МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Автоматизированные системы управления»

# СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

***Методические рекомендации к лабораторным работам для студентов специальности 1-53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации» дневной и заочной форм обучения***

**Часть 2**

Могилев 2023

УДК 519.8
ББК 22.17
С 40

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Автоматизированные системы управления» «20» декабря 2022 г., протокол № 5

Составитель ст. преподаватель И. Г. Плиско

Рецензент канд. техн. наук, доц. С. К. Крутолевич

Методические рекомендации предназначены для выполнения лабораторных работ (часть 2) по дисциплине «Системный анализ и исследование операций» для студентов специальности 1-53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации» дневной и заочной форм обучения.

Учебно-методическое издание

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Часть 2

Ответственный за выпуск А. И. Якимов

Корректор Т. А. Рыжикова

Компьютерная верстка М. М. Дударева

Подписано в печать 24.02.2023 .Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 2,79.Уч.-изд. л. 3,0 .Тираж 21 экз. Заказ № 236.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

# Содержание

# Введение

Целью курса «Системный анализ и исследование операций» является приобретение специальных знаний, умений и навыков, необходимых инженеру по информационным технологиям в процессе проектирования автоматизированных систем и позволяющих освоить современную методологию моделирования и оптимизации решений для задач различных сфер деятельности человека.

Задачами учебной дисциплины являются приобретение концептуальных знаний по основам методологии системного анализа; изучение принципов решения сложных задач различных классов; формирование навыков оптимизации решений.

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся:

узнает:

– сущность системного подхода;

– основные понятия и области применения системного анализа;

– принципы использования системного анализа;

– технологию и этапы системного анализа;

– методы и методики, используемые в системном анализе, для различных классов и типов задач;

научится:

– проводить структурно-функциональный анализ объекта;

– выявлять, формулировать и оценивать проблему;

– формировать сценарий решения проблемы;

– определять наиболее эффективный метод решения проблемы;

– формировать проект решения проблемы;

– осуществлять расчет потребных ресурсов для решения проблемы.

Для освоения дисциплины необходимо:

– изучить основные теоретические положения, сделав необходимые выписки в конспект;

– выполнить в полном объеме лабораторные работы и практические задания к ним согласно данным методическим рекомендациям;

– оформить отчет согласно содержанию.

# 1 Лабораторная работа № 1. Решение задач оптимизации в классе моделей нелинейного программирования

*Цель работы*: ознакомиться с методами решения задач нелинейного программирования: графическим, множителей Лагранжа и градиентным.

***Теоретические сведения***

Если в задаче

$$f(x_1, x_2, .., x_n) \to \text{extr},$$

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \left\{ \begin{matrix} \le \\ = \\ \ge \end{matrix} \right\} b_i, i = 1, 2, ..., m;$$

$$x_j \ge 0, \ j = 1, 2, ..., n$$

все ограничения или их часть либо функция цели нелинейны, то мы имеем задачу нелинейного программирования.

*Графический метод.*

В задачах нелинейного программирования отсутствуют все или некоторые из свойств, характеризующих линейные задачи. Область допустимых решений в задачах линейного программирования выпукла. В задачах нелинейного программирования это свойство не сохраняется, область допустимых решений может состоять из нескольких несвязанных областей.

Таким образом, в общем случае задача нелинейного программирования является чрезвычайно трудной для решения. Если число переменных в задаче не превышает трех, то можно попытаться решить задачу графически.

Графическое решение задачи нелинейного программирования существенно отличается от такого же решения задач линейного программирования. Даже в том случае, если область допустимых решений задачи представлена системой линейных неравенств, оптимальное решение задачи может находиться в любой точке области: на границе или даже внутри области.

*Метод множителей Лагранжа.*

Если в задаче требуется найти экстремум функции цели при ограничениях-равенствах, т. е. имеется задача вида

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \text{extr},$$
$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, i = 1, 2, ..., m$$

и функции $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ дифференцируемы, то для решения такой задачи может быть использован метод множителей Лагранжа.

Сущность этого метода состоит в следующем. Вводят дополнительные переменные $\lambda_1$, $\lambda_2$,…, $\lambda_m$ (по числу ограничений задачи) и составляют функцию, называемую *функцией Лагранжа*:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m,) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, x_2, ..., x_n) .$$

Чтобы найти оптимальное решение, определяют необходимые условия существования экстремума – равенство нулю частных производных по $x_j (1,...,n)$ и $\lambda_i (1,...,m)$.

Каждое решение системы определяет стационарную точку, в которой может достигаться экстремум функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Дальнейшее исследование этих точек позволяет найти решение задачи.

*Градиентный метод.*

Используя градиентные методы, можно найти решение любой задачи нелинейного программирования. Применение этих методов в общем случае позволяет найти точку локального экстремума. Поэтому более целесообразно использовать их для нахождения решения задач выпуклого программирования. Процесс нахождения решения задачи с помощью градиентных методов состоит в том, что начиная с некоторой точки $X^{(k)}$ осуществляется последовательный переход к некоторым другим точкам до тех пор, пока не будет найдено приемлемое решение исходной задачи.

При нахождении решения задачи градиентными методами итерационный процесс продолжается до тех пор, пока градиент функции $f(x_1, x_2, ...x_n)$ в очередной точке $X^{(k+1)}$ не станет равным нулю или же пока не выполнится неравенство

$$| f(X^{(k+1)}) - f(X^{(k)}) | < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ – точность полученного решения.

*Схема решения.*

1 Определение $x^0 = (x_1, x_2, ..., x_n)$, принадлежащей допустимой области и $F(x_0)$.

2 Определение *grad* $F(x_0)$ или – *grad* $F(x_0)$.

3 Выбор шага $h$.

4 Определение следующей точки по формуле $x\ (k + 1) = x(k) \pm \lambda$ *grad* $F(x(k))$, «+» – если целевая функция максимизируется, «–» – если минимизируется.

5 Определение $F(x(k+1))$. Если $| f(X^{(k+1)}) - f(X^{(k)}) | < \varepsilon,$ решение найдено, иначе переход к п. 2.

***Порядок выполнения работы***

1 Ознакомиться с теоретическими указаниями.

2 Решить задачи (по указанию преподавателя).

***Содержание отчета***

1 Тема и цель работы.
2 Условия задач.
3 Результаты решения.
4 Выводы по работе.

***Контрольные вопросы***

1 Что такое градиент функции и что он показывает?
2 В чем суть метода множителей Лагранжа?
3 Объясните алгоритм решения задачи нелинейного программирования графическим методом.
4 Сформулируйте последовательность действий в случае решения задачи нелинейного программирования градиентным методом.

Решить задачи 1–5 графическим методом, 6–12 методом множителей Лагранжа, 13–17 – градиентным методом.

***Задача 1.*** Найти максимум функции $z = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$ при ограничениях $x_1^2 + x_2^2 \le 3$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

***Задача 2.*** Найти максимум функции $z = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2$ при ограничениях $2x_1 + 5x_2 \le 30$, $2x_1 + x_2 \le 14$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

***Задача 3.*** Найти максимум функции $z = x_1^2 + x_2^2$ при ограничениях $(x_1 - x_2)^2 \ge 9$, $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 \le 36$, $x_1 + x_2 \ge 8$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

***Задача 4.*** Найти максимум функции $z = 2x_1 + 0{,}2x_1^2 + 3x_2 - 0{,}2x_2^2$ при ограничениях $2x_1 + x_2 \le 13$, $2x_1 + x_2 \le 10$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

***Задача 5.*** Найти минимум функции $z = -2x_1 + 0{,}1x_1^2 - 3x_2 + 0{,}1x_2^2$ при ограничениях $5x_1 + 13x_2 \le 51$, $15x_1 + 7x_2 \le 105$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

***Задача 6.*** Найти экстремумы функции $z = x_1x_2$, если $x_1 + x_2 = 1$.

***Задача 7.*** Найти экстремумы функции $z = x_1/2 + x_2/3$, если $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

***Задача 8.*** Найти экстремумы функции $z = x_1^2 + x_2^2$, если $x_1/2 + x_2/3 = 1$.

***Задача 9.*** Найти экстремумы функции $z = x_1 - 2x_2 + 2x_3$, если $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

***Задача 10.*** Найти экстремумы функции $z = x_1x_2^2x_3^3$, если $x_1 + x_2 + x_3 = 12$.

***Задача 11.*** Найти экстремумы функции $z = x_1x_2 + x_2x_3$, если $x_1^2 + x_2^2 = 2$, $x_3 + x_2 = 2$, $x_1, x_2, x_3 \ge 0$.

***Задача 12.*** Найти экстремумы функции $z = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2$, если $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$.

***Задача 13.*** Максимизировать функцию $z = 2x_1 - 0{,}2x_1^2 + 2{,}4x_2 - 0{,}2x_2^2$ при ограничениях $x_1 + 2x_2 \ge 10$, $x_1^2 + x_2^2 \le 100$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \le 8$.

***Задача 14.*** Минимизировать функцию $z = -5{,}6x_1 + 0{,}4x_1^2 - 8{,}8x_2 + 0{,}4x_2^2$ при ограничениях $0 \le x_1 \le 6$, $x_1^2 + x_2^2 \le 144$, $x_1 \le x_2$.

***Задача 15.*** Минимизировать функцию $z = -3{,}2x_1 + 0{,}2x_1^2 - 3{,}6x_2 + 0{,}2x_2^2$ при ограничениях $x_1 + x_2 \ge 20$, $-6x_1 + x_1^2 - 10x_2 + x_2^2 \le 66$, $20x_1 - x_1^2 + 10x_2 - x_2^2 \ge 25$.

***Задача 16.*** Максимизировать функцию $f = 3{,}6x_1 - 0{,}2x_1^2 + 0{,}8x_2 - 0{,}2x_2^2$ при ограничениях $2x_1 + x_2 \ge 10$, $-10x_1 + x_1^2 + x_2^2 \le 75$, $x_1 + x_2 \ge 10$.

***Задача 17.*** Минимизировать функцию $f = -3x_1 + 0{,}25x_1^2 - 4x_2 + 0{,}25x_2^2$ при ограничениях $x_1 + x_2 \ge 10$, $-10x_1 + x_1^2 + x_2^2 \le 75$, $x_1^2 + x_2^2 \le 75$.

## 2 Лабораторная работа № 2. Методы векторной оптимизации

*Цель работы*:
- ознакомиться с теорией векторной оптимизации;
- научиться решать задачи различными методами.

### *Теоретические сведения*

К общей формулировке многокритериальной задачи могут сводиться задачи различного содержания, которые можно подразделить на четыре типа.

1 Задачи оптимизации на множестве целей, каждая из которых должна быть учтена при выборе оптимального решения. Примером может служить задача составления плана работы предприятия, в которой критериями служит ряд экономических показателей.

2 Задачи оптимизации на множестве объектов, качество функционирования каждого из которых оценивается самостоятельным критерием. Если качество функционирования каждого объекта оценивается несколькими критериями (векторным критерием), то такая задача называется *многовекторной.* Примером может служить задача распределения дефицитного ресурса между несколькими предприятиями. Для каждого предприятия критерием оптимальности является степень удовлетворения его потребности в ресурсе или другой показатель, например, величина прибыли. Для планирующего органа критерием выступает вектор локальных критериев предприятий.

3 Задачи оптимизации на множестве условий функционирования. Задан спектр условий, в которых предстоит работать объекту, и применительно к каждому условию качество функционирования оценивается некоторым частным критерием.

4 Задачи оптимизации на множестве этапов функционирования. Рассматривается функционирование объектов на некотором интервале времени, разбитом на несколько этапов. Качество управления на каждом этапе оценивается частным критерием, а на множестве этапов – общим векторным критерием.

При разработке методов решения векторных задач приходится решать ряд специфических проблем.

*Проблема нормализации* возникает в связи с тем, что локальные критерии имеют, как правило, различные единицы и масштабы измерения, и это делает невозможным их непосредственное сравнение. Операция приведения критериев к единому масштабу и безразмерному виду носит название *нормирования*. Наиболее распространенным способом нормирования является замена абсолютных значений критериев их безразмерными относительными величинами:

$$\overline{f_k}(X) = \frac{f_k(X)}{f_k^*}$$

или относительными значениями отклонений от оптимальных значений критериев $f_k^*$:

$$\overline{f_k}(X) = \frac{f_k^* - f_k(X)}{f_k^*}.$$

*Проблема выбора принципа* оптимальности связана с определением свойств оптимального решения и решением вопроса: в каком смысле оптимальное решение превосходит все остальные решения?

*Проблема учета приоритета критериев* встает, если локальные критерии имеют различную значимость. Необходимо найти математическое определение приоритета и степень его влияния на решение задачи.

*Проблема вычисления оптимума* возникает, если традиционные вычислительные схемы и алгоритмы непригодны для решения задачи векторной оптимизации.

Решение перечисленных проблем идет по нескольким направлениям. Основные направления:

– методы, основанные на свертывании критериев в единый;

– методы, использующие ограничения на критерии;

– методы целевого программирования;

– методы, основанные на отыскании компромиссного решения;

– методы, в основе которых лежат человеко-машинные процедуры принятия решений (интерактивное программирование).

В методах, основанных на свертывании критериев, из локальных критериев формируется один. Наиболее распространенным является *метод линейной комбинации частных критериев.* Пусть задан вектор весовых коэффициентов критериев $a = \{a_1, \ldots, a_k\}$, характеризующих важность соответствующего критерия, $\sum_{k=1}^{K} a_k = 1, a_k \geq 0 \ (k = \overline{1,K})$. Линейная скаляризованная функция представляет собой сумму частных критериев, умноженных на весовые коэффициенты. Задача математического программирования становится однокритериальной и имеет вид:

$$F^0 = \sum_{k=1}^{K} a_k f_k(X) \to \max;$$

$$q_i(X) \leq b_i \ (i = \overline{1,M});$$

$$X \geq 0.$$

Критерии в свертке могут быть нормированы. Решение, полученное в результате оптимизации скаляризованного критерия, эффективно.

