одной точке этого интервала определитель $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$ не обращается в нуль.

Определитель $W(x)$ называется *определителем Вронского* (*вронскианом*).

Теорема о структуре общего решения. Если два частных решения $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка образуют на некотором интервале (α, β) фундаментальную систему, то общее решение этого уравнения имеет вид $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.

При этом предполагается, что коэффициенты $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ непрерывны и $a_0(x) \neq 0$ на интервале (α, β).

***Пример** 7* – Найти общее решение уравнения $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ и выделить из него частное решение, удовлетворяющее следующим условиям: $y\big|_{x=1} = 0$, $y'\big|_{x=1} = 1$.

Решение

Данное уравнение является однородным линейным, а его частными решениями являются функции $y_1 = x$ и $y_2 = x^2$. Они образуют фундаментальную систему решений на любом интервале, не содержащем точку $x = 0$, т. к. $W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2$. Поэтому на основании теоремы о структуре общего решения имеем $y = C_1x + C_2x^2$.

Найдем $y' = C_1 + 2C_2x$, тогда при $y'\big|_{x=1} = 1$ получим $1 = C_1 + 2\,C_2$, а при $y\big|_{x=1} = 0$ получим $0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 = C_1 + C_2$. Тогда из системы $\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ 1 = C_1 + 2\,C_2 \end{cases}$ находим, что $C_1 = -1, C_2 = 1$. Искомое частное решение имеет вид $y = x^2 - x$.

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Разделим все члены уравнения $a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$ с постоянными коэффициентами a_0, a_1, a_2 на a_0 при условии, что $a_0 \neq 0$. Обозначив $\dfrac{a_1}{a_0} = p,\ \dfrac{a_2}{a_0} = q,$ получим уравнение $y'' + py' + qy = 0.$ Его частное решение запишем в виде $y = e^{kx}$, тогда $e^{kx}k^2 + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$ или $k^2 + pk + q = 0 -$ характеристическое уравнение. Оно позволяет находить коэффициент k.

Если корни характеристического уравнения действительны и различны, $k_1 \neq k_2$, то $y_1 = e^{k_1x}$, $y_2 = e^{k_2x}$. Общее решение имеет вид $Y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$.

Если корни характеристического уравнения равны, тогда общее решение имеет вид $Y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x}$ или $Y = e^{k_1x}\left(C_1 + C_2x\right)$.

Если корни характеристического уравнения комплексные, $k_1 = \alpha + \beta i, k_2 = \alpha - \beta i,$ то общее решение уравнения имеет вид $Y = C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$ или $Y = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)$.

Пример 8 **–** Найти общее решение дифференциального уравнения:

1) $y'' + 5y' + 6y = 0$;

2) $y'' - 2y' + y = 0$;

3) $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Решение

1 Характеристическое уравнение $k^2 + 5k + 6 = 0;$ его корни $k_1 = -2, k_2 = -3.$ Фундаментальная система частных решений $y_1 = e^{-2x}, y_2 = e^{-3x}.$ Общее решение $Y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}.$

2 Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0;$ его корни $k_1 = k_2 = 1.$ Фундаментальная система частных решений $y_1 = e^{x}, y_2 = xe^{x}.$ Общее решение $Y = e^{x}\left(C_1 + C_2x\right).$

3 Характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 13 = 0;$ его корни $k_1 = -2 + 3i,$ $k_2 = -2 - 3i;$ $\alpha = -2, \beta = 3.$ Фундаментальная система частных решений $y_1 = e^{-2x}\cos 3x, y_2 = e^{-2x}\sin 3x.$ Общее решение уравнения имеет вид $Y = e^{-2x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right).$

4 Числовые ряды

Выражение вида $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots. = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \left(a_n \in R \right)$ называется *числовым рядом*. Числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ – члены ряда, а число a_n называется n-м или общим членом ряда. Суммы $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, …, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n, \ldots$ называются *частичными суммами* ряда, а S_n называется n-й частичной суммой ряда. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = a_{n+1} + a_{n+2} + + a_{n+3} + \ldots = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ называется n-м остатком ряда.

Ряд называется *сходящимся*, если последовательность его частичных сумм сходится, т. е. если существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Этот предел называется *суммой ряда* и записывается $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Разность $r_n = S - S_n$ называется *остатком ряда*. Если последовательность частичных сумм ряда расходится, то он называется *расходящимся*, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или бесконечен.

Теорема 1. Сходимость или расходимость ряда не нарушится, если изменить, добавить или отбросить конечное число членов ряда (сумма ряда при этом не изменится).

Теорема 2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и имеет сумму S, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Ca_n$, полученный из предыдущего умножением всех членов на одно и то же число С, также сходится и имеет сумму CS, т. е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C a_n = CS$.

Теорема 3. Сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать, т. е. если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n = S$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} V_n = T$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(U_n \pm V_n\right)$ сходится и имеет сумму $S \pm T$.

Необходимый признак сходимости. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ сходится, то его общий член U_n стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$.

Отсюда следует, что если $\lim\limits_{n\to\infty} U_n \neq 0$, то ряд расходится.

Если все члены ряда $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ больше 0, то такой ряд называется *знакоположительным*. Для такого ряда частичная сумма S_n возрастает с возрастанием n. Положительный ряд либо сходится, либо его сумма бесконечна, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Достаточные признаки сходимости.

