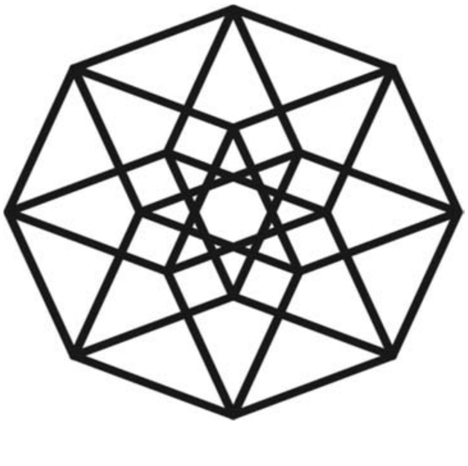
МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Высшая математика»

ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ

***Методические рекомендации к лабораторным работам
для студентов направления подготовки
15.03.06 «Мехатроника и робототехника»
дневной формы обучения***



Могилев 2023

УДК 519.1
ББК 22.174.1
О75

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Высшая математика» «24» ноября 2022 г., протокол № 3

Составители: канд. физ.-мат. наук, доц. И. У. Примак;
ст. преподаватель А. Г. Козлов;
ст. преподаватель Т. Ю. Орлова

Рецензент канд. физ.-мат. наук, доц. И. И. Маковецкий

Методические рекомендации содержат необходимые теоретические сведения по курсу «Основы комбинаторики», примеры с решениями и примеры для самостоятельной работы.

Учебно-методическое издание

ОСНОВЫ КОМБИНАТОРИКИ

Ответственный за выпуск	В. Г. Замураев
Корректор	А. А. Подошевко
Компьютерная верстка	Е. В. Ковалевская

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 56 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2023

Содержание

1 Лабораторная работа № 1. Выборки и упорядочения

Основные теоретические сведения.

Введем следующие обозначения:

n-множество – множество из *n* различных элементов;

(*n*)-*множество* – множество, содержащее элементы *n* различных типов (если не оговорено заранее, то предполагается, что число элементов каждого типа достаточно велико);

r-выборка из некоторого множества – совокупность из *r* (не обязательно различных для (*n*)-множества) элементов этого множества. Число *r* называют объемом выборки.

В *r*-выборках в зависимости от условий задачи либо учитывают порядок следования в них элементов (и тогда они называются *r-перестановками*), либо не учитывают (в этом случае их называют *r-сочетаниями*).

В *r*-выборках возможно повторное появление элементов, и в таком случае они называются соответственно *r-сочетаниями с повторениями* и *r-перестановками с повторениями*.

Число упорядоченных *r*-выборок из *n*-множества $P(n,r)=A_n^r=\dfrac{n!}{(n-r)!}$, для $n \ge r \ge 0$. Откуда следует $P(n,n)=n!$.

Число *r*-выборок из *n*-множества – $\dbinom{n}{r}=C_n^r=\dfrac{P(n,r)}{r!}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$.

Число *r*-выборок из (*n*)-множества – $C_{(n)}^r=C_{n+r-1}^r$.

Число упорядоченных *r*-выборок из (*n*)-множества – $A_{(n)}^r=n^r$.

Постановка задачи.

Выполнить следующие упражнения.

1 На плоскости отмечено 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

Ответ: 120.

2 Сколькими способами колоду из 36 карт можно перетасовать так, чтобы карты каждой масти шли в порядке старшинства?

Ответ: $C_9^{36}C_9^{27}C_9^{18}\approx 2{,}145\cdot 10^{19}$.

3 На прямой отмечено 10 точек, а на параллельной прямой – 11 точек. Сколько существует:

а) треугольников;

б) четырехугольников с вершинами в этих точках?

Ответ: а) 1045; б) 5445.

4 Из 15 девушек и 10 юношей выбирают команду, состоящую из пяти человек. Сколькими способами можно выбрать эту команду так, чтобы в нее вошло не более трех юношей?

Ответ: 23562.

5 Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в словах

а) «КОМПЬЮТЕР»; в) «ПАРАБОЛА»;
б) «ЛИНИЯ»; г) «ОБОРОНОСПОСОБНОСТЬ»?

Ответ: а) 362880; б) 65; в) 6720; г) 83160.

6 Найти число способов раскладки n различных шаров по m различным урнам.

Ответ: m^n.