К недостаткам метода можно отнести то, что малым приращениям коэффициентов соответствуют большие приращения функции, т. е. решение задачи неустойчиво, а также необходимость определения весовых коэффициентов.

Направление методов, использующих ограничения на критерии, включает два подхода:

1) метод ведущего критерия;

2) методы последовательного применения критериев (метод последовательных уступок, метод ограничений).

В *методе ведущего критерия* все целевые функции, кроме одной, переводятся в разряд ограничений. Пусть $\gamma = (\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_k)$ – вектор, компоненты которого представляют собой нижние границы соответствующих критериев. Задача будет иметь вид:

$$F = f_1(\max);$$

$$f_k \ge \gamma_k \, (k=\overline{2,K});$$
$$q_i(X) \le b_i \, (i=\overline{1,M});$$
$$X \ge 0.$$

Полученное этим методом решение может не быть эффективным, поэтому необходимо проверить его принадлежность области компромиссов.

Метод ведущего критерия применяется в таких задачах, как минимизация полных затрат при условии выполнения плана по производству различных видов продукции, максимизация выпуска комплектных наборов при ограничении на потребляемые ресурсы.

*Алгоритм метода последовательных уступок.*

1 Критерии нумеруются в порядке убывания важности.

2 Определяется значение $f_1^*$. Лицом, принимающим решение, устанавливается величина уступки $\Delta_1$ по этому критерию.

3 Решается задача по критерию $f_2$ с дополнительным ограничением $f_1(X) \ge f_1^* - \Delta_1$.

Далее пп. 2 и 3 повторяются для критерия $f_2, ..., f_K$.

*Метод равных и наименьших отклонений.*

При решении задач линейного программирования методом уступок имеем различные отклонения критериев от экстремальных значений. Потребуем, чтобы в компромиссном плане относительные отклонения всех критериев от своих экстремальных значений были равны и минимальны. При этом предполагается, что в области допустимых решений задачи не существует плана, оптимизирующего все критерии.

Условие равенства отклонений запишем в виде

$$\left|\frac{f_1 - f_1^*}{f_1^*}\right| = \left|\frac{f_2 - f_2^*}{f_2^*}\right| = \dots = \left|\frac{f_m - f_m^*}{f_m^*}\right|,$$

где $f_k^*$ – экстремальное значение целевой функции $f_k$ $(k=\overline{1,m})$.

Если некоторым критериям отдается предпочтение, то в условие равенства отклонений вводятся соответствующие коэффициенты $k_2 > 0$, $k_3 > 0, \ldots, k_m > 0$ (коэффициент $k_1$ считается равным единице). В этом случае соотношение примет вид:

$$\left|\frac{f_1 - f_1^*}{f_1^*}\right| = k_2\left|\frac{f_2 - f_2^*}{f_2^*}\right| = \dots = k_m\left|\frac{f_m - f_m^*}{f_m^*}\right|.$$

Предполагая, например, что все критерии задачи максимизируются, условие равенства отклонений после соответствующих преобразований запишем в виде

$$q_1 f_1 = q_2 f_2;$$
$$q_1 f_1 - q_2 f_2 = 0,$$

где $q_k = 1/f_k^*, k=\overline{1,m};$

$m$ – число критериев задачи.

Для случая, когда один критерий максимизируется, а второй минимизируется, условие равенства отклонений запишется так:

$$q_1 f_1 + q_2 f_2 = 2.$$

Поскольку относительные отклонения для всех критериев равны, для минимизации достаточно взять любое из отклонений. Возьмем, например, отклонение первого критерия

$$\left|\frac{f_1 - f_1^*}{f_1^*}\right|.$$

Чтобы его уменьшить, надо $f_1$ увеличить, приближая его к максимальному значению $f_1^*$. Новая задача, которая называется замещающей, решается на максимум переменной $f_1$. Аналогично решается замещающая задача и по второму критерию.

Для критерия, который минимизируется, например, для третьего, относительное отклонение

$$\left|\frac{f_3 - f_3^*}{f_3^*}\right|$$

будет минимальным, когда $f_3$ окажется приближенным к своему наименьшему значению $f_3^*$, т. е. будет найден минимум функции $f_3$.

В качестве целевой функции можно взять любое из следующих выражений:

$$u = f_1(\max);$$
$$\dots\dots\dots$$
$$u = f_k(\min);$$
$$\dots\dots\dots$$
$$u = f_m(\max).$$

Тогда все остальные требования выполняются автоматически.

Итак, чтобы решить задачу линейного программирования методом равных и наименьших относительных отклонений, необходимо составить так называемую замещающую задачу, т. е. к системе ограничений данной задачи добавить дополнительные условия:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - f_1 = 0;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{j=1}^{n} h_j x_j - f_k = 0;$$

$$q_1 f_1 - q_k f_k = 0;$$

$$q_1 f_1 + q_k f_k = 2.$$

где оптимизируемые критерии $f_1,...,f_k$ включены в число неизвестных.

***Порядок выполнения работы***

1 Ознакомиться с теоретическими сведениями.
2 Решить задачи разными методами (по указанию преподавателя).

***Содержание отчета***

1 Тема и цель работы.
2 Условия задач.
3 Ход решения, результаты.
4 Выводы по работе.

***Контрольные вопросы***

1 Когда применимы методы наименьших и равных отклонений, последовательных уступок, ведущего критерия, линейной комбинации частных критериев?

2 Как составить модель замещающей задачи в методе наименьших и равных отклонений?

3 Почему дополнительное ограничение в методе наименьших и равных отклонений при стремлении обеих функций на минимум (максимум) имеет вид разности равной нулю?

4 Какая функция оптимизируется последней в методе последовательных уступок?

***Задача 1.*** Найти компромиссное решение задачи, считая второй критерий наиболее предпочтительным. Его отклонение от минимального значения 20 %:

$$f_1 = 2x_1 + 4x_2 \text{ (max)};$$

$$f_2 = x_1 + x_2 \text{ (min)};$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 \le 20; \\ 12x_1 + 23x_2 \ge 24; \\ x_1 \le 3; \\ x_2 \le 3; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

***Задача 2.*** Решить задачу методом равных и наименьших отклонений:

$$f_1 = 4x_1 + 2x_2 \text{ (max)};$$
$$f_2 = x_1 + 2x_2 \text{ (max)};$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8; \\ -x_1 + 2x_2 \le 4; \\ x_1 + x_2 \ge 2; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

***Задача 3.*** Решить задачу методом равных и наименьших отклонений:

$$f_1 = 2x_1 + 3x_2 \text{ (max)};$$
$$f_2 = x_1 + 2x_2 - x_3 \text{ (min)};$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 1; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8; \\ -x_1 + 3x_2 \ge 3; \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0; x_3 \ge 0. \end{cases}$$

## 3 Лабораторная работа № 3. Решение задач оптимизации методом динамического программирования

*Цель работы*: ознакомиться с теорией динамического программирования.

***Теоретические сведения***

В основе динамического программирования лежит принцип оптимальности, указывающий на процедуру построения оптимального управления. Так как оптимальной стратегией может быть только та, которая одновременно оптимальна и для любого количества оставшихся шагов, ее можно строить по частям: сначала для последнего этапа, затем для двух последних, для трех и т. д., пока не придем к первому шагу. Отсюда принцип оптимальности связан со вторым принципом – принципом погружения, согласно которому при решении исходной задачи ее как бы погружают в семейство подобных ей и решают для одного последнего этапа, для двух последних и т. д., пока не получат решение исходной задачи.

Будем считать, что начальное $X_0$ и конечное $X_T$ состояния системы заданы. Обозначим через $Z_1(X_0,u_1)$ значение функции цели на первом этапе при начальном состоянии системы $X_0$ и при управлении $u_1$, через $Z_2(X_1, u_2)$ – соответствующее значение функции цели на втором этапе, через $Z_N(X_{N-1},u_N)$ – на $N$-м этапе.

Тогда значение целевой функции для всего процесса

$$Z = \sum_{i=1}^{N} Z_i(X_{i-1}, u_i).$$

Надо найти оптимальное управление $u^* = (u^*_1; u^*_2, ...; u^*_N)$ такое, что доставляет экстремум целевой функции.

Для решения этой задачи погружаем ее в семейство подобных. Введем обозначения. Пусть $D_N$, $D_{N-1,N}$,.. – соответственно области определения для подобных задач на последнем этапе, двух последних и т. д. $D$ – область определения исходной задачи.

Обозначим через $F_1(X_{N-1})$, $F_2(X_{N-2})$,…,$F_N(X_0)$ соответственно условно-оптимальные значения функции цели на последнем этапе, двух последних и т. д. на всех $N$ этапах.

Начинаем с последнего этапа. Пусть $X_{N-1}$ – возможные состояния системы на начало $N$-го этапа. Условно-оптимальные значения целевой функции:

– для последнего этапа:

$$F_1(X_{N-1}) = \max_{u_N \in D_N}(\min)\, Z_N(X_{N-1}, u_N);$$

– для двух последних этапов:

$$F_2(X_{N-2}) = \max_{u_{N-1} \in D_{N,N-1}}(\min)\,(Z_{N-1}(X_{N-2}, u_{N-1}) + F_1(X_{N-1}));$$

– аналогично:

$$F_N(X_0) = \max_{u_1 \in D}(\min)\,(Z_1(X_0, u_1) + F_{N-1}(X_1)).$$

Последнее выражение представляет собой математическую запись принципа оптимальности. Все выражения называются *функциональными уравнениями Беллмана.* Отчетливо просматривается их рекуррентный (возвратный) характер, т. е. для нахождения оптимального управления на $N$ шагах нужно знать условно-оптимальное управление на предшествующих $N$ – 1 этапах и т. д. Поэтому функциональные уравнения часто называют *рекуррентными* (*возвратными*) *соотношениями Беллмана.*

### ***Порядок выполнения работы***

1 Ознакомится с методическими указаниями.
2 Решить задачи (*n* задает преподаватель).

### ***Содержание отчета***

1 Тема и цель работы.
2 Условия задач.
3 Результаты решения.
4 Выводы по работе.

***Контрольные вопросы***

1 Какие задачи относятся к задачам динамического программирования?

2 Сформулируйте принцип оптимальности Беллмана.

3 Как выписать ответ при решении задачи об оптимальном распределении кредита (об оптимальном вложении инвестиций)?

4 Всегда ли задача о замене оборудования имеет решение?

***Задача 1.*** На данной сети дорог имеется несколько маршрутов, по которым можно доставлять груз из пункта 1 в пункт 10 (рисунок 3.1). Известны стоимости перевозки единицы груза между пунктами сети. Требуется найти на сети наиболее экономичный маршрут доставки груза из пункта 1 в пункт 10 и соответствующие ему затраты.

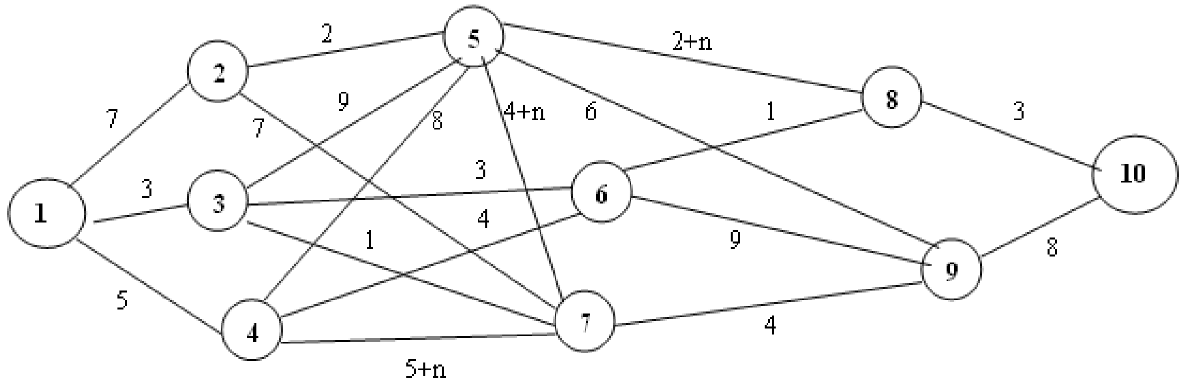


Рисунок 3.1 – Графическое изображение сети дорог

***Задача 2.*** Производственному объединению из четырех предприятий выделяется банковский кредит в сумме 100 млн ден. ед. для реконструкции и модернизации производства с целью увеличения выпуска продукции. Значения $g_i(x_i)$ ($i$ = 1,2,3,4) дополнительного дохода, получаемого на предприятиях объединения в зависимости от выделенной суммы, приведены в таблице 3.1. Распределить выделенный кредит между предприятиями так, чтобы дополнительный доход объединения был максимальным.

Таблица 3.1 – Исходные данные к задаче 2

| Средства *c*, тыс. ден. ед. | Предприятие | | | |
|---|---|---|---|---|
| | № 1 | № 2 | № 3 | № 4 |
| | Прирост, тыс. ден. ед. | | | |
| | $g_1(x)$ | $g_2(x)$ | $g_3(x)$ | $g_4(x)$ |
| 20 | 9 + *n* | 11+*n* | 48 + n | 13 + *n* |
| 40 | 18 + *n* | 19+*n* | 37 + *n* | 27 + *n* |
| 60 | 24 + *n* | 30 + *n* | 40 + *n* | 44 + *n* |
| 80 | 38 + *n* | 44 + *n* | 57 + *n* | 69 + *n* |
| 100 | 50 + *n* | 59 + *n* | 70 + *n* | 73 + *n* |

# 4 Лабораторная работа № 4. Решение задач оптимизации на основе моделей игрового программирования

*Цель работы*: ознакомиться с теорией матричных игр.

***Теоретические сведения***

При решении ряда практических задач исследования операций приходится анализировать ситуации, когда, наряду с неопределенностью, сопровождающей какую-то операцию, приходится сталкиваться с сознательным противодействием, и результат зависит от того, какой образ действий выберет противник. Такие ситуации будем называть *конфликтными*.