Признак сравнения. Пусть имеются два ряда с положительными членами

$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots.=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ (1) и $b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots.=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ (2). Пусть, начиная с некоторого номера n_0, члены ряда (1) меньше соответствующих членов ряда (2), т. е. $0\le a_n<b_n$ $(\forall n>n_0)$. Тогда:

1) если ряд (2) сходится, то ряд (1) тоже сходится. В этом случае ряд (2) называется *мажорантой ряда* (1). Таким образом, положительный ряд *сходится*, если он обладает сходящейся мажорантой*;*

2) если ряд (1) расходится, то ряд (2) тоже расходится.

Предельный признак сравнения. Если для рядов (1) и (2) выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=A\,(A=\text{Const},\,A>0)$, то два ряда сходятся или расходятся одновременно.

Признак Даламбера. Если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ положительны и существует $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=k$, то при $k<1$ ряд сходится; при $k>1$ ряд расходится; при $k=1$ вопрос о сходимости ряда не решен (требуется дополнительное исследование с использованием других достаточных признаков сходимости).

Признак Коши. Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ с положительными членами существует $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=k$, то при $k<1$ ряд сходится; при $k>1$ ряд расходится; при $k=1$ вопрос о сходимости ряда не решен (требуется дополнительное исследование с использованием других достаточных признаков сходимости).

Интегральный признак Коши. Если члены ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ таковы, что $a_n=f(n)$, а функция $f(x)$ – непрерывная положительная монотонно убывающая на $[1;+\infty)$, то ряд сходится (расходится) тогда, и только тогда, когда сходится (расходится) несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty}f(x)\,dx$.

«Эталонными» рядами для сравнения являются следующие ряды:

1) *геометрический ряд* $a+aq+aq^2+aq^3+\ldots+aq^{n-1}+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}aq^n$ сходится, если $q<1$ и $S=\dfrac{a}{1-q}$; если $q\ge 1$, то геометрический ряд расходится;

2) *гармонический ряд* $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ расходится;

3) *обобщенный гармонический ряд* (*ряд Дирихле*) $1+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\ldots+\dfrac{1}{n^p}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$.

Пример 1 – Установить сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\left(n+1\right)}$ и найти его сумму.

Решение

Так как члены ряда положительные, то $S_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n\cdot\left(n+1\right)} =$ $= \left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n+1}$. Данный ряд сходится, т. к. $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1,$ и его сумма $S = 1.$

Пример 2 – Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+5}{n+7}$.

Решение

Все члены ряда положительны; применим необходимый признак сходимости. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+5}{n+7} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\left(n+\dfrac{5}{n}\right)}{n\left(1+\dfrac{7}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+\dfrac{5}{n}}{1+\dfrac{7}{n}} = \infty.$ Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не стремится к нулю, то данный ряд расходится.

Пример 3 – Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}.$

Решение

Обозначим $a_n = \dfrac{n}{2^n}$, $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{2^{n+1}}$ и найдем $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(n+1\right)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}.$ По признаку Даламбера, данный ряд сходится.

Пример 4 – Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{7n+5}{2n+3}\right)^n$.

Решение

Данный ряд является рядом с положительными членами. Применим признак Коши. Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{7n+5}{2n+3}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n+5}{2n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(7+\dfrac{5}{n}\right)}{n\left(2+\dfrac{3}{n}\right)}=\dfrac{7}{2}.$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}>1,$ то данный ряд расходится.

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ называется *знакопеременным*, если он содержит бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$, составленный из абсолютных величин членов ряда, сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ называется *абсолютно сходящимся*. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ называется *условно сходящимся.*

Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *следует* сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, но из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ *не следует* расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

Ряды, в которых за каждым положительным членом следует отрицательный и за каждым отрицательным – положительный, называются *знакочередующимися*. Они имеют вид $a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n+1}a_n+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$.

Признак Лейбница **(***достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда***)**. Если в знакочередующемся ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ абсолютные величины членов ряда убывают, т. е. $a_1>a_2>a_3>\ldots>a_n>\ldots$ и общий член стремится к нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,$ то ряд сходится. Его сумма $0<S\le a_1$.

Пример 5 **–** Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Решение

Рассмотрим члены ряда по абсолютной величине и сравним их. Получим $\left(1+\dfrac{1}{1}\right)^1>\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^2>\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^3>\ldots>\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n>\ldots$ – убывающая последовательность.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e\neq 0,$ то по признаку Лейбница ряд расходится.

Пример 6 – Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

Решение

По признаку Лейбница $\frac{1}{1}>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots>\frac{1}{n}>\ldots$, эта последовательность убывающая; $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot}=0$. Данный ряд сходится. Ряд из абсолютных величин членов, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, расходится. Следовательно, данный ряд сходится условно.

Пример 7 – Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

Решение

По признаку Лейбница $\frac{1}{1}>\frac{1}{2^2}>\frac{1}{3^2}>\ldots>\frac{1}{n^2}>\ldots$, эта последовательность убывающая; $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$. Данный ряд сходится. Ряд из абсолютных величин членов, т. е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится как обобщенный гармонический ряд (при $p=2$). Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

5 Функциональные ряды. Степенные ряды

Выражение вида $u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ называется *функциональным рядом*. Если у членов функционального ряда зафиксировать значение аргумента $x=x_0$, то полученный ряд будет являться числовым рядом $u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$.

Функциональный ряд называется *сходящимся в точке* $x=x_0$, если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$. Множество значений x, при которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится, называется *областью сходимости функционального ряда*.

Если значение x_0 принадлежит области сходимости функционального ряда, то $u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots=S(x_0)$ – *сумма* ряда в точке $x=x_0$.