7 Сколькими способами можно разместить n одинаковых шаров по m различным урнам?

Ответ: $C_{(m)}^{n} = C_{m+n-1}^{n}$.

8 Сколькими способами можно разместить n одинаковых шаров по m различным урнам при следующих условиях:

а) пустых урн нет;
б) во второй урне k шаров;
в) в первых s урнах соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_s$ шаров ($a_1+a_2+\ldots+a_s \leq n$).

Ответ: а) C_{n-1}^{m-1}; б) $C_{n-k+m-2}^{n-k}$; в) $C_{(m-s)}^{n-\sum_{i=1}^{s} a_i} = C_{n-\sum_{i=1}^{s} a_i+m-s-1}^{n-\sum_{i=1}^{s} a_i}$.

9 Сколькими способами можно разместить n_1 белых, n_2 черных и n_3 синих шаров по m различным урнам?

Ответ: $C_{m+n_1-1}^{n_1} C_{m+n_2-1}^{n_2} C_{m+n_3-1}^{n_3}$.

10 Сколькими способами можно разложить $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ различных шаров по k различным урнам так, чтобы в первую урну попало n_1 шаров, во вторую – n_2 и т. д., в k-ю – n_k шаров?

Ответ: $\dfrac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$.

2 Лабораторная работа № 2. Распределения и заполнения

Основные теоретические сведения.

Во многих задачах некоторая совокупность элементов распределяется по некоторому множеству ячеек, которые вследствие этого заполняются. Оба основных понятия – распределение (разбиение) и заполнение – используются как для обозначения операций, так и их результата – полученной ситуации.

В теоретическом плане задачи на распределение и заполнение могут быть интерпретированы как отображение одного множества (элементов) на другое множество (ячеек).

Для подсчета числа распределений необходимо уточнить, являются ли элементы данного множества и ячейки различимыми (например, занумерованными) или нет. В соответствии с этим задачи делятся на следующие классы:

(A) элементы множества различимы, ячейки также различимы;

(B) элементы множества неразличимы, ячейки различимы;

(C) элементы множества различимы, ячейки неразличимы;

(D) элементы множества неразличимы, ячейки также неразличимы.

Рассмотрим эти классы задач. Пусть в дальнейшем N означает n-множество элементов, а R есть r-множество ячеек.

(A) Все элементы множества N и все ячейки различимы. Укажем несколько эквивалентных форм этой задачи:

а) образование слов длины r из алфавита, состоящего из n букв;

б) последовательный выбор r шаров из урны, содержащей n шаров, с немедленным их возвращением;

в) образование r-перестановок с повторениями из n символов.

Число возможных распределений $P = n^r$.

Частный вид отображений – взаимно однозначные – соответствует дополнительному ограничению: каждая ячейка вмещает один и только один элемент. В этом случае $P = n(n-1)...(n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$.

К классу (A) относятся, в частности, следующие случаи различимости элементов и ячеек.

1 Множество N имеет $(k_1, k_2, ..., k_m)$-спецификацию, если оно имеет k_1 элементов первого вида (например, цвета), k_2 элементов второго вида, …, k_m элементов m-го вида (при этом $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$).

2 r-множество R имеет $(n_1, n_2, ..., n_r)$-спецификацию, если в i-й ячейке помещаются n_i элементов, $i = \overline{1, r}$.

3 Элементы в ячейках упорядочены, ограничение на объем ячеек не накладывается.

Пусть множество N имеет (p, q)-спецификацию, т. е. содержит p элементов первого вида и q элементов второго вида; $p + q = n$. Элементы первого вида могут быть размещены по r ячейкам $\binom{p+r-1}{r-1} = \binom{p+r-1}{p}$ способами, а элементы второго вида – $\binom{q+r-1}{r-1} = \binom{q+r-1}{q}$ способами. Общее число распределений в силу правила произведения равно $\binom{p+r-1}{p}\binom{q+r-1}{q}$.

Если имеет место $(k_1, k_2, ..., k_m)$-спецификация множества N, то число распределений n элементов его по r различным ячейкам равно $\prod_{i=1}^{m}\binom{r+k_i-1}{i}$.

Решение задач класса (B).

1 Элементы множества N размещаются по ячейкам множества R так, что ни одна ячейка не пуста. Число распределений равно $\binom{n-1}{r-1}$.