*Платежная матрица.*

Рассмотрим игру, в которой игрок $A$ имеет $m$ стратегий, а игрок $B$ («противник») – $n$ стратегий. Такая игра называется игрой $m \times n$. Наши стратегии будем обозначать $A_1, A_2, \ldots, A_m$, противника – $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Предположим, что каждая сторона выбрала определенную стратегию: мы выбрали $A_i$ противник $B_j$. Выбор стратегии однозначно определяет исход игры – наш выигрыш, обозначим его $a_{ij}$.

Предположим, что нам известны значения $a_{ij}$ для каждой пары стратегий. Эти значения можно записать в виде прямоугольной таблицы (таблица 4.1). Такая таблица называется платежной матрицей.

Таблица 4.1 – Платежная матрица

| Стратегия игрока $A$ | Стратегия игрока $B$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | … | $B_n$ |
| $A_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1n}$ |
| $A_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2n}$ |
| | … | … | … | … |
| $A_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | … | $a_{mn}$ |

*Нижняя и верхняя цена игры.*

Числа $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$ – минимально возможный выигрыш игрока $A$, применяющего стратегию $A_i \ (i = \overline{1,m})$, и $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$ – максимально возможный проигрыш игрока $B$, если он пользуется стратегией $B_j \ (j = \overline{1,n})$.

Число $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$ называют *нижней чистой ценой игры* (максимином), а соответствующую ему чистую стратегию – максиминной.

Число $\alpha$ показывает, какой минимальный гарантированный выигрыш может получить игрок $A$, правильно применяя свои чистые стратегии при любых действиях игрока $B$.

Число $\beta = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$ называют *верхней чистой ценой игры* (минимаксом), а соответствующую чистую стратегию минимаксной.

Число $\beta$ показывает, какой минимальный гарантированный проигрыш может быть у игрока *B*, при правильном выборе им своих чистых стратегии независимо от действий игрока *A*.

Ясно, что $\alpha \le \beta$.

Если $\alpha = \beta$, то говорят, что игра имеет седловую точку в чистых стратегиях и чистую цену игры $v = \alpha = \beta$. Стратегии, образующие седловую точку, являются оптимальными. Тройку ( $A_i^*; B_j^*; v$ ) называют решением игры.

*Смешанные стратегии.*

Для игр без седловых точек оптимальные стратегии игроков находятся в области смешанных стратегий.

Смешанной стратегией игрока *A* называют вектор $\overline{p} = (p_1, p_2 \ldots, p_m)$, компоненты которого удовлетворяют условиям $p_i \ge 0 \quad (i = \overline{1,m}); \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Смешанной стратегией игрока *B* называют вектор $\overline{q} = (q_1, q_2 \ldots, q_n)$, компоненты которого удовлетворяют условиям $q_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,n}); \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

$p_i$ и $q_j$ – вероятности, с которыми игроки *A* и *B* выбирают свои чистые стратегии $A_i$ и $B_j$ в ходе игры.

При использовании смешанных стратегий игра приобретает случайный характер, случайной становится и величина выигрыша игрока *A* (проигрыша игрока *B*). Эта величина является функцией смешанных стратегий $\overline{p}$ и $\overline{q}$ и определяется по формуле $f(\overline{p}, \overline{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$ .

Функцию $f(\overline{p}, \overline{q})$ называют функцией выигрыша или платежной функцией.

Смешанные стратегии называются оптимальными, если они образуют седловую точку для платежной функции $f(\overline{p}, \overline{q})$, т. е. если они удовлетворяют неравенству $f(\overline{p}, \overline{q}^*) \le f(\overline{p}^*, \overline{q}^*) \le f(\overline{p}^*, \overline{q})$.

Величину $f(\overline{p}^*, \overline{q}^*) = v$ называют ценой игры.

Поиск оптимальных смешанных стратегий начинают с упрощения платежной матрицы. Если в платежной матрице элементы *k*-й строки не меньше соответствующих элементов *s*-й строки, т. е. $a_{kj} \ge a_{sj}$ $(j = \overline{1,n})$, то говорят, что стратегия $A_k$ доминирует над стратегией $A_s$. Аналогично, если элементы *l*-го столбца не превосходят соответствующих элементов *r*-го столбца, т. е. $a_{il} \le a_{ir}$ $(i = \overline{1,m})$, то говорят, что стратегия $B_l$ доминирует над стратегией $B_r$. Частным случаем доминирования стратегий является дублирование стратегий, когда $a_{kj} = a_{sj}$ $(j = \overline{1,n})$ или $a_{il} = a_{ir}$ $(i = \overline{1,m})$. Исключение из платежной матрицы доминируемых стратегий (ими игрокам пользоваться заведомо невыгодно) позволяет уменьшить ее размерность, а это упрощает решение игры. Вероятность применения доминируемых стратегий равна нулю.

Оптимальные смешанные стратегии $\overline{p}^*$ и $\overline{q}^*$ в игре с платежной матрицей $\lfloor a_{ij} \rfloor_{m\times n}$ и ценой $v$ остаются оптимальными и для игры с платежной матрицей $\lfloor ba_{ij} + c \rfloor_{m\times n}$ (где $b > 0$) и ценой $bv + c$. На этом основании платежную матрицу можно всегда преобразовать так, что ее элементы будут целыми неотрицательными числами, а это упрощает расчеты.

**Методы решения матричных игр.**

*Решение матричной игры сведением к задаче линейного программирования.*

Оптимальные смешанные стратегии $\overline{p}^* = (p_1^*, p_2^* \ldots, p_m^*)$ и $\overline{q}^* = (q_1^*, q_2^* \ldots, q_n^*)$ игроков А и В могут быть найдены в результате решения пары двойственных задач линейного программирования.

Для игрока *A*

$$\left.\begin{aligned} & f = \sum_{i=1}^{m} x_i \quad (\min); \\ & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq 1 \; (j = \overline{1,n}); \\ & x_i \geq 0 \; (i = \overline{1,m}). \end{aligned}\right\}$$

В результате решения задачи находятся оптимальный вектор $\overline{x}^* = (x_1^*, x_2^* \ldots, x_m^*)$ и $f^* = f_{\min}$, а затем $v = 1/f_{\min}$; $p_i^* = vx_i^* \quad (i = \overline{1,m})$.

Для игрока *B*

$$\left.\begin{aligned} & z = \sum_{j=1}^{n} y_j \quad (\max); \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq 1 \; (i = \overline{1,m}); \\ & y_j \geq 0 \; (j = \overline{1,n}). \end{aligned}\right\}$$

Решая задачу, находят оптимальный вектор $\overline{y}^* = (y_1^*, y_2^* \ldots, y_n^*)$ и $z^* = z_{\max}$, а затем $v = 1/z_{\max}$; $q_j^* = vy_j^* \quad (j = \overline{1,n})$.

*Решение игр с природой по различным критериям.*

Будем предполагать, что в игре с природой сознательный игрок *A* может использовать *m* чистых стратегий $A_1, A_2, \ldots, A_m$, а природа *П* может реализовывать $n$ различных состояний $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_n$. Игроку *A* могут быть известны вероятности $q_1, q_2, \ldots, q_n$, с которыми природа реализует свои состояния, но он может и не знать их. Действуя против природы, игрок *A* имеет возможность использовать как чистые стратегии $A_i$ так и смешанные стратегии $\overline{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$. Если игрок *А* в состоянии оценить (величиной $a_{ij}$) последствия применения каждой своей чистой стратегии $A_i$ при любом состоянии $П_j$ природы, то игру можно задать матрицей (см. таблицу 4.1).

Поскольку игры с природой являются частным видом парных матричных игр, то вся теория стратегических игр переносится и на игры с природой. Однако игры с природой обладают и некоторыми особенностями. Например, при упрощении платежной матрицы отбрасывать те или иные состояния природы нельзя, т. к. она может реализовать любое состояние независимо от того, выгодно оно игроку *А* или нет. Другая особенность состоит в том, что решение достаточно найти только для игрока *А*, поскольку природа наши рекомендации воспринять не может. И ещё одна важная особенность: в играх с природой смешанные стратегии имеют ограниченное (главным образом теоретическое) значение: не всегда можно для них найти форму, удобную для использования в реальной обстановке. Смешанные стратегии приобретают смысл только при многократном повторении игры. В свете последнего замечания более естественными в играх с природой являются рекомендации в чистых стратегиях игрока *А*.

С учетом отмеченных особенностей сформулирован ряд критериев, которыми пользуются при выборе оптимальных стратегий игрока *А* в ситуациях, моделирующихся в игры с природой. Эти критерии основываются на здравом смысле, интуиции и практической целесообразности. Они дают некоторую логическую схему принятия решения. Критерии позволяют последовательным численным анализом ситуации с разных точек зрения оценить принимаемое решение и высказать рекомендации по тому или иному образу действий и тем самым выбрать что-то определенное. Если рекомендации, вытекающие из различных критериев, совпадают, принимается рекомендуемое решение. Если же рекомендации критериев противоречат друг другу, то необходимо сравнить, насколько значительно отличаются результаты по разным критериям, привлечь дополнительную информацию и сделать окончательный выбор.

При выборе оптимальной стратегии игрока *А* опираются как на платежную матрицу, так и на матрицу рисков. *Риском* $r_{ij}$ *игрока А*, когда он пользуется чистой стратегией $A_i$ при состоянии $П_j$ природы, называется разность между максимальным выигрышем, который он мог бы получить, если бы достоверно знал, что природой будет реализовано именно состояние $П_j$, и тем выигрышем, который он получит, используя стратегию $A_i$ в неведении о том, какое же состояние $П_j$ природа реализует. Таким образом, элементы $r_{ij}$ матрицы рисков определяются по формуле $r_{ij} = \beta_j - a_{ij} \ge 0$, где $\beta_j$ – максимально возможный выигрыш игрока *А* при состоянии $П_j$ (максимальный элемент *j*-го столбца платежной матрицы, т. е. $\beta_j = \max_i a_{ij}$). Итак, исследуя платежную матрицу, мы стремимся выбрать такое решение, чтобы выигрыш игрока *А* максимизировался, а анализируя матрицу рисков, стараемся минимизировать неизбежный риск, сопровождающий выбор решения.

Если вероятности $q_j$ состояний $П_j$ природы известны, то пользуются *критерием Байеса*, в соответствии с которым оптимальной считается чистая стратегия $A_i$, при которой максимизируется средний выигрыш $\bar{a}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$ игрока *А*, т. е. обеспечивается

$$\max_i \bar{a}_i = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j .$$

Если игроку *А* представляются в равной мере правдоподобными все состояния $П_j$ природы, то иногда полагают $q_1 = \ldots = q_n = 1/n$ и, учитывая «принцип недостаточного основания» *Лапласа*, оптимальной считают чистую стратегию $A_i$, обеспечивающую

$$\max_i \bar{a}_i = \frac{1}{n} \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} .$$

Если вероятности $q_j$ состояний совсем неизвестны и нельзя сделать о них никаких предположений, то пользуются критериями Вальда, Сэвиджа и Гурвица.

Оптимальной по *критерию Вальда* считается чистая стратегия $A_i$, при которой наименьший выигрыш игрока *А* будет максимальным, т. е. ему обеспечивается $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$. В соответствии с этим критерием игра ведется как с разумным партнером, противодействующим игроку *А* в достижении успеха. Критерий рекомендует игроку *А* ожидать наихудшего результата и в этом предположении искать наиболее благоприятный исход (выигрыш), который совпадает с нижней чистой ценой игры. Критерий Вальда выражает позицию крайнего пессимизма, и принимаемое решение носит заведомо перестраховочный характер. Однако этот критерий имеет право на применение в практике вместе с другими критериями, оценивающими исследуемую ситуацию с других точек зрения.

Оптимальной по *критерию Сэвиджа* считается та чистая стратегия $A_i$, при которой минимизируется величина $r_{ij}$ максимального риска, т. е. обеспечивается $\min_i \max_j r_{ij}$. Таким образом, критерий Сэвиджа советует ориентироваться не на выигрыш, а на риск. Это тоже критерий крайнего пессимизма, но здесь пессимизм понимается в ином свете: рекомендуется всячески избегать большого риска при принятии решения.

Оптимальной по *критерию Гурвица* считается чистая стратегия $A_i$, найденная из условия

$$\max_i (\gamma \min_j a_{ij} + (1-\gamma) \max_j a_{ij}),$$

где $\gamma$ принадлежит интервалу (0; 1) и выбирается из субъективных соображений. При $\gamma = 1$ критерий Гурвица превращается в критерий Вальда, при $\gamma = 0$ – в критерий крайнего оптимизма, когда рекомендуется выбирать стратегию, обеспечивающую самый большой выигрыш. В связи с этим критерий Гурвица называют критерием пессимизма-оптимизма. При $0 < \gamma < 1$ получается нечто среднее между тем и другим. Чем ответственнее ситуация, чем больше стремление подстраховаться в ней и не рисковать без должных оснований, тем ближе к единице выбирается коэффициент пессимизма $\gamma$.

***Порядок выполнения работы***

1 Ознакомится с методическими указаниями.
2 Решить задачи (*n* задает преподаватель).

***Содержание отчета***

1 Тема и цель работы.
2 Условия задач.
3 Результаты решения.
4 Выводы по работе.

***Контрольные вопросы***

1 Какие критерии определения оптимальной стратегии в играх с природой известны?
2 Как перейти от платежной матрицы к задаче линейного программирования?
3 В каких случаях применяются критерии Лапласа, Байеса?
4 Как упрощается платежная матрица?