Если $S(x)$ – сумма ряда, а $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)$ – n-я частичная сумма, то $r_n(x)=S(x)-S_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots$ его n-й *остаток*. В области сходимости ряда $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)=S(x)$, а $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$.

Функциональный ряд $\sum f(x)$ называется *равномерно сходящимся* к $f(x)$ на некотором множестве H, принадлежащем области сходимости D функционального ряда, если $\forall\varepsilon>0$ $\exists N\in\mathrm{N}$ такой, что $|S_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ для $\forall n>N$, $\forall x\in H$.

Функциональный ряд называется *мажорируемым в области* D, если существует сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\ (\alpha_n>0)$ такой, что $\forall x\in D$ справедливы неравенства $|u_k(x)|\le\alpha_k\ (k=1,2,\ldots)$. Таким образом, ряд называется *мажорируемым в области* D, если каждый его член по абсолютной величине не больше соответствующего члена некоторого сходящегося числового ряда с положительными членами.

Равномерно сходящиеся ряды, для которых можно найти мажорирующийся сходящийся ряд, часто называют *правильно сходящимися.*

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов: функциональный ряд, мажорируемый в некоторой области, равномерно сходится во всех точках этой области.

Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

1 Всякий функциональный ряд, правильно сходящийся на сегменте $[a,b]$, сходится абсолютно в любой точке этого сегмента.

2 Если члены правильно сходящегося на сегменте $[a,b]$ функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ непрерывны, то сумма также непрерывна на сегменте $[a,b]$.

3 Если члены правильно сходящегося на сегменте $[a,b]$ функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ непрерывны на этом сегменте, то ряд почленно интегрируем.

4 Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ сходится на сегменте $[a,b]$ и его члены имеют непрерывные производные $u_n'(x)\ (n=1,2,\ldots)$. Тогда если ряд, полученный после почленного дифференцирования, является правильно сходящимся на $[a,b]$, то его сумма равна производной от суммы данного ряда.

Пример 1 – Найти область сходимости функционального ряда $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}+\ldots+\frac{1}{x^{2n}}+\ldots$.

Решение

Члены ряда образуют геометрическую прогрессию $q=\frac{1}{x^2}$, которая сходится при $|q|<1$ и расходится при $|q|\geq 1$. Поэтому данный ряд сходится для тех значений x, для которых $\frac{1}{x^2}<1$, или $x^2>1$. Таким образом, данный ряд сходится для всех точек x, для которых $|x|>1$. Область сходимости данного ряда состоит из двух бесконечных интервалов $-\infty<x<-1$ и $1<x<+\infty$.

Пример 2 – Проверить, является ли равномерно сходящимся функциональный ряд $\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\ldots+\frac{\cos nx}{n^2}+\ldots$

Решение

Сравним данный ряд со сходящимся рядом $\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$. Для всех значений x выполняется неравенство $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2}$ $(n=1,2,\ldots)$, поэтому данный функциональный ряд – мажорируемый на всей оси Ox, по признаку Вейерштрасса он является равномерно сходящимся на всей оси Ox.

Степенным рядом по степеням $x-x_0$ называется функциональный ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\,(x-x_0)^n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ – постоянные числа, называемые *коэффициентами ряда*, x_0 – фиксированное число. Если $x_0=0$, то получается ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n$.

Теорема Абеля. Если степенной ряд сходится при некотором значении $x=x_1\neq 0$, то он сходится, и притом абсолютно, при всех значениях x, для которых $|x|<|x_1|$.

Если степенной ряд расходится при некотором значении $x=x_2$, то он расходится при всех значениях x, для которых $|x|<|x_2|$.

Интервалом сходимости степенного ряда называется промежуток $(-R,R)$ такой, что для всякой точки x, которая лежит внутри этого интервала, ряд сходится (абсолютно), а для точек x, лежащих вне его, ряд расходится. Число R

называется *радиусом сходимости*. При всех $|x| < R$ степенной ряд сходится, а при всех $|x| > R$ расходится. Радиус сходимости степенного ряда можно определить через его коэффициенты: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ или $R = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Исследовать степенной ряд на сходимость означает найти его интервал сходимости и установить сходимость или расходимость ряда в граничных точках интервала, т. е. при $x = R$ и $x = -R$.

Свойства степенных рядов.

1 Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(x - x_0)^n$ имеет интервал сходимости $(-R, R)$, тогда ряды, полученные из данного ряда его почленным дифференцированием и интегрированием, имеют тот же интервал сходимости, что и данный ряд.

2 Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(x - x_0)^n$ имеет интервал сходимости $(-R, R)$, а r – произвольное положительное число, меньшее, чем $R\,(0 < r < R)$, тогда степенной ряд является правильно сходящимся на сегменте $[-R, R]$.

3 Сумма степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(x - x_0)^n$ является непрерывной функцией в каждой точке его интервала сходимости $(-R, R)$.

4 Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(x - x_0)^n$ можно почленно дифференцировать в любой точке его интервала сходимости.

5 Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(x - x_0)^n$ можно почленно интегрировать в интервале сходимости $(-R, R)$.

Пример 3 – Найти область сходимости ряда $1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$.

Решение

Рассмотрим ряд $1 + \dfrac{|x|}{1!} + \dfrac{|x|^2}{2!} + \ldots + \dfrac{|x|^n}{n!} + \ldots$, члены которого равны абсолютным величинам членов данного ряда. Применим признак Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} : \dfrac{|x|^n}{n!}\right) = |x|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!} = |x|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1} = 0$. Так как

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=0<1,$ то ряд $1+\dfrac{|x|}{1!}+\dfrac{|x|^2}{2!}+\ldots+\dfrac{|x|^n}{n!}+\ldots$ и данный ряд сходятся на всей числовой оси. Значит, радиус сходимости $R=\infty$.