К этому типу задач относятся следующие: найти число способов окрашивания r цветами n одинаковых объектов; найти число r-сочетаний с повторениями, в которых каждый элемент использован.

2 Элементы из N размещаются по ячейкам из R так, что могут быть пустые ячейки. Число распределений равно $\binom{n+r-1}{r-1}=\binom{n+r-1}{n}$.

К задачам этого типа относится, например, задача: найти число решений уравнения $x_1+x_2+...+x_r=n$ в неотрицательных целых $x_i, i=\overline{1,r}$.

Решение задач класса (C).

1 В случаях, когда не допускаются при заполнении пустые ячейки и когда учитывается порядок попадания элементов в ячейки, искомое число распределений равно $A_n^r=\frac{n!}{r!}\binom{n-1}{r-1}$.

2 Если предыдущее разбиение видоизменяют так, что допускают 1, 2, …, r пустых ячеек, то искомое число распределений равно $\left(A'\right)_n^r=A_n^r+A_n^{r-1}+...+A_n^1$.

3 Если пустых ячеек нет, а порядок расположения элементов в ячейках не учитывается, то число распределений равно $B_n^r=\frac{1}{r!}\sum_{\substack{s_1+...+s_r=n\\ s_i\ge 1}}\frac{n!}{s_1!s_2!...s_r!}=S(n,r)$.

Число $S(n,r)$ называют числом Стирлинга 2-го рода.

4 Если в случае 3 допускаются 1, 2, …, r пустых ячеек, то число распределений равно $\left(B'\right)_n^r=B_n^r+B_n^{r-1}+...+B_n^1$.

Постановка задачи.

Выполнить следующие упражнения.

1 Доказать, что число упорядоченных разбиений числа n на k натуральных слагаемых, т. е. число решений уравнения $n=x_1+...+x_k,\ x_i>0,\ i=\overline{1,k}$, равно $C_{n-1}^{k-1}=\sigma(k,n)$, а число упорядоченных разбиений n на слагаемые равно 2^{n-1}.

2 Обозначим через $\lambda(n)$ число неупорядоченных разбиений n на различные слагаемые и $\rho(n)$ – число неупорядоченных разбиений n на нечетные слагаемые (равные или неравные). Доказать, что $\lambda(n)=\rho(n)$.

3 Числа $\omega_k=\left(3k^2-k\right)/2\ \left(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, ...\right)$ называют *пентагональными*. Доказать следующее утверждение (*теорема Эйлера – Лежандра*): разность между количеством неупорядоченных представлений данного натурального числа n в виде суммы четного и нечетного чисел неравных слагаемых равна нулю, если n – непентагональное число, и равна $(-1)^k$, если n – пентагональное число ω_k.

4 Доказать, что для всякого $n>0$

$$\sum_{k:\omega_k\le n}(-1)^k S(n-\omega_k)=\begin{cases}(-1)^{s-1}n, \text{ если } n=\omega_s,\\ 0, \text{ если } n\ne\omega_s,\end{cases}$$

где $S(n)$ – сумма делителей натурального числа.

5 Обозначим $\bar{\mu}(n)$ число неупорядоченных представлений натурального числа n суммой равных или неравных натуральных чисел. Доказать, что $\sum\limits_{k:\omega_k\le n}(-1)^k\bar{\mu}(n-\omega_k)=0$, где $\bar{\mu}(0)=1$.

6 Пусть $f(n)$ и $F(n)$ – целочисленные функции, для которых $\sum\limits_{s:\omega_s\le n/h}(-1)^s f(n-h\omega_s)=F(n)$, $h>0$ – данное целое число. Доказать формулу обращений $f(n)=\sum\limits_{0\le k\le n/h}\bar{\mu}(k)F(n-hk)$, $\bar{\mu}(k)$ – количество разбиений числа k на равные или неравные слагаемые.

7 Найти число неупорядоченных решений уравнения $x_1+x_2+...+x_p=m$, если все неизвестные удовлетворяют неравенству $0\le l\le x_k\le n$.

8 На сколько частей можно разделить поверхность шара плоскостями, проходящими через его центр, при условии, что никакие три плоскости не проходят через один и тот же диаметр?

9 Найти число всех выпуклых k-угольников, вершинами которых служат k из n вершин выпуклого n-угольника, причем две соседние вершины должны быть разделены по меньшей мере s вершинами n-угольника.