***Задача 1.*** Решить матричную игру сведением к задаче линейного программирования:

$$\begin{bmatrix} 4+0,1n & -2 & 0 \\ 0 & 1+0,1n & 2 \\ -3 & 3+0,1n & -1 \end{bmatrix}$$

***Задача 2.*** Произвести возможные упрощения платежной матрицы и найти решение игры, используя графический метод решения:

$$\begin{bmatrix} 3+0,1n & 1+0,1n & 5+0,1n & 4+0,1n \\ 6+0,1n & 6+0,1n & 2+0,1n & 0,1n \\ 4+0,1n & 2+0,1n & 7+0,1n & 6+0,1n \\ 5+0,1n & 3+0,1n & 5+0,1n & 5+0,1n \end{bmatrix}$$

***Задача 3.*** Объём реализации товара *T* за рассматриваемый период времени, колеблется в зависимости от уровня покупательского спроса в пределах от [4 + 0,1*n*] до [7 + 0,1*n*] ед. Прибыль торгового предприятия от единицы реализованного товара $T$ равна $2 + 0{,}1n$ ден. ед. Если заранее запасенного товара окажется недостаточно для полного удовлетворения спроса в рассматриваемый период, можно заказать дополнительное количество товара, что потребует новых затрат на заказ и доставку в размере $4 + 0{,}1n$ ден. ед. в расчете на единицу товара. При этом предполагается, что дополнительно заказанный товар доставляется и полностью реализуется в тот же период времени. Если же запасенный заранее товар полностью реализовать не удастся, то расходы на содержание и хранение остатка в рассматриваемом периоде составят $3 + 0{,}1n$ ден. ед. в расчете на единицу товара. На основе анализа платежной матрицы по критериям Вальда, Сэвиджа, Лапласа и Гурвица ($\gamma = 0{,}7$) высказать рекомендации об оптимальном уровне запаса товара $T$ на торговом предприятии, обеспечивающем ему наивысшую эффективность работы с учетом торговой прибыли и возможных дополнительных затрат на заказ и доставку товара, содержание и хранение остатка ($[x]$ – целая часть числа).

# 5 Лабораторная работа № 5. Решение задач оптимизации на основе метода экспертных оценок

*Цель работы*: сформировать умения использовать основные экспертные методы.

***Теоретические сведения***

Методы экспертного анализа (экспертных оценок) предназначены в основном для решения неструктурированных задач. Эти методы могут применяться и для решения задач других видов, если математическое описание (формализация) задачи невозможно или очень сложно.

Метод Саати – наиболее известный и получивший наибольшее практическое применение метод парных сравнений, он основан на сравнении альтернатив, выполняемом одним экспертом. Для каждой пары альтернатив эксперт указывает, в какой степени одна из них предпочтительнее другой.

***Пример 1*** **–** Предприятие выбирает основной вид рекламы для новой продукции. Предлагаются четыре возможных вида: реклама на телевидении (обозначим ее как $A_1$), на радио ($A_2$), в газете ($A_3$), на стендах ($A_4$). Решение о выборе вида рекламы принимается на основе консультации с экспертом.

Решение на основе метода Саати принимается в следующем порядке. Экспертом заполняется матрица парных сравнений размером $N \times N$ ($N$ – количество альтернатив) по правилам, приведенным в таблице 5.1.

Таблица 5.1 – Правила заполнения матрицы парных сравнений по методу Саати

| *Xij* | Значение |
|---|---|
| 1 | $i$-я и $j$-я альтернативы примерно равноценны |
| 3 | $i$-я альтернатива немного предпочтительнее $j$-й |
| 5 | $i$-я альтернатива предпочтительнее $j$-й |
| 7 | $i$-я альтернатива значительно предпочтительнее $j$-й |
| 9 | $i$-я альтернатива явно намного предпочтительнее $j$-й |

Если $i$-я альтернатива менее предпочтительна, чем $j$-я, то указываются обратные оценки (1/3, 1/5, 1/7, 1/9). Можно ставить промежуточные оценки, например, 1/6. На главной диагонали ставятся единицы.

Пусть эксперт заполнил матрицу парных сравнений (таблица 5.2).

Таблица 5.2 – Матрица парных сравнений

| Альтернатива | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1 | 7 | 3 | 9 |
| $A_2$ | 1/7 | 1 | 1/5 | 3 |
| $A_3$ | 1/3 | 5 | 1 | 5 |
| $A_4$ | 1/9 | 1/3 | 1/5 | 1 |

Элемент $X_{14}$ = 9 означает, что реклама на телевидении, по мнению эксперта, явно более эффективна, чем реклама на стендах. Элемент $X_{23}$ = 1/5 означает, что реклама на радио менее эффективна, чем реклама в газетах. Элемент $X_{24}$ = 3 означает, что реклама на радио немного более эффективна, чем на стендах.

Далее находятся цены альтернатив $C_i$ как средние геометрические строк матрицы $C_i = \sqrt[N]{\prod_{j=1}^{N} X_{ij}}, i = 1,...,N$, когда элементы строки перемножаются и из их произведения извлекается корень $N$-й степени.

$$C_1 = \sqrt[4]{1 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 9} = 3,71;\ C_2 = \sqrt[4]{\frac{1}{7} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{5}} = 0,54;\ C_3 = 1,7;\ C_4 = 0,29.$$

Находится сумма $C$ цен альтернатив как $C$ = 3,71+ 0,54 + 1,7 + 0,29 = 6,24.

Вычисляются веса $V_i$ альтернатив:

$V_1$ = 3,71/6,24 = 0,595; $V_3$ = 1,7/6,24 = 0,272;
$V_2$ = 0,4/6,24 = 0,087; $V_4$ = 0,29/6,24 = 0,047.

Наиболее предпочтительной является альтернатива, имеющая максимальный вес. Таким образом, по мнению эксперта, наиболее эффективной является реклама на телевидении, следующая за ней – реклама в газетах, менее эффективна реклама на радио, наименее эффективна реклама на стендах.

*Проверка экспертных оценок на непротиворечивость*.

Проверка позволяет выявить ошибки, которые мог допустить эксперт при заполнении матрицы парных сравнений. Ошибки (противоречия) могут быть следующими: например, эксперт указывает, что альтернатива $A1$ хуже, чем $A2$, а альтернатива $A2$ хуже, чем $A3$; но при этом эксперт указывает также, что $A1$ лучше, чем $A3$. Возможны также ошибки следующего вида: эксперт указывает, что альтернатива $A1$ значительно хуже, чем $A2$, а альтернатива $A2$ значительно хуже, чем $A3$, но при этом эксперт указывает также, что $A1$ лишь немного хуже, чем $A3$.

Рассмотрим проверку на непротиворечивость для задачи о выборе вида рекламы. Сначала находятся суммы столбцов матрицы парных сравнений

$$R_j = \sum_{i=1}^{N} X_{ij},\ j = 1,\ldots,N.$$

$R_1$= (1 + 1/7 + 1/3 + 1/9) = 1,588; $R_2$= 13,333; $R_3$ = 4,4; $R_4$ = 18.

Рассчитывается вспомогательная величина λ путем суммирования произведений сумм столбцов матрицы на веса альтернатив: λ = $\sum_{j=1}^{N} R_j \cdot V_j$ .

λ = 1,588 · 0,594 + 13,333 · 0,087 + 4,4 · 0,272 + 18 · 0,047 = 3,84.

Затем находится индекс согласованности: $ИС = \dfrac{\lambda - N}{N-1}$.

Для данного примера *ИС* = (3,84 – 4) / (4 – 1) = – 0,053.

В зависимости от размерности матрицы парных сравнений берется величина случайной согласованности *СлС* из таблицы 5.3.

Таблица 5.3 – Величины случайной согласованности

| Размерность матрицы | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *СлС* | 0,58 | 0,90 | 1,12 | 1,24 | 1,32 | 1,41 | 1,45 | 1,49 |

Находится отношение согласованности: *ОС* = *ИС* / *СлС*.

Если отношение согласованности превышает 0,2, то требуется уточнение матрицы парных сравнений. В данном примере *ОС* = 0,023/0,9 = 0,024.

Таким образом, уточнение экспертных оценок в данном случае не требуется.

*Метод предпочтений.*

Метод основан на ранжировании альтернатив, выполняемом группой экспертов. Каждый из экспертов независимо от других указывает, какая из альтернатив, по его мнению, является лучшей, какая – следующей за ней и т. д.

***Пример 2*** **–** Оценить с помощью четырех экспертов влияние на рост производительности труда следующих факторов:

– уровень профессиональной подготовки сотрудников (фактор *A*1);
– соблюдение производственной дисциплины (*A*2);
– материальные стимулы (*A*3);
– организация соревнования (*A*4);
– техническое перевооружение (*A*5).

Шаг 1. Каждый эксперт выполняет ранжирование альтернатив по предпочтению: присваивает номер «1» фактору, который (по его мнению) оказывает наибольшее влияние на рост производительности труда; номер «2» – следующему по важности фактору и т. д. Оценки экспертов сводятся в матрицу размером $M \times N$, где $M$ – количество экспертов, $N$ – количество альтернатив. Обозначим эти оценки как $X_{ij}$, $i = 1, \ldots, M$; $j = 1, \ldots, N$.

Пусть экспертами составлена некая матрица оценок (таблица 5.4).

Таблица 5.4 – Матрица экспертных оценок для метода предпочтений

| Эксперт | Альтернатива (фактор) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | *А*1 | *А*2 | *А*3 | *А*4 | *А*5 |
| 1 | 2 | 1 | 3 | 5 | 4 |
| 2 | 2 | 3 | 1 | 5 | 4 |
| 3 | 1 | 3 | 2 | 5 | 4 |
| 4 | 2 | 1 | 4 | 5 | 3 |

Здесь, например, первый эксперт считает, что наибольшее влияние на рост производительности труда может оказать соблюдение дисциплины; следующий по важности фактор – уровень профессиональной подготовки, затем – материальные стимулы, техническое перевооружение, организация соревнования.

Шаг 2. Нужно произвести преобразование матрицы оценок по формуле $B_{ij} = N - X_{ij}$, $i = 1, ..., M$; $j = 1, ..., N$. Каждая экспертная оценка вычитается из количества альтернатив (таблица 5.5).

Таблица 5.5 – Преобразованная матрица экспертных оценок для метода предпочтений

| Эксперт | Альтернатива (фактор) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | *А*1 | *А*2 | *А*3 | *А*4 | *А*5 |
| 1 | 3 | 4 | 2 | 0 | 1 |
| 2 | 3 | 2 | 4 | 0 | 1 |
| 3 | 4 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 4 | 3 | 4 | 1 | 0 | 2 |

Шаг 3. Далее находятся суммы $C_j$ преобразованных оценок по каждой из альтернатив по формуле $C_j = \sum_{i=1}^{M} B_{ij}, \ j = 1, ..., N$.

$$C_1 = 3 + 3 + 4 + 3 = 13;\ C_2 = 4 + 2 + 2 + 4 = 12;\ C_3 = 10;\ C_4 = 0;\ C_5 = 5.$$

Шаг 4. Для нахождения весов $V_j$ альтернатив используем формулу $V_j = \dfrac{c_j}{C}$.

Получаем $V_1 = 13/40 = 0{,}325$; $V_2 = 12/40 = 0{,}3$; $V_3 = 10/40 = 0{,}25$; $V_4 = 0/40 = 0$; $V_5 = 5/40 = 0{,}125$.

Самым важным фактором, влияющим на производительность труда, является уровень профессиональной подготовки рабочих) – *А*1 (у него наибольший вес, по мнению экспертов); следующий по важности фактор – *А*2; следующий по важности – *А*3; еще менее важный – *А*5; наименее важный фактор – *А*4.

*Проверка согласованности экспертных оценок*.

Проверка согласованности необходима, чтобы выяснить, не было ли резких различий в суждениях экспертов. Если мнения экспертов резко различаются, то следует выявить причины таких различий и, возможно, уточнить некоторые оценки. Для проверки согласованности мнений экспертов вычисляется величина, называемая коэффициентом конкордации *W*. Ее расчет выполняется в следующем порядке: сначала находятся суммы $S_j$ оценок, указанных экспертами для каждой из альтернатив:

$$S_1 = 2 + 2 + 1 + 2 = 7;\ S_2 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8;\ S_3 = 10;\ S_4 = 20;\ S_5 = 15.$$

Находятся первая вспомогательная величина $A = M \cdot (N+1)/2$ и вторая вспомогательная величина $S = \sum_{j=1}^{M}(S_j - A)^2,\ j = 1, ..., N.$

Для данного примера $A = 4 \cdot (5 + 1)/2 = 12$;

$$S = (7 - 12)^2 + (8 - 12)^2 + (10 - 12)^2 + (20 - 12)^2 + (15 - 12)^2 = 118.$$

Коэффициент конкордации находится по формуле: $W = \frac{12 \cdot S}{M^2 \cdot N \cdot (N^2 - 1)}$, причем при $W \geq 0{,}5$ степень согласованности экспертных оценок достаточная, а при $W < 0{,}5$ требуется уточнение и согласование экспертных оценок.

В примере $W = 12 \cdot 118 / (16 \cdot 5 \cdot 24) = 0{,}7375$.

Таким образом, мнения экспертов достаточно близки друг к другу.

*Метод ранга.*

Метод основан на балльных оценках альтернатив, указываемых несколькими экспертами: каждый из экспертов независимо от других оценивает альтернативы по некоторой шкале (обычно 10-балльной). Чем более предпочтительной (по мнению эксперта) является альтернатива, тем более высокий балл для нее указывается.

***Пример 3*** **–** Рассмотрим применение метода ранга для решения задачи из примера 2 (оценка влияния факторов на производительность труда).

Шаг 1. Каждый эксперт указывает оценки альтернатив по 10-балльной шкале. Оценки, указанные экспертами, сводятся в матрицу размером $M \times N$, где $M$ – число экспертов, $N$ – число альтернатив (таблица 5.6). Обозначим эти оценки как $X_{ij}$, $i = 1, ..., M$, $j = 1, ..., N$

Таблица 5.6 – Матрица экспертных оценок для метода ранга

| Эксперт | Альтернатива (фактор) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | *A*1 | *A*2 | *A*3 | *A*4 | *A*5 |
| 1 | 10 | 10 | 7 | 2 | 6 |
| 2 | 10 | 9 | 10 | 4 | 6 |
| 3 | 10 | 8 | 10 | 3 | 7 |
| 4 | 9 | 10 | 6 | 2 | 9 |

Например, первый эксперт считает, что наибольшее влияние на производительность труда оказывают факторы *A*1 и *A*2; менее важный фактор *A*3; еще менее важный *A*5; значительно менее важный *A*4.