Пример 4 – Найти область сходимости ряда $1+\dfrac{5x}{2^2}+\dfrac{5^2x^2}{3^2}+\ldots+\dfrac{5^nx^n}{(n+1)^2}$.

Решение

Коэффициенты ряда положительны, причем $c_n=\dfrac{5^n}{(n+1)^2}$, $c_{n+1}=\dfrac{5^{n+1}}{(n+2)^2}$.

Найдем отношение $\dfrac{c_n}{c_{n+1}}=\dfrac{5^n}{(n+1)^2}:\dfrac{5^{n+1}}{(n+2)^2}=\dfrac{(n+2)^2}{5(n+1)^2}$. Предел этого отношения, т. е. радиус сходимости степенного ряда, равен $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^2}{5(n+1)^2}=\dfrac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2}=\dfrac{1}{5}$. Исследуем сходимость ряда на концах интервала $\left(-\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{5}\right)$. Подставим значения $x=-\dfrac{1}{5}$ и $x=\dfrac{1}{5}$ в данный ряд. Получим

$$1+\frac{5}{2^2\cdot 5}+\frac{5^2}{3^2\cdot 5^2}+\ldots+\frac{5^n}{(n+1)^2\cdot 5^n}+\ldots=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots\ ;$$

$$1-\frac{5}{2^2\cdot 5}+\frac{5^2}{3^2\cdot 5^2}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{5^n}{(n+1)^2\cdot 5^n}+\ldots=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots\ .$$

Первый из этих рядов сходится. В силу теоремы об абсолютной сходимости сходится и второй ряд, а область его сходимости – отрезок $\left[-\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{5}\right]$.

Пример 5 **–** Найти радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{n^3}$.

Решение

Так как $a_n=\dfrac{1}{n^3}$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)^3}$, то $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3}{n^3}=1.$

Пример 6 – Найти область сходимости ряда $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots$.

Решение

Для данного ряда $c_n=\frac{1}{2^n}$, $c_{n+1}=\frac{1}{2^{n+1}}$, тогда радиус сходимости ряда равен $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}:\frac{1}{2^{n+1}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}2=2$. Исследуем сходимость ряда при значениях $x=\pm2$. Подставив их в данный ряд, соответственно получим $1+1+1+\ldots+1+\ldots$, $1-1+1-\ldots+(-1)^n+\ldots$. Оба ряда расходятся, т. к. не выполняется необходимое условие сходимости (их общие члены не стремятся к нулю при $n\to\infty$). Таким образом, на обоих концах интервала сходимости данный ряд расходится, а область его сходимости есть интервал $(-2,2)$.

Пример 7 – Найти область сходимости ряда $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$.

Решение

Для данного ряда $c_n=\frac{1}{n!}$, $c_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$, тогда радиус сходимости ряда $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n!}:\frac{1}{(n+1)!}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$. Ряд сходится при любом конечном значении x. Область его сходимости – интервал $(-\infty,+\infty)$.

Пример 8 – Найти область сходимости ряда $1+\frac{1!x}{10}+\frac{2!x^2}{10^2}+\ldots+\frac{n!x^n}{10^n}+\ldots$.

Решение

Для данного ряда $c_n=\frac{n!}{10^n}$, $c_{n+1}=\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}$, тогда радиус сходимости ряда равен $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{10^n}:\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n!}{n!(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10}{n+1}=0$.

Ряд сходится только при $x=0$ и расходится при остальных значениях.

Если функции $y = f(x)$ раскладывается в степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ с областью сходимости D, т. е. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ для любого x из области сходимости, то этот ряд является ее *рядом Тейлора* в точке x_0. Он записывается в виде $f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots =$ $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.

Если $x_0 = 0$, то получится ряд *Маклорена* функции $f(x)$. Он имеет вид $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

Пример 9 – Разложить в степенной ряд функцию $f(x) = e^{-x^2}$.

Решение

Положим $-x^2 = t$, тогда $e^{-x^2} = e^t$; запишем разложение функции e^t, применив формулу $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots$. При $t = -x^2$ получим разложение $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \ldots$, справедливое для всех значений x, или $e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \ldots$.

6 Примерные задачи к аудиторной контрольной работе

1 Найти частные и полное приращение функции $z = x^2 y$ в точке $M_0(1; 2)$ и при данных приращениях аргументов $\Delta x = 0{,}1;\ \Delta y = -0{,}2$.

Решение

Так как $x_0 = 1,\ y_0 = 2$, то $x_0 + \Delta x = 1{,}1,\ y_0 + \Delta y = 1{,}8,\ M_1(1{,}1; 1{,}8)$.

Определим $z(M_0) = z(1; 2) = (1)^2 \cdot 2 = 2$.