Шаг 2. Находятся суммарные оценки $C_j$ альтернатив всеми экспертами:

$$C_1 = 10 + 10 + 10 + 9 = 39;\ C_2 = 10 + 9 + 8 + 10 = 37;\ C_3 = 33;\ C_4 = 11;\ C_5 = 28.$$

Шаг 3. Находятся веса альтернатив по формуле $V_j = \frac{c_j}{C}$, где $C = \sum_{j=1}^{N} c_j$.

В данном примере $V_1 = 39/148 = 0{,}26$; $V_2 = 37/148 = 0{,}25$; $V_3 = 33/148 = 0{,}22$; $V_4 = 11/148 = 0{,}07$; $V_5 = 28/148 = 0{,}19$.

Таким образом, ранжирование факторов (по убыванию значимости) следующее: $A1$, $A2$, $A3$, $A5$, $A4$.

*Проверка согласованности экспертных оценок*.

Как и для метода предпочтений, нужна проверка согласованности экспертных оценок. Расчет выполняется в следующем порядке: сначала находятся средние оценки каждой альтернативы:

$$\overline{X_j} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} X_{ij},\ j = 1,\ldots,N.$$

$\overline{X_1} = 39/4 = 9{,}75$; $\overline{X_2} = 37/4 = 9{,}25$; $\overline{X_3} = 33/4 = 8{,}25$; $\overline{X_4} = 11/4 = 2{,}75$; $\overline{X_5} = 7$.

$D_{Э1}$ показывает отклонение оценок, указанных $i$-м экспертом для альтернатив, от средних оценок этих альтернатив. Чем больше эта величина, тем больше отличие мнения $i$-го эксперта от остальных экспертов.

В данном примере

$$D_{Э1} = \frac{1}{4}((10-9{,}75)^2 + (10-9{,}25)^2 + (7-8{,}25)^2 + (2-2{,}75)^2 + (6-7)^2) = 0{,}25;$$

$$D_{Э2} = \frac{1}{4}((10-9{,}75)^2 + (9-9{,}25)^2 + (10-8{,}25)^2 + (4-2{,}75)^2 + (6-7)^2) = 0{,}25;$$

$$D_{Э3} = 1{,}19;\ D_{Э4} = 2{,}69.$$

На следующем шаге находятся дисперсии оценок каждой альтернативы:

$$D_{aj} = \frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{M}(X_{ij} - X_j)^2,\ j = 1,\ldots,N.$$

Эта величина показывает различие оценок, указанных экспертами для $j$-й альтернативы. Чем больше эта величина, тем больше расхождение мнений экспертов в отношении данной альтернативы.

В данном примере

$$D_{a1} = \frac{1}{3}((10-9{,}75)^2 + (10-9{,}75)^2 + (10-9{,}75)^2 + (9-9{,}75)^2) = 0{,}25;$$

$$D_{a2} = \frac{1}{3}((10-9{,}25)^2 + (9-9{,}25)^2 + (8-9{,}25)^2 + (10-9{,}75)^2) = 0{,}917;$$

$$D_{a3} = 4{,}25;\ D_{a4} = 0{,}917;\ D_{a5} = 2.$$

Если величина $D_{Эi}$ оказывается большой (оценки $i$-го эксперта сильно отличаются от оценок, указанных другими экспертами), то $i$-му эксперту предлагается обосновать свои оценки. Если большой оказывается величина $D_{aj}$ (оценки $j$-й альтернативы у экспертов сильно отличаются), то следует проанализировать причины таких расхождений. В данном примере, возможно, следует предложить обосновать свои оценки четвертому эксперту. Кроме того, следует обратить внимание на разброс оценок третьей альтернативы.

***Порядок выполнения работы***

1 Ознакомится с методическими указаниями.

2 На основе оценок первого эксперта найти веса вариантов решения, используя алгоритм Саати. Выполнить проверку экспертных оценок на непротиворечивость (задача из части I – см. далее).

Выбрать рациональное решение, используя метод предпочтений. Выполнить проверку экспертных оценок на согласованность. При выявлении несогласованности экспертных оценок указать ее причины, т.е. указать, для каких альтернатив имеются существенные различия в указанных экспертами оценках, или какие эксперты указали оценки, существенно отличающиеся от оценок других экспертов (задача из части I – см. далее).

Выбрать рациональное решение, используя метод ранга. Выполнить проверку экспертных оценок на согласованность (задача из части I – см. далее).

3 Запрограммировать методы полного попарного сопоставления и парных сравнений. Язык программирования – на выбор студента (задача из части II – см. далее).

Номера задач из каждой части задает преподаватель.

***Содержание отчета***

1 Тема и цель работы.

2 Условия задач.

3 Выполнение работы (см. Порядок выполнения работы п. 2).

4 Результаты тестирования созданного приложения (см. Порядок выполнения работы п. 3).

5 Выводы по работе.

***Контрольные вопросы***

1 Что показывают дисперсии оценок каждого эксперта, дисперсии оценок каждой альтернативы?

2 В чем суть метода ранга?

3 В чем суть метода предпочтений?

4 В чем состоит метод Саати?

**Часть I**

***Задача 1.*** Для обеспечения связи с отдаленной территорией имеются варианты: запустить спутник связи; приобрести право на использование каналов связи, обеспечиваемых уже имеющимся спутником; построить сеть наземных ретрансляторов; проложить проводную линию связи.

Мнение первого эксперта: лучший вариант – приобретение каналов связи, значительно хуже – запуск спутника, еще немного хуже – строительство сети ретрансляторов, еще хуже – прокладка проводной линии.

Второй эксперт: лучший вариант – запуск спутника, немного хуже – строительство сети ретрансляторов, еще немного хуже – приобретение каналов связи, самый худший вариант – прокладка проводной линии.

Третий эксперт: лучший вариант – приобретение каналов связи, немного хуже – строительство сети ретрансляторов, еще немного хуже – запуск спутника, значительно хуже – прокладка проводной линии.

***Задача 2.*** Район строительства нефтеперерабатывающего предприятия находится вблизи от потребителей продукции, но удален от мест добычи нефти. Возможны следующие варианты действий:

1) организовать танкерные перевозки;
2) доставлять нефть железнодорожным транспортом;
3) построить нефтепровод;
4) отказаться от предлагаемого строительства.

Первый эксперт: лучшее решение – строительство нефтепровода, хуже – танкерные перевозки, еще хуже – отказ от строительства, значительно хуже – железнодорожные перевозки.

Второй эксперт: лучше всего – танкерные перевозки, немного хуже – строительство нефтепровода, значительно хуже – железнодорожные перевозки, еще хуже – отказ от строительства.

Третий эксперт: лучшее решение – строительство нефтепровода, хуже – отказ от строительства, еще хуже – танкерные перевозки, значительно хуже – железнодорожные перевозки.

***Задача 3.*** При работе химического комбината возникают опасные отходы, для решения проблемы предлагается:

1) заключить договор с зарубежным предприятием о вывозе и переработке отходов;
2) построить сооружения для захоронения отходов;
3) построить предприятие по переработке отходов;
4) перепрофилировать комбинат, переведя его на выпуск другой продукции, чтобы было меньше опасных отходов.

Выбор осуществляют три эксперта.

Первый эксперт: лучший вариант – построить предприятие по переработке отходов, хуже – заключить договор о вывозе отходов, еще хуже – построить сооружения для захоронения отходов, значительно хуже – перепрофилировать комбинат.

Второй эксперт: лучший вариант – заключить договор о вывозе отходов, немного хуже – построить сооружения для захоронения отходов, еще немного хуже – построить предприятие по переработке отходов, значительно хуже – перепрофилировать комбинат.

Третий эксперт: лучший вариант – построить предприятие по переработке отходов, хуже – заключить договор о вывозе отходов, значительно хуже – перепрофилировать комбинат, еще хуже – построить сооружения для захоронения отходов.

## Часть II

***Задача 1.*** Компьютерная компания по ремонту автомобилей решает расширить свою деятельность посредством легального импорта автомобилей. Для этого необходимо определить социальную группу, для которой их поставлять и, следовательно, цены и марки автомобилей. Для этого производится маркетинговое исследование населения, результаты которого оценивают четыре эксперта:

$Z_1$ – импортировать дорогие и редкие «заокеанские» автомобили для обеспечения клиентов (2018–2019 гг. выпуска, дорогие запчасти);

$Z_2$ – импортировать дорогие европейские марки (более дешевые запчасти);

$Z_3$ – организовать доставку, ориентируясь на среднюю стоимость (2010–2011 гг. выпуска, дорогие запчасти);

$Z_4$ – закупать доступные автомобили (2005–2009 гг. выпуска).

Определить наиболее предпочтительный вариант.

***Задача 2.*** Компания по производству бытовой техники принимает решение расширить производство, для чего необходимы некоторые денежные средства. Чтобы грамотнее выбрать источник финансирования, директор приглашает группу экспертов из пяти человек, которые оценивают перечисленные варианты:

$Z_1$ – привлечь инвесторов;

$Z_2$ – взять кредит в банке / у финансового консультанта;

$Z_3$ – создать совместное предприятие;

$Z_4$ – выпустить коммерческое предприятие.

Определить наиболее предпочтительный вариант.

***Задача 3.*** Издательство принимает решение о пополнении своего ассортимента за счет нового журнала / газеты. Был проведен анализ существующих изданий, в итоге появились новые идеи, которые были представлены для оценки группе из двух экспертов:

$Z_1$ – разносторонний политический обозреватель;

$Z_2$ – «страны и континенты», туризм, путешествия;

$Z_3$ – экстремальные виды спорта;

$Z_4$ – новинки в сфере искусства (кино, музыка, живопись);

$Z_5$ – трудоустройство.

Определить наиболее предпочтительный вариант.

***Задача 4.*** Руководство компании мобильной связи, желая увеличить количество абонентов, объявило конкурс среди сотрудников на лучшую акцию по достижению поставленной цели. Наиболее перспективные проекты были вынесены на суд двух экспертов:

$Z_1$ – бесплатные разговоры внутри сети;

$Z_2$ – подарки каждому новому (3-му, 4-му, …) абоненту;

$Z_3$ – льготы тем, кто привел друзей;

$Z_4$ – телефоны в рассрочку;

$Z_5$ – каждому новому абоненту – 60 мин звонков на городской телефон бесплатно.

Определить наиболее предпочтительный вариант.

***Задача 5.*** Городское управление решило организовать мероприятие по озеленению центра города. Для этого собирается группа экспертов в составе четырех человек для выбора наилучшего проекта из предложенных:

$Z_1$ – разбить клумбы с цветами;

$Z_2$ – посадить деревья;

$Z_3$ – поставить искусственные деревья;

$Z_4$ – повесить на столбы кашпо с цветами.

Определить наиболее предпочтительный вариант.

***Задача 6.*** Руководство университета выделило деньги на техническое переоснащение аудиторий. Для этого администрация пригласила группу экспертов из пяти человек, которые оценивают ниже перечисленные варианты:

$Z_1$ – купить новые компьютеры;

$Z_2$ – купить новое оборудование в лингвистический кабинет;

$Z_3$ – оснастить аудитории новыми телевизорами.

Определить наиболее предпочтительный вариант.

# 6 Лабораторная работа № 6. Решение задач оптимизации на основе метода анализа иерархий

*Цель работы*: сформировать знания и умения решения слабоструктурированных задач при многих критериях в условиях риска на основе метода анализа иерархий.

***Теоретические сведения***

Рассмотрим метод анализа иерархий на примере.

***Пример –*** Дана задача многокритериального выбора альтернатив: предприятие выбирает место для размещения сервисного центра (СЦ). Имеется возможность выбрать одно из пяти мест (обозначим их *М*1, *М*2, *М*3, *М*4, *М*5).

При выборе учитываются три критерия: затраты, связанные с размещением СЦ; близость к потребителям; удобство связи с предприятием.

Характеристики возможных мест размещения СЦ приведены в таблице 6.1.

При выборе места необходимо учесть, что критерии различны по важности. По мнению руководства предприятия, наиболее важными критериями являются близость к потребителям и затраты (причем критерий «Близость к потребителям» – немного более важный). Значительно менее важный критерий – удобство связи с предприятием.

Таблица 6.1 – Характеристики альтернатив для примера

| Характеристика | *М*1 | *М*2 | *М*3 | *М*4 | *М*5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Затраты, тыс. ден. ед. | 400 | 450 | 1200 | 500 | 500 |
| Близость к потребителям | Близко | Далеко | Очень близко | Близко | Далеко |
| Удобство связи с предприятием | Удобно | Немного лучше, чем для М1 | Очень удобно | Очень удобно | Удобно |

*Выбор множества Парето.*

Выбор множества Парето – это отбор перспективных альтернатив, из которых затем отбирается одна (лучшая) альтернатива.

Множество Парето – это множество альтернатив, обладающих следующим свойством: любая из альтернатив, входящих во множество Парето, хотя бы по одному критерию лучше любой другой альтернативы, входящей в это множество. Ни одна из альтернатив из множества Парето не уступает какой-либо другой альтернативе из этого множества по всем критериям.

Выбор множества Парето производится следующим образом: все альтернативы попарно сравниваются друг с другом по всем критериям. Если при сравнении двух альтернатив (обозначим их как $A_i$ и $A_j$) оказывается, что одна из них (например, $A_j$) не лучше другой ни по одному критерию, то ее ($A_j$) можно исключить из рассмотрения, так как она явно неперспективна.

Выберем множество Парето для примера. Сравним альтернативы *M*1 и *M*2. По критериям «Затраты» и «Близость к потребителям» альтернатива *M*1 лучше, чем *M*2; по критерию «Удобство связи с предприятием» *M*2 лучше, чем *M*1. Таким образом, ни одну из альтернатив исключить нельзя, т. к. по некоторым критериям лучше одна, а по другим – другая.

Сравним *M*1 и *M*3. По критерию «Затраты» лучше *M*1, по двум другим критериям – *M*3. Ни одна из альтернатив не исключается из рассмотрения.

Сравним *M*1 и *M*4. По критерию «Затраты» лучше *M*1, по критерию «Удобство связи с предприятием» – *M*4 (по критерию «Близость к потребителям» альтернативы одинаковы). Ни одна из альтернатив не исключается.

Сравним *M*1 и *M*5. По критериям «Затраты» и «Удобство связи с предприятием» *M*1 лучше, чем *M*5. По критерию «Близость к потребителям» они одинаковы. Таким образом, альтернативу *M*5 следует исключить из рассмотрения, т. к. она явно не лучшая из имеющихся. Сравнивать с *M*5 другие альтернативы (*M*2, *M*3, *M*4) не требуется.

Аналогично сравниваются *M*2 и *M*3, *M*2 и *M*4, *M*3 и *M*4. Ни одна из них не исключается. Таким образом, во множество Парето вошли альтернативы *M*1, *M*2, *M*3, *M*4.Именно из них будет затем выбираться лучшая альтернатива.

*Выбор рационального решения на основе метода анализа иерархий.*

Решим задачу выбора лучшего места для размещения СЦ на основе метода анализа иерархий (называемого также методом Саати).

Решение задачи начинается с ее иерархического представления, включающего все альтернативы и критерии (рисунок 6.1). На первом уровне в этом представлении должен указываться один элемент – выбор (цель). На втором уровне – критерии, по которым делается выбор, на третьем – альтернативы, из которых делается выбор с учетом критериев.

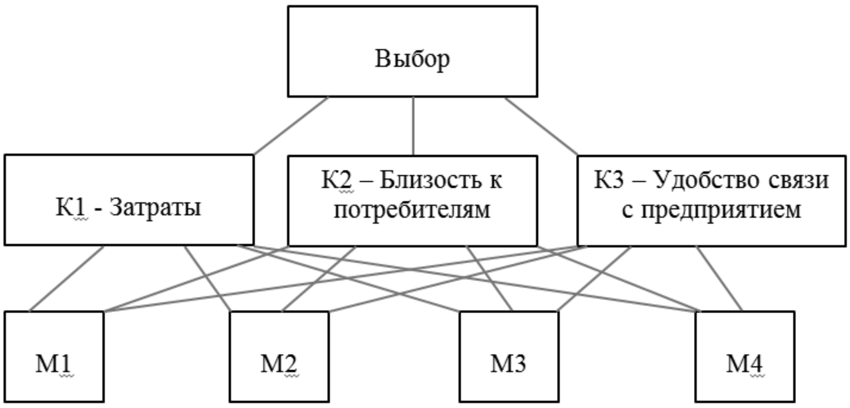


Рисунок 6.1 – Иерархическое представление задачи

Затем выполняется попарное сравнение всех элементов, учитываемых при решении задачи. Оно состоит в указании экспертных оценок превосходства (или отставания) элементов задачи относительно друг друга.

Сначала сравниваются *критерии по их важности*.

Затем сравниваются *альтернативы по каждому критерию*. Для этого заполняются матрицы парных сравнений. Размерность каждой матрицы парных сравнений равна количеству сравниваемых элементов. Матрицы парных сравнений заполняются, обрабатываются, а также проверяются на непротиворечивость по правилам метода Саати.

На основании матриц парных сравнений вычисляются оценки важности критериев, оценки предпочтительности альтернатив по каждому из критериев и, наконец, обобщенные оценки предпочтительности альтернатив.

Рассмотрим сравнение критериев по важности.

В данной задаче три критерия: затраты (обозначим его как $K1$), близость к потребителям ($K2$), удобство связи с предприятием ($K3$). Поэтому потребуется заполнить матрицу размерностью $3 \times 3$.

Матрица заполняется в соответствии с мнениями о важности критериев (см. постановку задачи) по правилам, приведенным в таблице 6.1.

Матрица парных сравнений критериев для данного примера приведена в таблице 6.2.

Таблица 6.2 – Матрица парных сравнений критериев по важности

| Альтернатива | $K1$ | $K2$ | $K3$ |
|---|---|---|---|
| $K1$ | 1 | 1/2 | 7 |
| $K2$ | 2 | 1 | 8 |
| $K3$ | 1/7 | 1/8 | 1 |

Элемент $X_{12} = 1/2$ в таблице означает, что критерий $K1$ (затраты) совсем немного менее важен, чем критерий $K2$ (близость к потребителю). Элемент $X_{13} = 7$ означает, что критерий $K1$ значительно важнее, чем критерий $K3$.

Обработка матрицы парных сравнений выполняется по правилам метода Саати. Вычисляются средние геометрические строк матрицы:

$$C_1=\sqrt[3]{1\cdot\frac{1}{2}\cdot 7}=1,52;\ C_2=\sqrt[3]{2\cdot 1\cdot 8}=2,52;\ C_3=\sqrt[3]{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot 1}=0,26.$$

Вычисляется сумма средних геометрических: С = 1,52 + 2,52 + 0,26 = 4,3.

Вычисляются локальные приоритеты (в данном случае – оценки важности критериев): $L_{K1} = C_1/C = 1{,}52/4{,}3 = 0{,}35$; $L_{K2} = C_2/C = 0{,}59$; $L_{K3} = C_3/C = 0{,}06$.

Чем больше локальный приоритет, тем важнее критерий.

Затем выполняется сравнение альтернатив по каждому из критериев. Рассмотрим сравнение альтернатив по критерию «Затраты» (таблица 6.3).

Таблица 6.3 – Матрица парных сравнений альтернатив по критерию «Затраты»

| Альтернатива | *M*1 | *M*2 | *M*3 | *M*4 |
|---|---|---|---|---|
| *M*1 | 1 | 2 | 9 | 3 |
| *M*2 | 1/2 | 1 | 9 | 2 |
| *M*3 | 1/9 | 1/9 | 1 | 1/7 |
| *M*4 | 1/3 | 1/2 | 7 | 1 |

Здесь элемент $X_{12} = 2$ означает, что, по мнению специалистов предприятия, место *M*1 совсем немного лучше, чем место *M*2 (по критерию «Затраты»). Это видно из характеристик мест.

В матрице парных сравнений берут средние геометрические строк:

$$C_1=\sqrt[4]{1\cdot 2\cdot 9\cdot 3}=2,71;\qquad C_2=\sqrt[4]{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 9\cdot 2}=1,73;$$

$$C_3=\sqrt[4]{\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot 1\cdot\frac{1}{7}}=0,21;\qquad C_4=\sqrt[4]{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 1}=1,04.$$

Сумма средних геометрических $C = 2{,}71 + 1{,}73 + 0{,}21 + 1{,}04 = 5{,}69$.

Локальные приоритеты альтернатив относительно критерия *K*1:

$$L_{M1}^{K1}=\frac{C_1}{C}=\frac{2,71}{5,69}=0,48;\ L_{M2}^{K1}=\frac{C_2}{C}=\frac{1,73}{5,69}=0,3;\ L_{M3}^{K1}=\frac{C_3}{C}=\frac{0,21}{5,69}=0,04;$$

$$L_{M4}^{K1}=\frac{C_4}{C}=\frac{1,04}{5,69}=0,18.$$

Чем больше локальный приоритет, тем лучше альтернатива *по данному критерию*. В данном случае по критерию «Затраты» лучшее место – *M*1, худшее – *M*3. Аналогично выполняется сравнение альтернатив по остальным критериям (в таблице 6.4 приведено попарное сравнение альтернатив по критерию «Близость к потребителям», в таблице 6.5 – по критерию «Удобство связи с предприятием»).

Таблица 6.4 – Матрица парных сравнений альтернатив по критерию «Близость к потребителям»

| Альтернатива | $M1$ | $M2$ | $M3$ | $M4$ |
|---|---|---|---|---|
| $M1$ | 1 | 7 | 1/2 | 1 |
| $M2$ | 1/7 | 1 | 1/9 | 1/7 |
| $M3$ | 2 | 9 | 1 | 2 |
| $M4$ | 1 | 7 | 1/2 | 1 |

Здесь элемент $X_{12} = 7$ означает, что, по мнению специалистов предприятия, место $M1$ значительно лучше, чем место $M2$ (по критерию «Близость к потребителям»), т. к. $M1$ располагается близко к потребителям, а $M2$ – далеко.

Элемент $X_{14} = 1$ означает, что по критерию «Близость к потребителям» места $M1$ и $M4$ одинаковы.

Локальные приоритеты альтернатив относительно критерия $K2$ «Близость к потребителям»:

$$L_{M1}^{K2} = 0,25;\ L_{M2}^{K2} = 0,04;\ L_{M3}^{K2} = 0,45;\ L_{M4}^{K2} = 0,25.$$

Таблица 6.5 – Матрица парных сравнений альтернатив по критерию «Удобство связи с предприятием»

| Альтернатива | $M1$ | $M2$ | $M3$ | $M4$ |
|---|---|---|---|---|
| $M1$ | 1 | 1/2 | 1/3 | 1/3 |
| $M2$ | 2 | 1 | 1/2 | 1/2 |
| $M3$ | 3 | 2 | 1 | 1 |
| $M4$ | 3 | 2 | 1 | 1 |

Локальные приоритеты альтернатив относительно критерия $K3$ («Удобство связи с предприятием»): $L_{M1}^{K3} = 0,11;\ L_{M2}^{K3} = 0,19;\ L_{M3}^{K3} = 0,35;\ L_{M4}^{K3} = 0,35.$

На основании полученных оценок вычисляются глобальные приоритеты альтернатив, в которых учитываются предпочтения альтернатив по каждому из критериев, а также важность этих критериев.

Глобальные приоритеты альтернатив находятся следующим образом: локальные приоритеты альтернативы относительно критериев умножаются на приоритеты соответствующих критериев; эти произведения складываются.

$$G_{M1} = L_{M1}^{K1} \cdot L_{K1} + L_{M1}^{K2} \cdot L_{K2} + L_{M1}^{K3} \cdot L_{K3} = 0,48 \cdot 0,35 + 0,25 \cdot 0,59 + 0,11 \cdot 0,06 = 0,32;$$

$$G_{M2} = L_{M2}^{K1} \cdot L_{K1} + L_{M2}^{K2} \cdot L_{K2} + L_{M2}^{K3} \cdot L_{K3} = 0,3 \cdot 0,35 + 0,04 \cdot 0,59 + 0,19 \cdot 0,06 = 0,14;$$

$$G_{M3} = L_{M3}^{K1} \cdot L_{K1} + L_{M3}^{K2} \cdot L_{K2} + L_{M3}^{K3} \cdot L_{K3} = 0,04 \cdot 0,35 + 0,5 \cdot 0,59 + 0,35 \cdot 0,06 = 0,3;$$

$$G_{M4} = L_{M4}^{K1} \cdot L_{K1} + L_{M4}^{K2} \cdot L_{K2} + L_{M4}^{K3} \cdot L_{K3} = 0,18 \cdot 0,35 + 0,25 \cdot 0,59 + 0,35 \cdot 0,06 = 0,23.$$

Чем больше глобальный приоритет, тем лучше альтернатива (с учетом всех критериев и с учетом их важности). В данном случае лучшим для размещения СЦ является место, обозначенное как *М*1. Несколько хуже место *М*3, еще хуже – *М*4, самое худшее – М2.

### *Порядок выполнения работы*

Решить слабоструктурированную задачу методом анализа иерархий.

***Задача.*** Предприятие предполагает закупить универсальный станок для изготовления изделий нескольких типов (таблица 6.6).

Таблица 6.6 – Характеристики станков

| Станок | *СТ*1 | *СТ*2 | *СТ*3 | *СТ*4 | *СТ*5 | *СТ*6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Количество типов выпускаемых изделий | 10 + *n* | 12 + n | 8 + *n* | 15 + *n* | 10 + *n* | 12 + *n* |
| Стоимость станка | 220 – *n* | 250 – n | 170 – *n* | 250 – *n* | 200 – *n* | 240 – *n* |
| Переналадка на другой тип изделия | Достаточно простая | Достаточно простая | Сложная | Очень простая | Сложнее, чем для СТ3 | Достаточно простая |

Важность критериев оценивается двумя экспертами. По мнению первого, наиболее важный критерий – количество типов выпускаемых изделий, менее важный – стоимость, еще менее важный – удобство переналадки станка.

Второй эксперт: наиболее важный критерий – стоимость, менее важный – удобство переналадки, еще менее важный – количество типов изделий.

### *Содержание отчета*

1 Тема и цель работы.
2 Условия задач.
3 Решение задач (значение *n* задает преподаватель).
4 Выводы по работе.

### *Контрольные вопросы*

1 Что такое множество Парето?
2 Как составляется матрица парных сравнений?
3 Как вычисляются локальные приоритеты альтернатив?
4 Как вычисляются глобальные приоритеты альтернатив?

# 7 Лабораторная работа № 7. Решение задач оптимизации на основе многокритериальной методики

*Цель работы*: сформировать знания и умения использовать метод скаляризации векторных оценок.

***Теоретические сведения***

Дискретные задачи многокритериального выбора альтернатив относятся к числу слабоструктурированных и могут решаться на основе метода анализа иерархий. Однако метод анализа иерархий требует большого объема экспертной информации: человеком-экспертом должно быть выполнено сравнение всех критериев, а также всех альтернатив по каждому из критериев. Кроме того, этот метод имеет смысл применять только при условии, что в решении задачи участвуют высококвалифицированные специалисты (эксперты), что не всегда возможно. Поэтому разработан ряд более простых методов и процедур, требующих использования небольшого объема экспертной информации. В данной работе рассматривается несколько таких методов.

*Методика экспресс-анализа альтернатив*.

Методика предназначена для отбора перспективных альтернатив. Она рассчитана на применение в задачах, где большинство критериев являются числовыми, но может использоваться и для задач, в которых имеются качественные критерии; в этом случае для перехода к числовым оценкам применяются следующие процедуры: оценки по качественным критериям выражаются по пятибалльной шкале («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «плохо», «очень плохо»), а затем выполняется переход к числовым оценкам с использованием шкалы Харрингтона. При этом оценке «отлично» соответствуют числовые оценки от 0,8 до 1; «хорошо» – от 0,63 до 0,8; «удовлетворительно» – от 0,37 до 0,63; «плохо» – от 0,2 до 0,37; «очень плохо» – от 0 до 0,2. Числовая оценка выставляется человеком: экспертом или лицом, принимающим решения (ЛПР). Например, если по некоторому критерию две альтернативы имеют оценку «хорошо», но одна из них очень хорошая, а другая – немного хуже, то первой из альтернатив (лучшей) можно назначить оценку 0,8, а второй, например, 0,7; для оценок, имеющих вид «да-нет» (то есть выражающих наличие или отсутствие некоторого показателя), обычно используются следующие числовые оценки: «да» – 0,67, «нет» – 0,33 (здесь предполагается, что оценка «да» более желательна, чем «нет»).