Тогда

$$z(x_0 + \Delta x; y_0) = z(1{,}1; 2) = 1{,}1^2 \cdot 2 = 2{,}42;$$

$$z(x_0; y_0 + \Delta y) = z(1; 1{,}8) = 1^2 \cdot 1{,}8 = 1{,}8;$$

$$z\left(M_1\right) = z\left(x_0 + \Delta x;\, y_0 + \Delta y\ \right) = z\left(1{,}1;\, 1{,}8\right) = 1{,}1^2 \cdot 1{,}8 = 2{,}178.$$

Таким образом,

$$\Delta_x z = z\left(x_0 + \Delta x;\, y_0\right) - z\left(x_0;\, y_0\right) = 2{,}42 - 2 = 0{,}42;$$
$$\Delta_y z = z\left(x_0;\, y_0 + \Delta y\right) - z\left(x_0;\, y_0\right) = 1{,}8 - 2 = -0{,}2;$$
$$\Delta z = z\left(x_0 + \Delta x;\, y_0 + \Delta y\right) - z\left(x_0;\, y_0\right) = 2{,}178 - 2 = 0{,}178.$$

Очевидно, что $\Delta z = 0{,}178 \neq 0{,}42\ - 0{,}2 = 0{,}22 = \Delta_x z + \Delta_y z$.

2 Найти частные и полное приращение данной функции в данной точке и при данных приращениях аргументов:

а) $z = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 y^2 - \left(x - y\right)^2}$, $M_0\left(2;\, 2\right)$, $\Delta x = -\ 0{,}2, \Delta y = 0{,}1;$

б) $z = \left(\dfrac{x^2 + y^2}{xy}\right)^2$, $M_0\left(1;1\right)$, $\Delta x = -\ 0{,}1$, $\Delta y = -\ 0{,}1$.

3 Найти частные производные первого порядка и полный дифференциал функции $z = 2x^2 - 3xy - y^2$.

Решение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \left(2x^2 - 3xy - y^2\right)'_x = 4x - 3y;$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \left(2x^2 - 3xy - y^2\right)'_y = -3x - 2y = -\left(3x + 2y\right);$$
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \left(4x - 3y\right)dx - \left(3x + 2y\right)dy.$$

4 Найти частные производные второго порядка функции $z = 2x^2 y^3 + 3x^4 + 5y - 7$.

Решение

Найдем частные производные первого порядка функции:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \left(2x^2 y^3 + 3x^4 + 5y - 7\right)'_x = 4xy^3 + 12x^3;$$
$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \left(2x^2 y^3 + 3x^4 + 5y - 7\right)'_y = 6x^2 y^2 + 5.$$

Найдем частные производные второго порядка функции:

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(4xy^3 + 12x^3\right)'_x = 4y^3 + 36x^2;$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(6x^2y^2 + 5\right)'_y = 12x^2 y;$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(4xy^3 + 12x^3\right)'_y = 12xy^2;$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(6x^2y^2 + 5\right)'_x = 12xy^2.$$

5 Найти частные производные первого порядка и полный дифференциал функций:

а) $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2}$; б) $z = x^4 \cos^2 y - y^4 \sin^3 x^5$; в) $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 3y^2}}$.

6 Найти частные производные второго порядка функций:

а) $z = x^3 y + 5xy^2 - x^2 y^4$; б) $z = x^2 \ln\left(x + y\right)$; в) $z = \sqrt{2xy + y^2}$.

7 Вычислить приближенно $1{,}02^{3{,}01}$.

Решение

Для функции двух переменных $z = f\left(x, y\right)$ полное приращение $\Delta z = f\left(x + \Delta x;\, y + \Delta y\right) - f\left(x;\, y\right)$, $\Delta z \approx dz$. Формулу приближенного вычисления значения функции $f\left(x + \Delta x;\, y + \Delta y\right) \approx f\left(x;\, y\right) + f'_x\left(x;\, y\right)\Delta x + f'_y\left(x;\, y\right)\Delta y$ уточним для данных в задаче значений.

Рассмотрим функцию $z = x^y$. Тогда $1{,}02^{3{,}01} = \left(x + \Delta x\right)^{y + \Delta y}$, где $x = 1$, $\Delta x = 0{,}02$, $y = 3$, $\Delta y = 0{,}01$.

Найдем $z'_x = \left(x^y\right)'_x = y \cdot x^{y-1}$, $z'_y = \left(x^y\right)'_y = x^y \cdot \ln x$.

Следовательно, $1{,}02^{3{,}01} \approx 1^3 + 3 \cdot 1^{3-1} \cdot 0{,}02 + 1^3 \cdot \ln 1 \cdot 0{,}01$, т. е. $1{,}02^{3{,}01} \approx 1{,}06$.

Используя микрокалькулятор, находим $1{,}02^{3{,}01} \approx 1{,}061418168$ и сравниваем полученные результаты.

8 Вычислить приближенно $0{,}97^{2{,}02}$.

9 Вычислить приближенно $\sqrt{\left(4{,}05\right)^2 + \left(2{,}93\right)^2}$.

Решение

Рассмотрим функцию $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$. Данное число $(4{,}05)^2+(2{,}93)^2$ есть приращенное значение функции $f(x,y)$ в точке $P_0(4;3)$ при приращениях аргументов $\Delta x=0{,}05$ и $\Delta y=-0{,}07$. Значение $f(4;3)=\sqrt{4^2+3^2}=5$.

Полный дифференциал функции $df=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}\Delta x+\dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}\Delta y.$

Значение полного дифференциала df данной функции в точке $P_0(4;3)$ равно $df\big|_{(4;3)}=\dfrac{4}{\sqrt{4^2+3^2}}\cdot 0{,}05+\dfrac{3}{\sqrt{4^2+3^2}}\cdot(-0{,}07)=-0{,}002$.

По формуле $f(x+\Delta x;\,y+\Delta y)\approx f(x;\,y)+f'_x(x;\,y)\Delta x+f'_y(x;\,y)\Delta y$ получим $f(4{,}05;\,2{,}93)\approx f(4;3)+df\big|_{(4;3)}=5+(-0{,}002)=4{,}998$.