Принцип работы методики экспресс-анализа альтернатив следующий: для каждой альтернативы находится худшая оценка (из всех оценок данной альтернативы по критериям, используемым в задаче). Выбираются альтернативы, худшая оценка которых не ниже некоторой пороговой величины.

***Пример*** **–** Химический комбинат планирует внедрить комплекс средств автоматизации (*КСА*). Имеется возможность выбрать один из семи вариантов *КСА* (*КСА*1, *КСА*2, ..., *КСА*7). При выборе учитываются четыре критерия: затраты, связанные с изготовлением *КСА* и его вводом в эксплуатацию; срок ввода *КСА* в эксплуатацию; срок гарантийного обслуживания предприятием-изготовителем; удобство *КСА* в эксплуатации. Характеристики *КСА* приведены в таблице 7.1.

Таблица 7.1 – Исходные данные для примера

| Показатель | *КСА*1 | *КСА*2 | *КСА*3 | *КСА*4 | *КСА*5 | *КСА*6 | *КСА*7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Затраты, млн ден. ед. | 40 | 30 | 40 | 60 | 45 | 25 | 55 |
| Срок ввода в эксплуатацию, мес. | 8 | 8 | 6 | 6 | 7 | 8 | 6 |
| Срок гарантийного обслуживания, лет | 4 | 4 | 5 | 7 | 4 | 4 | 5 |
| Удобство в эксплуатации | Хорошо | Отлично | Удовлетворительно | Отлично | Плохо | Очень хорошо | Хорошо |

Выберем множество Парето. Для этого выполним попарное сравнение альтернатив по всем критериям (таблица 7.2).

Таблица 7.2 – Множество Парето

| Показатель | *КСА*2 | *КСА*3 | *КСА*4 | *КСА*6 | *КСА*7 |
|---|---|---|---|---|---|
| Затраты, млн ден. ед. | 30 | 40 | 60 | 25 | 55 |
| Срок ввода в эксплуатацию, мес. | 8 | 6 | 6 | 8 | 6 |
| Срок гарантийного обслуживания, лет | 4 | 5 | 7 | 4 | 5 |
| Удобство в эксплуатации | Отлично | Удовлетворительно | Отлично | Очень хорошо | Хорошо |

Обозначим оценки альтернатив по критериям как $X_{ij}$, $i = 1, ..., M$, $j = 1, ..., N$. Здесь $M$ – количество критериев, $N$ – количество альтернатив (в данной задаче $M = 4$, $N = 5$). Выбор множества перспективных альтернатив на основе методики экспресс-анализа реализуется в следующем порядке.

Шаг 1. Оценки альтернатив по критериям приводятся к безразмерному виду.

Безразмерные оценки альтернатив $P_{ij}$, $i = 1, ..., M$, $j = 1,..., N$, находятся следующим образом:

– для критериев, подлежащих максимизации, все оценки альтернатив по критерию делятся на максимальную из оценок по данному критерию:

$$P_{ij} = \frac{X_{ij}}{\max\limits_{j} X_{ij}};$$

– для критериев, подлежащих минимизации, из оценок по данному критерию выбирается минимальная, и она делится на все оценки альтернатив по данному критерию:

$$P_{ij} = \frac{\min\limits_{j} X_{ij}}{X_{ij}};$$

– для качественных (словесных) критериев выполняется переход к числовым оценкам по шкале Харрингтона.

Рассмотрим получение безразмерных оценок для данной задачи. Критерий «Затраты» подлежит минимизации. Поэтому для него находится минимальная оценка (в данном примере она равна 25) и делится на все оценки по данному критерию. Например, для *КСА*2 безразмерная оценка по критерию «Затраты» находится следующим образом: 25/30 = 0,83.

Аналогично находятся безразмерные оценки по критерию «Срок ввода в эксплуатацию»: минимальная оценка (в данном примере 6) делится на все оценки по данному критерию.

Критерий «Срок гарантийного обслуживания» подлежит максимизации. Поэтому все оценки по этому критерию делятся на максимальную оценку (в данном примере на 7).

Безразмерные оценки по критерию «Удобство в эксплуатации» назначаются экспертом по шкале Харрингтона. Для рассматриваемой задачи безразмерные оценки приведены в таблице 7.3.

Таблица 7.3 – Безразмерные оценки альтернатив

| Показатель | *КСА*2 | *КСА*3 | *КСА*4 | *КСА*6 | *КСА*7 |
|---|---|---|---|---|---|
| Затраты | 0,83 | 0,63 | 0,42 | 1 | 0,45 |
| Срок ввода в эксплуатацию | 0,75 | 1 | 1 | 0,75 | 1 |
| Срок гарантийного обслуживания | 0,67 | 0,83 | 1 | 0,67 | 0,83 |
| Удобство в эксплуатации | 1 | 0,6 | 0,9 | 0,8 | 0,7 |

*Примечание* – По критерию «Удобство в эксплуатации» эксперт назначил альтернативе *КСА*2 оценку 1, а *КСА*4 – оценку 0,9, хотя обе альтернативы оценивались по данному критерию как отличные. Это означает, что, согласно мнению эксперта, по данному критерию *КСА*2 немного лучше, чем *КСА*4.

В результате перехода к безразмерным оценкам устранены различия исходных оценок, затруднявшие сравнение альтернатив.

Безразмерные величины не измеряются в каких-либо единицах, поэтому их можно сравнивать друг с другом, складывать и т. д.

Безразмерные оценки не различаются по диапазону значений: все они имеют значения в пределах от 0 до 1. Они не различаются также по направленности: чем больше безразмерная оценка, тем лучше (по любому критерию), и лучшее значение равно 1.

Шаг 2. Для каждой альтернативы находится минимальная оценка, т. е. худшая из оценок данной альтернативы по всем критериям:

$$P_j = \min_i P_{ij},\ j = 1, ..., N.$$

Например, для *КСА*2 эта оценка равна 0,67; она находится как минимальная из 0,83, 0,75, 0,67 и 1. Минимальные оценки приведены в таблице 7.4.

Таблица 7.4 – Минимальные оценки альтернатив

| Альтернатива | *КСА*2 | *КСА*3 | *КСА*4 | *КСА*6 | *КСА*7 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_j$ | 0,67 | 0,6 | 0,42 | 0,67 | 0,45 |

Шаг 3. Выбирается пороговое значение минимальной оценки $P_0$. Эта величина назначается ЛПР или экспертом из субъективных соображений, например, в зависимости от количества альтернатив, которые требуется отобрать для дальнейшего анализа. Пусть в данной задаче назначено $P_0 = 0,5$. Выбирается множество альтернатив, для которых $P_j > P_0$.

Таким образом, для дальнейшего анализа отбираются альтернативы, у которых все оценки (в том числе худшая) не ниже предельной величины $P_0$.

***Порядок выполнения работы***

1 Используя методику экспресс-анализа альтернатив, выбрать три лучших альтернативы и выполнить ранжирование выбранных альтернатив по методу скаляризации векторных оценок (значение *n* задает преподаватель).

2 Сравнить две лучшие альтернативы, используя методику сравнительной оценки двух альтернатив по степени доминирования.

***Задача.*** Предприятие предполагает закупить универсальный станок для изготовления изделий нескольких типов (таблица 7.5).

Таблица 7.5 – Характеристики станков

| Станок | *СТ*1 | *СТ*2 | *СТ*3 | *СТ*4 | *СТ*5 | *СТ*6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Количество типов выпускаемых изделий | 10 + *n* | 12 + *n* | 8 + *n* | 15 + *n* | 10 + *n* | 12 + n |
| Стоимость станка | 220 + *n* | 250 + *n* | 170 + *n* | 250 + *n* | 200 + *n* | 240 + *n* |
| Переналадка на другой тип изделия | Достаточно простая | Достаточно простая | Сложная | Очень простая | Немного сложнее, чем для СТ3 | Достаточно простая |

Важность критериев оценивается двумя экспертами. По мнению первого, наиболее важный критерий – количество типов выпускаемых изделий, менее важный – стоимость, еще менее важный – удобство переналадки станка.

Второй эксперт: наиболее важный критерий – стоимость, менее важный – удобство переналадки, еще менее важный – количество типов изделий.

***Содержание отчета***

1 Тема и цель работы.
2 Условия задач.
3 Решение задач (значение *n* задает преподаватель).
4 Выводы по работе.

***Контрольные вопросы***

1 В чем состоит суть методики сравнительной оценки двух альтернатив по степени доминирования?
2 Для чего предназначена методика скаляризации векторных оценок?
3 В чем суть методики экспресс-анализа альтернатив?
4 Как используется обобщенная оценка доминирования?

# 8 Лабораторная работа № 8. Многокритериальная оптимизация в условиях риска и неопределенности

*Цель работы*: сформировать знания и умения использования модифицированного алгоритма Кемени – Снелла.

***Теоретические сведения***

Модифицированный алгоритм Кемени – Снелла предназначен для ранжирования альтернатив с учетом их оценок по нескольким критериям. Его основное преимущество – возможность анализа и выбора альтернатив, оцениваемых по критериям различных видов: числовым, качественным, «да-нет» и т. д. Алгоритм также позволяет учитывать суждения ЛПР о важности критериев. Алгоритм основан на ранжировании и попарном сравнении альтернатив по каждому критерию.

***Пример –*** Крупная фирма хочет создать совместное предприятие за рубежом, есть возможность создания совместного предприятия в одной из пяти стран. Характеристики этих стран приведены в таблице 8.1.

Таблица 8.1 – Исходные данные

| Страна | *C*1 | *C*2 | *C*3 | *C*4 | *C*5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Законодательство о совместных предприятиях | Неблагоприятное | Благоприятное | Удовлетворительное | Благоприятное | Неблагоприятное |
| Наличие сырья | Нет | Есть | Нет | Нет | Есть |
| Спрос на продукцию предприятия на внутреннем рынке, млн ден.ед./год | 5 | 6 | 4 | 8 | 6 |
| Затраты на подготовку персонала, млн ден. ед. | 1,2 | 2,5 | 1,5 | 1,8 | 1,3 |

По мнению руководства фирмы, при выборе страны следует прежде всего учитывать законодательство о совместных предприятиях. Немного менее важный критерий – спрос на внутреннем рынке. Еще немного менее важные критерии – наличие сырья и затраты на подготовку персонала.

В данной задаче для оценки альтернатив (стран) используются критерии различных видов.

Критерий «Законодательство о совместных предприятиях» – качественный (причем шкала оценок отличается от пятибалльной, что затрудняет перевод критерия в числовую форму). Критерий «Наличие сырья» имеет вид «да-нет». Остальные критерии – количественные. Для решения таких задач целесообразно применять модифицированный алгоритм Кемени – Снелла.

Прежде чем приступать к выбору решения с использованием данного алгоритма, следует отобрать множество Парето, т. е. множество перспективных альтернатив. Выполнив попарное сравнение альтернатив (методом Саати), получим, что во множество Парето входят все пять альтернатив.

*Реализация алгоритма*.

Шаг 1. С помощью одного из методов экспертных оценок находятся веса критериев, представляющие собой числовые оценки их важности.

В данном случае имеется только одно суждение о важности критериев. Поэтому следует применить один из индивидуальных методов экспертных оценок. Воспользуемся методом Саати. Обозначим критерии: *К*1 – законодательство о совместных предприятиях, *К*2 – наличие сырья, *К*3 – спрос на внутреннем рынке, *К*4 – затраты на подготовку персонала. Выполним попарное сравнение критериев, как показано в таблице 8.2.

Таблица 8.2 – Оценка критериев по методу Саати

| Критерий | *К*1 | *К*2 | *К*3 | *К*4 |
|---|---|---|---|---|
| *К*1 | 1 | 5 | 2 | 5 |
| *К*2 | 1/5 | 1 | 1/3 | 1 |
| *К*3 | 1/2 | 3 | 1 | 3 |
| *К*4 | 1/5 | 1 | 1/3 | 1 |

Выполнив обработку матрицы парных сравнений по методу Саати, найдем веса критериев: $V_1 = 0{,}52$; $V_2 = 0{,}10$; $V_3 = 0{,}28$; $V_4 = 0{,}10$. Если все критерии одинаковы по важности, то веса критериев считаются равными единице.

Шаг 2. Выполняется ранжирование альтернатив по каждому из критериев. При этом лучшая альтернатива по данному критерию получает оценку (ранг) 1, следующая за ней – оценку 2 и т. д. Если альтернативы по данному критерию одинаковы, то они получают одинаковые оценки. Результаты ранжирования сводятся в матрицу (таблица 8.3).

Таблица 8.3 – Матрица ранжирований

| Критерий | Оценка | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | *C*1 | *C*2 | *C*3 | *C*4 | *C*5 |
| *K*1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 3 |
| *K*2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| *K*3 | 3 | 2 | 4 | 1 | 2 |
| *K*4 | 1 | 5 | 3 | 4 | 2 |

Шаг 3. На основе ранжирования альтернатив по каждому из критериев составляется матрица парных сравнений. Всего составляется *M* таких матриц, где *M* – количество критериев. Матрицы заполняются по правилам, приведенным в таблице 8.4: *i* – это номер матрицы (номер критерия).

Таблица 8.4 – Правила заполнения матриц парных сравнений в модифицированном алгоритме Кемени – Снелла

| $R^i_{jk}$ | Значение |
|---|---|
| 1 | По *i*-му критерию *j*-я альтернатива лучше *k*-й |
| –1 | По *i*-му критерию *j*-я альтернатива хуже *k*-й |
| 0 | По *i*-му критерию *j*-я и *k*-я альтернативы одинаковы |

Матрицы парных сравнений по критериям *K*1 – *K*4 даны в таблицах 8.5–8.8.