10 Разложить функцию $f(x,y)=x^3-2y^3+3xy$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(1;2)$.

Решение

Найдем разложение данной функции по степеням биномов $(x-1)$ и $(y-2)$.

Значение функции $f(x,y)=x^3-2y^3+3xy$ в точке $M_0(1;2)$ равно $f(1;2)=-9$.

Найдем частные производные функции и вычислим их значения в указанной точке $M_0(1;2)$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1;2)=\left(3x^2+3y\right)\Big|_{\substack{x=1,\\y=2}}=9$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1;2)=\left(-6y^2+3x\right)\Big|_{\substack{x=1,\\y=2}}=-21$;

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1;2)=6x\Big|_{\substack{x=1,\\y=2}}=6$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1;2)=-12y\Big|_{\substack{x=1,\\y=2}}=-24$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1;2)=3\Big|_{\substack{x=1,\\y=2}}=3$;

$\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}(1;2)=6\Big|_{\substack{x=1,\\y=2}}=6$; $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(1;2)=0\Big|_{\substack{x=1,\\y=2}}=0$; $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(1;2)=-12\Big|_{\substack{x=1,\\y=2}}=-12$.

Все производные порядков 4 и выше тождественно равны нулю. Поэтому остаточный член четвертого порядка в формуле Тейлора будет тождественно равен нулю. Получим точное, а не приближенное, равенство

$$f(x,y)=x^3-2y^3+3xy=-9+9(x-1)-21(y-2)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(6(x-1)^2+2\cdot 3(x-1)(y-2)-24(y-2)^2\right)+\frac{1}{6}\left(6(x-1)^3-12(y-2)^3\right)=-9+$$
$$+9(x-1)-21(y-2)+3(x-1)^2+3(x-1)(y-2)-12(y-2)^2+(x-1)^3-2(y-2)^3.$$

11 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D x^2 y\,dxdy$ по области D, ограниченной линиями $x=1$, $x=2$, $y=2$, $y=3$.

Решение

Для вычисления двойного интеграла перейдем к повторному интегралу:

$$\iint\limits_D x^2 ydxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_2^3 x^2 ydy$$

Вычисляем внутренний интеграл по y, считая, что x – константа:

$$\iint\limits_D x^2 ydxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_2^3 x^2 ydy = \int\limits_1^2 \left(\left. \frac{x^2 y^3}{2} \right|_2^3 \right) dx = \int\limits_1^2 \left(\frac{x^2}{2}\left(3^2 - 2^2\right) dx \right) =$$

$$= \frac{5}{2}\int\limits_1^2 x^2 dx = \frac{5}{2} \cdot \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^2 = 2{,}5\left(2^2 - 1\right) = 17{,}5.$$

12 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xy\,dxdy$ по области D, ограниченной линиями $x=1$, $x=2$, $y=1$, $y=2$.

13 Найти общее решение обыкновенного дифференциального уравнения $(x+3)\cdot y' = \ln(x+3)$.

Решение

Исходное дифференциальное уравнение имеет смысл для $x > -3$. При таких значениях получим $y' = \dfrac{\ln(x+3)}{x+3}$.

Тогда $y = \int \dfrac{\ln(x+3)}{x+3} dx = \int \ln(x+3)\, d\left(\ln(x+3)\right) = \dfrac{\ln^2(x+3)}{2} + C$ – общее решение уравнения при $x > -3$.

14 Решить дифференциальное уравнение $y' - x^2 y = 2xy$.

Решение

Запишем уравнение в виде $y' = x^2 y + 2xy$. Заменим y' на $\dfrac{dy}{dx}$ и в правой части полученного равенства вынесем общий множитель y за скобки.

Получим $\frac{dy}{dx}=y\left(x^2+2x\right)$. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, т. к. его удалось привести к уравнению вида $y'=f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)$, где можно считать $f\left(x\right)=x^2+2x$, $g\left(x\right)=y$.

Разделим переменные, умножив сначала обе части на dx, получим $dy=y\left(x^2+2x\right)dx$, $dx\neq 0$.

Разделим обе части полученного равенства на y: $\frac{dy}{y}=\left(x^2+2x\right)dx$, $y\neq 0$. Получили уравнение с разделенными переменными.

Проинтегрируем обе части полученного уравнения: $\int\frac{dy}{y}=\int\left(x^2+2x\right)dx$ или $\ln\left|y\right|=\frac{x^3}{3}+x^2+C$, где C – произвольная постоянная.

Найдем y: $y=e^{\frac{x^3}{3}+x^2+C}$ или $y=e^C\cdot e^{\frac{x^3}{3}+x^2}$

Пусть $e^C=\tilde{C}$, где $\tilde{C}$ – также произвольная постоянная.

Тогда окончательно получим общее решение $y=\tilde{C}\cdot e^{\frac{x^3}{3}+x^2}$.

При разделении переменных полагали, что $y\neq 0$. Рассмотрим отдельно случай $y=0$. Очевидно, что функция $y=0$ также является решением данного уравнения. Оно формально получается из формулы общего решения при $\tilde{C}=0$.

15 Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданному начальному условию: $xydx+\left(1+y^2\right)\sqrt{1+x^2}dy=0$, $y\left(\sqrt{8}\right)=1$.

Решение

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Поделим обе части уравнения на $y\cdot\sqrt{1+x^2}$, полагая, что $y\cdot\sqrt{1+x^2}\neq 0$. Получим уравнение с разделенными переменными $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx+\frac{1+y^2}{y}dy=0$ или $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=-\frac{1+y^2}{y}dy$. Интегрируя обе части полученного уравнения, имеем $\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=-\int\frac{1+y^2}{y}dy$ или $\frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{\sqrt{1+x^2}}=-\int\frac{dy}{y}-\int ydy$.

Таким образом, общий интеграл данного дифференциального уравнения имеет вид $\sqrt{1+x^2}=-\ln\left|y\right|-\frac{y^2}{2}+C$, или $\sqrt{1+x^2}+\ln\left|y\right|+\frac{y^2}{2}-C=0$, где C – произвольная постоянная.

При разделении переменных полагали, что $y\cdot\sqrt{1+x^2}\neq 0$. Рассмотрим случай $y\cdot\sqrt{1+x^2}=0$, откуда следует, что $y=0$, т. к. $\sqrt{1+x^2}\neq 0$ при всех $x\in R$. Подставим $y=0$ в *исходное* уравнение, получим $x\cdot 0\cdot dx+\left(1+0^2\right)\cdot\sqrt{1+x^2}\,d0=0$, откуда имеем $0=0$. Следовательно, $y=0$ также является решением данного дифференциального уравнения, однако оно не может быть получено из общего решения ни при каком частном значении постоянной C.

Для нахождения частного решения по условию $y\left(\sqrt{8}\right)=1$ подставим в общий интеграл $x=\sqrt{8}$, $y=1$. Получим $\sqrt{1+8}+\ln 1+\frac{1}{2}-C=0$, откуда $C=\frac{7}{2}$.

Значит, искомый частный интеграл имеет вид $\sqrt{1+x^2}+\ln|y|+\frac{y^2}{2}-\frac{7}{2}=0$.

16 Решить линейное дифференциальное уравнение первого порядка $y'-\frac{2x}{x^2+1}y=x\sqrt{x^2+1}$.

Решение

Так как $y=uv$, то, подставляя выражения $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}v+\frac{dv}{dx}u$ в данное уравнение $y'-\frac{2x}{x^2+1}y=x\sqrt{x^2+1}$, получим уравнение вида $v\frac{du}{dx}+u\left(\frac{dv}{dx}-\frac{2x}{x^2+1}v\right)=x\sqrt{x^2+1}$.

Выберем функцию $v(x)$ так, чтобы выполнялось равенство $\frac{dv}{dx}-\frac{2x}{x^2+1}v=0.$ После разделения переменных это уравнение принимает вид $\frac{dv}{v}=\frac{2x}{x^2+1}dx$. После почленного интегрирования получим $\ln|v|=\ln\left(x^2+1\right)$ и $v=x^2+1$.

Подставив найденное значение функции v в равенство $v\frac{du}{dx}=f(x)$, получим $\left(x^2+1\right)\frac{du}{dx}=x\sqrt{x^2+1}$. Это уравнение с разделяющимися переменными для нахождения функции u. Разделяем переменные $du=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ и, интегрируя почленно последнее уравнение, находим $u=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{x^2+1}+C$.

Общее решение данного линейного дифференциального уравнения первого порядка имеет вид $y=\left(\sqrt{x^2+1}+C\right)\left(x^2+1\right)=\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}+C\left(x^2+1\right)$.

17 Решить задачу Коши для линейного однородного дифференциального уравнения $y''+9y'+20y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=-1$.

Решение

Составим характеристическое уравнение $k^2+9k+20=0$. Найдем его корни $k_1=-4,\ k_2=-5$.

Фундаментальную систему решений образуют функции $y_1(x)=e^{-4x}$, $y_2(x)=e^{-5x}$.

Следовательно, общее решение исходного дифференциального уравнения есть линейная комбинация фундаментальных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$, а именно $y(x)=C_1\cdot e^{-4x}+C_2\cdot e^{-5x}$, где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

По заданным начальным условиям определим постоянные C_1, C_2. Для этого найдем *производную от общего решения*: $y'(x)=-4C_1\cdot e^{-4x}-5C_2\cdot e^{-5x}$.

Подставим начальные условия $y(0)=0$ и $y'(0)=-1$ в уравнения $y(x)=C_1\cdot e^{-4x}+C_2\cdot e^{-5x}$ и $y'(x)=-4C_1\cdot e^{-4x}-5C_2\cdot e^{-5x}$. Получим систему уравнений $\begin{cases}0=C_1+C_2;\\-1=-4C_1-5C_2\end{cases}$, откуда находим $\begin{cases}C_1=-1;\\C_2=1.\end{cases}$

Тогда искомое решение задачи Коши имеет вид $y(x)=-e^{-4x}+e^{-5x}$.

18 Найти радиус и область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^3}$.

Решение

Радиус сходимости степенного ряда найдем по формуле $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{(n+1)^3}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^3}{n^3}\right|=1$. Интервал сходимости задается условием $-1<x+2<1$, тогда $-3<x<-1$.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала. При $x=-3$ получим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$. Это знакопеременный ряд, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0$, $a_n\geq a_{n+1}\geq\ldots$ абсолютные величины членов ряда монотонно убывают. По признаку Лейбница ряд *сходится*.

При $x=-1$ получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. Это ряд Дирихле, он *сходится*, т. к. показатель степени в знаменателе больше единицы. Таким образом, областью сходимости данного ряда является отрезок $[-3;-1]$.