Таблица 8.5 – Парные сравнения по критерию *K*1

| Страна | *C*1 | *C*2 | *C*3 | *C*4 | *C*5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *C*1 | – | –1 | –1 | –1 | 0 |
| *C*2 | 1 | – | 1 | 0 | 1 |
| *C*3 | 1 | –1 | – | –1 | 1 |
| *C*4 | 1 | 0 | 1 | – | 1 |
| *C*5 | 0 | –1 | –1 | –1 | – |

Таблица 8.6 – Парные сравнения по критерию *K*2

| Страна | *C*1 | *C*2 | *C*3 | *C*4 | *C*5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *C*1 | – | –1 | 0 | 0 | –1 |
| *C*2 | 1 | – | 1 | 1 | 0 |
| *C*3 | 0 | –1 | – | 0 | –1 |
| *C*4 | 0 | –1 | 0 | – | –1 |
| *C*5 | 1 | 0 | 1 | 1 | – |

Таблица 8.7 – Парные сравнения по критерию *K*3

| Страна | *C*1 | *C*2 | *C*3 | *C*4 | *C*5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *C*1 | – | –1 | 1 | –1 | –1 |
| *C*2 | 1 | – | 1 | –1 | 0 |
| *C*3 | –1 | –1 | – | –1 | –1 |
| *C*4 | 1 | 1 | 1 | – | 1 |
| *C*5 | 1 | 0 | 1 | –1 | – |

Таблица 8.8 – Парные сравнения по критерию *K*4

| Страна | *C*1 | *C*2 | *C*3 | *C*4 | *C*5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *C*1 | – | 1 | 1 | 1 | 1 |
| *C*2 | –1 | – | –1 | –1 | –1 |
| *C*3 | –1 | 1 | – | 1 | –1 |
| *C*4 | –1 | 1 | –1 | – | –1 |
| *C*5 | –1 | 1 | 1 | 1 | – |

Здесь, например, согласно таблице 8.5 элемент $R_{12}^{1} = -1$ означает, что по критерию «Законодательство о совместных предприятиях» страна $C1$ хуже, чем $C2$ (в стране $C1$ оно неблагоприятное, в $C2$ – благоприятное). Элемент $R_{23}^{1} = 1$ означает, что по законодательству о совместных предприятиях страна $C2$ лучше, чем $C3$; $R_{24}^{1} = 0$ означает, что по этому критерию страны $C2$ и $C4$ одинаковы (в обеих странах законодательство благоприятное).

Шаг 4. Составляется матрица потерь. Размерность матрицы – $N \times N$, где $N$ – количество альтернатив. Элементы матрицы потерь рассчитываются по следующей формуле:

$$R_{jk} = \sum_{i=1}^{M} V_i \cdot | R_{jk}^{i} - 1 |, j = 1,...,N, k = 1,...,N.$$

Матрица потерь для рассматриваемой задачи приведена в таблице 8.9.

Таблица 8.9 – Матрица потерь

| Страна | $C1$ | $C2$ | $C3$ | $C4$ | $C5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $C1$ | – | 1,80 | 1,14 | 1,70 | 1,28 |
| $C2$ | 0,20 | – | 0,20 | 1,28 | 0,58 |
| $C3$ | 0,86 | 1,80 | – | 1,70 | 0,96 |
| $C4$ | 0,30 | 0,72 | 0,30 | – | 0,40 |
| $C5$ | 0,72 | 1,42 | 1,04 | 1,60 | – |

Приведем примеры расчета некоторых элементов матрицы потерь.

$$R_{12} = V_1 \cdot | R_{12}^{1} - 1 | + V_2 \cdot | R_{12}^{2} - 1 | + V_3 \cdot | R_{12}^{3} - 1 | + V_4 \cdot | R_{12}^{4} - 1 | =$$

$$= 0,52 \cdot | -1 - 1 | + 0,1 \cdot | -1 - 1 | + 0,28 \cdot | -1 - 1 | + 0,1 \cdot | 1 - 1 | = 1,80;$$

$$R_{25} = V_1 \cdot | R_{25}^{1} - 1 | + V_2 \cdot | R_{25}^{2} - 1 | + V_3 \cdot | R_{25}^{3} - 1 | + V_4 \cdot | R_{25}^{4} - 1 | =$$

$$= 0,52 \cdot | 1 - 1 | + 0,1 \cdot | 0 - 1 | + 0,28 \cdot | 0 - 1 | + 0,1 \cdot | -1 - 1 | = 0,58.$$

Смысл элементов матрицы потерь следующий: чем больше элемент $R_{jk}$, тем больше отставание $j$-й альтернативы от $k$-й (тем хуже $j$-я альтернатива по сравнению с $k$-й).

Шаг 5. Выполняется предварительное ранжирование альтернатив. Для этого находятся суммы строк матрицы потерь. Смысл этих сумм следующий: сумма $j$-й строки представляет собой оценку отставания $j$-й альтернативы от всех остальных альтернатив.

Альтернатива, которой соответствует минимальная сумма, предварительно считается лучшей. Строка и столбец этой альтернативы исключаются из матрицы потерь.

Суммирование строк матрицы потерь и исключение альтернатив выполняются до тех пор, пока не будет исключена вся матрица. Чем раньше исключена альтернатива, тем она лучше.

Выполним предварительное ранжирование для рассматриваемой задачи.

Найдем суммы строк матрицы потерь:

$P_1 = 1{,}80 + 1{,}14 + 1{,}70 + 1{,}28 = 5{,}92$; $P_2 = 0{,}20 + 0{,}20 + 1{,}28 + 0{,}58 = 2{,}26$;
$P_3 = 0{,}86 + 1{,}80 + 1{,}70 + 0{,}96 = 5{,}33$; $P_4 = 0{,}30 + 0{,}72 + 0{,}30 + 0{,}40 = 1{,}71$;
$P_5 = 0{,}72 + 1{,}42 + 1{,}04 + 1{,}60 = 4{,}78$.

Предварительно лучшей считается альтернатива *C*4. Она исключается из матрицы потерь. Сокращенная матрица потерь приведена в таблице 8.10.

Таблица 8.10 – Первая сокращенная матрица потерь

| Страна | *C*1 | *C*2 | *C*3 | *C*5 |
|---|---|---|---|---|
| *C*1 | – | 1,80 | 1,14 | 1,28 |
| *C*2 | 0,20 | – | 0,20 | 0,58 |
| *C*3 | 0,86 | 1,80 | – | 0,96 |
| *C*5 | 0,72 | 1,42 | 1,04 | – |

Суммы строк этой матрицы: $P_1 = 4{,}22$; $P_2 = 0{,}98$; $P_3 = 3{,}63$; $P_5 = 3{,}17$. Исключается альтернатива *C*2. Вторая сокращенная матрица потерь приведена в таблице 8.11.

Таблица 8.11 – Вторая сокращенная матрица потерь

| Страна | *C*1 | *C*3 | *C*5 |
|---|---|---|---|
| *C*1 | – | 1,14 | 1,28 |
| *C*3 | 0,86 | – | 0,96 |
| *C*5 | 0,72 | 1,04 | – |

Суммы строк этой матрицы: $P_1 = 2{,}42$; $P_3 = 1{,}83$; $P_5 = 1{,}76$. Исключается альтернатива *C*5. Третья сокращенная матрица потерь приведена в таблице 8.12.

Таблица 8.12 – Третья сокращенная матрица потерь

| Страна | *C*1 | *C*3 |
|---|---|---|
| *C*1 | – | 1,14 |
| *C*3 | 0,86 | – |

Суммы строк этой матрицы: $P_1 = 1{,}14$; $P_3 = 0{,}86$. Лучшая альтернатива (из двух оставшихся) – *C*3. Предварительное ранжирование альтернатив: *C*4, *C*2, *C*5, *C*3, *C*1.

Выполняется окончательное ранжирование альтернатив. Для этого альтернативы сравниваются попарно, начиная с конца предварительного ранжирования. Если сравниваются $j$-я и $k$-я альтернативы (при этом $j$-я альтернатива в предварительном ранжировании находится выше $k$-й) и выполняется условие $R_{jk} \leq R_{kj}$ (где $R_{jk}$ и $R_{kj}$ – элементы матрицы потерь), то альтернативы остаются в ранжировании на прежних местах ($j$-я альтернатива лучше $k$-й).

Если $R_{jk} > R_{kj}$, то альтернативы меняются местами, поскольку $j$-я альтернатива хуже $k$-й).

Выполним окончательное ранжирование для данной задачи.

Сравниваем $C3$ и $C1$. $R_{31} = 0,86$; $R_{13} = 1,14$. Так как $R_{31} < R_{13}$, альтернативы остаются на своих местах ($C3$ выше, чем $C1$).

Сравниваем $C5$ и $C3$. $R_{53} = 1,04$; $R_{35} = 0,96$. Так как $R_{53} > R_{35}$, альтернативы меняются местами: альтернатива $C3$ признается лучшей, чем $C5$. Ранжирование теперь имеет следующий вид: $C4$, $C2$, $C3$, $C5$, $C1$.

Сравниваем $C2$ и $C3$. $R_{23} = 0,20$; $R_{32} = 1,80$. Так как $R_{23} < R_{32}$, альтернативы остаются на прежних местах (С2 выше, чем С3).

Сравниваем $C4$ и $C2$. $R_{42} = 0,72$; $R_{24} = 1,28$. Так как $R_{24} < R_{42}$, альтернативы остаются на прежних местах ($C4$ выше, чем $C2$).

Таким образом, окончательное ранжирование альтернатив следующее: $C4$, $C2$, $C3$, $C5$, $C1$.

### *Порядок выполнения*

***Задача.*** Предлагаются шесть вариантов площадки для строительства нового предприятия химической промышленности (таблица 8.13).

Таблица 8.13 – Характеристики площадок

| Площадка | Пл1 | Пл2 | Пл3 | Пл4 | Пл5 | Пл6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Условия для доставки сырья | Хорошие | Отличные | Средние | Хорошие, немного хуже, чем для Пл1 | Средние | Очень хорошие |
| Затраты на подготовку к строительству | $3,5 + n$ | $2 + n$ | $4 + n$ | $3 + n$ | $3,5 + n$ | $4 + n$ |
| Опасность загрязнения грунтовых вод | Существует | Высокая | Нет | Существует | Нет | Нет |

Важность критериев оценивается двумя экспертами.

По мнению первого, наиболее важный критерий – опасность загрязнения, немного менее важный – затраты на подготовку к строительству, еще немного менее важный – условия для доставки сырья.

По мнению второго эксперта, наиболее важный критерий – затраты на подготовку к строительству, примерно такой же по важности (немного менее важный) – опасность загрязнения, менее важный – условия для доставки сырья.

По виду имеющихся экспертных суждений о важности критериев выбрать метод экспертного анализа, который следует использовать для определения весов критериев: метод предпочтений или метод ранга. Используя выбранный метод экспертного анализа, вычислить веса критериев.

***Содержание отчета***

1 Тема и цель работы.

2 Условия задач.

3 Решение задач (значение *n* задает преподаватель).

4 Выводы по работе.

***Контрольные вопросы***

1 Сформулировать правила заполнения матрицы парных сравнений в модифицированном методе Кемени – Снелла.

2 Как рассчитать матрицу потерь?

3 Как выполнить ранжирование методов?

4 Что такое индекс несогласия для альтернативы?

# Список литературы


1 **Пантелеев**, **А. В.** Методы оптимизации в примерах и задачах: учебное пособие для вузов / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. – 2-е изд., испр. – Москва: Высшая школа, 2014. – 544 с.

2 **Волкова, В. Н.** Теория систем и системный анализ: учебник для вузов / В. Н. Волкова, А. А. Денисов. – Москва: Юрайт, 2013. – 679 с.

3 Системный анализ и исследование операций: лабораторный практикум для студентов специальности «Автоматизированные системы обработки информации» дневной и дистанционной форм обучения / сост. С. С. Смородинский, Н. В. Батин. – Минск: БГУИР, 2009. – 64 с.

4 **Качала**, **В. В.** Основы теории систем и системного анализа: учебное пособие для вузов / В. В. Качала. – Москва: Горячая линия – Телеком, 2007. – 216 с.

5 **Костевич**, **Л. С.** Математическое программирование: информационные технологии оптимальных решений: учебное пособие / Л. С. Костевич. – Минск: Новое знание, 2003. – 424 с.

6 **Гончаров, В. А.** Методы оптимизации: учебное пособие для вузов / В. А. Гончаров. – Москва: Высшее образование, 2009. – 191 с.

7 **Струченков**, **В. И.** Методы оптимизации в прикладных задачах / В. И. Струченков. – Москва: Солон-Пресс, 2009. – 320 с.

8 **Есипов, Б. А.** Методы исследования операций: учебное пособие / Б. А. Есипов. – 2-е изд., испр. и доп. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2013. – 304 с.: ил.

9 Методы оптимизации. Теория и алгоритмы: учебное пособие для вузов / А. А. Черняк [и др.]. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Юрайт, 2021. – 357 с.

10 **Северцев, Н. А.** Исследование операций. Принципы принятия решений и обеспечение безопасности: учебное пособие для вузов / Н. А. Северцев, А. Н. Катулев; под ред. П. С. Краснощекова. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Юрайт, 2021. – 319 с.

11 **Пантелеев**, **А. В.** Методы оптимизации. Практический курс: учебное пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. – Москва: Логос, 2020. – 424 с.

12 **Вабищевич, П. Н.** Численные методы. Вычислительный практикум. Практическое применение численных методов при использовании алгоритмического языка PYTHON / П. Н. Вабищевич. – 4-е изд., стер. – Москва: ЛЕНАНД, 2021. – 320 с.

13 **Аттетков, А. В.** Методы оптимизации: учебное пособие / А. В. Аттетков, В. С. Зарубин, А. Н. Канатников. – Москва: РИОР; ИНФРА-М, 2017. – 270 с.: ил.