19 Установить сходимость или расходимость рядов:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{1000n+1}\right);\ \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n};\ \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-1}{9n+1}\right)^{\frac{n}{2}};\ \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{\left(n^2+1\right)^2}.$$

20 Используя признак сравнения, исследовать на сходимость ряды:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+3}\right);\quad \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}-1};\ \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-1}{9n+1}\right)^{\frac{n}{2}};\ \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

21 Используя признак Даламбера, исследовать на сходимость ряды:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)!};\quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n};\quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n};\quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,(n+1)}.$$

22 Используя признак Коши, исследовать на сходимость ряды:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^{3n-1}};\quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{n};\ \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{n}\right)^{n};\ \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{6n+7}\right)^{(n+1)^2}.$$

23 По интегральному признаку Коши исследовать на сходимость ряды:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{(2n+3)^7}};\ \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n};\quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{\left(n^2+1\right)^2};\ \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(5n-1)^2}}.$$

24 Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}};\quad \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{2n-1};\quad \text{в) } \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{2n-1};\quad \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)}.$$

25 Разложить функцию $f(x)=\frac{1}{x+3}$ в ряд Тейлора по степеням $(x+1)$.

Решение

Для указанного разложения $x_0=-1$. Определим слагаемые ряда Тейлора:

$$f(x_0)=f(-1)=\frac{1}{2};\ f'(x)=-\frac{1}{(x+3)^2};\ f'(x_0)=f'(-1)=-\frac{1}{(-1+3)^2}=-\frac{1}{4};$$

$$f''(x)=\frac{1\cdot 2}{(x+3)^3};\ f''(x_0)=f''(-1)=\frac{1\cdot 2}{(-1+3)^3}=\frac{2}{8};\quad f'''(x)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(x+3)^4};$$

$$f'''(x_0)=f'''(-1)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(-1+3)^4}=-\frac{6}{16}.$$

Тогда $f^{(n)}(x) = -\dfrac{(-1)^n \cdot n!}{(x+3)^{n+1}}$ и $f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(-1) = \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{(-1+3)^{n+1}} = \dfrac{(-1)^n \cdot n!}{2^{n+1}}$.

Искомое разложение имеет вид:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{1!}(x+1) + \frac{\frac{2}{8}}{2!}(x+1)^2 - \frac{\frac{6}{16}}{3!}(x+1)^3 + \ldots + \frac{\frac{(-1)^n \cdot n!}{2^{n+1}}}{n!}(x+1)^n + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{2!}}(x+1) + \frac{1}{2^{3!}}(x+1)^2 - \frac{1}{2^{4!}}(x+1)^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x+1)^n + \ldots .$$

Можно записать, что $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x+1)^n$.

26 Разложить в ряд Маклорена функции:

а) $f(x) = \cos^2 x$; б) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)(1+2x)}$; в) $f(x) = \dfrac{1}{2+4x}$.

27 Разложить в ряд Тейлора функцию:

а) $f(x) = x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x + 1$ по степеням $(x+1)$;

б) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$ по степеням $(x-1)$;

в) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ по степеням $(x-2)$.

28 Найти радиусы сходимости степенных рядов:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^n}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(nx)^2}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{3n}}{3^n}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{2^n}$.

29 Найти области сходимости степенных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{3\sqrt[n]{n}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(x-2)^n}{2\sqrt[n]{n+1}}$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n x^n}{n!}$.

7 Примерный вариант аудиторной контрольной работы

1 Найти частные производные первого порядка и полный дифференциал функции $z = 2x^2 - 3xy - y^2$.

2 Найти частные производные второго порядка функции $z = 2x^2y^3 + 3x^4 + 5y - 7$.

3 Вычислить приближенно $0{,}97^{2{,}02}$.

4 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D x^2 y\,dxdy$ по области D, ограниченной линиями $x=1$, $x=2$, $y=2$, $y=3$.

5 Решить дифференциальное уравнение $y'-x^2y=2xy$.

6 Решить задачу Коши для линейного однородного дифференциального уравнения $y''+9y'+20y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=-1$.

7 Используя признак Даламбера, исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

8 Найти радиус и область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^3}$.

Список литературы

1 Высшая математика. Общий курс: учебник / под ред. С. А. Самаля. – Минск: Вышэйшая школа, 2000. – 351 с.

2 Высшая математика для экономистов: практикум для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / под ред. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб и доп. – Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2007. – 479 с.

3 **Гусак, А. А.** Высшая математика: в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск: Тетра-Системс, 2004. – Т. 2. – 544 с.

4 **Данко, П. Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Москва: ОНИКС 21 век, 2003. – Ч. 1. – 304 с.

5 **Жевняк, Р. М.** Высшая математика. Функции многих переменных. Интегральное исчисление функций одной и многих переменных. Векторный анализ / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск: Вышэйшая школа, 1993. – 411 с.

6 Индивидуальные задания по высшей математике: учебное пособие: в 4 ч. / А. П. Рябушко [и др.]; под общ. ред. А. П. Рябушко. – 3-е изд., испр. – Минск: Вышэйшая школа, 2007. – Ч. 2. – 396 с.

7 **Кожух, И. Г.** Математический анализ: учебное пособие для вузов / И. Г. Кожух. – Минск: Изд-во Гревцова, 2011. – 448 с.

8 **Лунгу, К. Н.** Руководство к решению задач: учебное пособие / К. Н. Лунгу, Е. В. Макаров; под ред. В. Д. Кулиева. – 2-е изд., испр. – Москва: Физматлит, 2005. – 216 с.

9 **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – Москва: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.