10 Сколькими способами можно разбить выпуклый $(n+2)$-угольник на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри многоугольника?

3 Лабораторная работа № 3. Основы метода производящих функций

Основные теоретические сведения.

Производящей функцией последовательности чисел $a_0, a_1, ..., a_k, ...$ называется формальный ряд $A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_kx^k+...=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k$, x – формальная переменная.

Для произвольных рядов $A(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k$, $B(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k$ определим операции: *сложения:* $A(x)+B(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)x^k$; *умножения на число*:

$pA(x)=\sum_{k=0}^{\infty} pa_k x^k$; *произведение Коши* (коротко: *произведение*): $A(x)\cdot B(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, где $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$.

Последовательность чисел $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots\ a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$ называется *сверткой последовательностей* $b_0, b_1, \ldots, b_k, \ldots$ и $c_0, c_1, \ldots, c_k, \ldots$, если $A(x)=B(x)C(x)$.

Экспоненциальной производящей функцией последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$ называется ряд $E(x)=a_0+a_1\dfrac{x}{1!}+\ldots+a_k\dfrac{x^k}{k!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty} a_k \dfrac{x^k}{k!}$.

Из математического анализа известно, что если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится в некоторой окрестности нуля, то его сумма $A(x)$ является аналитической функцией в этой окрестности и $a_k = A^{(k)}(0)/k!$, $k=0, 1, 2, \ldots$, т. е. ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ – это не что иное, как ряд Маклорена функции $A(x)$. Таким образом, будем писать, например, $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1-x)^{-1}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!} = e^x$ и т. д.

Найдем производящие функции для некоторых простых последовательностей.

Из формулы для n-й степени бинома $1+x$ следует $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$, таким образом, для заданного n производящая функция последовательности $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots$ есть $(1+x)^n$. Имеем $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k = (1-2x)^{-1}$, следовательно, производящая функция для последовательности 1, 2, …, 2^n, … есть $(1-2x)^{-1}$. Пользуясь тем, что аналитическую функцию можно дифференцировать почленно, можно написать

$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = x\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = x\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} x^k = x\frac{d}{dx}(1-x)^{-1} = x(1-x)^{-2},$$

тогда производящая функция для последовательности 1, 2, 3, … есть $x(1-x)^{-2}$.

Постановка задачи.

Найти производящие функции последовательностей.

1 $f(n)=\begin{cases} 1, n=0,1, \ldots, N, \\ 0, n>N. \end{cases}$ Ответ: $f^*(x)=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

2 $f(n)=\begin{cases} n+1, & n=0,1,\ldots,N, \\ 0, & n>N. \end{cases}$ Ответ: $f^*(x)=\dfrac{1-(N+2)x^{N+1}+(N+1)x^{N+2}}{(1-x)^2}$.

3 $f(n)=\begin{cases} (n+1)(n+2), & n=0,1,\ldots,N-1, \\ 0, & n\ge N. \end{cases}$

Ответ: $f^*(x)=\dfrac{2-(N+2)(N+1)x^n+2N(N+2)x^{n+1}-(N+1)^2x^{N+2}}{(1-x)^3}$.

4 $f(n)=1, n=0,1,2,\ldots$ Ответ: $f^*(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

5 $f(n)=\alpha^n,\ n=0,1,2,\ldots$ Ответ: $f^*(x)=\dfrac{1}{1-\alpha x}$.

4 Лабораторная работа № 4. Приложения метода производящих функций

Основные теоретические сведения.

Производящие функции являются удобным инструментом для доказательства тождеств, связанных с биномиальными коэффициентами.

Пример 1 **–** Доказать тождество: $\sum\limits_{r=0}^{k} C_n^k \cdot C_m^{k-r} = C_{n+m}^k$.

Доказательство.

Рассмотрим конечные последовательности биномиальных коэффициентов C_n^r и C_m^r, где $r=0,1,\ldots,\max(n,m)$ и их производящие функции

$$f(t)=\sum_{r=0}^{n} C_n^r t^r=(t+1)^n \text{ и } g(t)=\sum_{r=0}^{m} C_m^r t^r=(t+1)^m.$$

Тогда $f(t)\cdot g(t)=(t+1)^n\cdot(t+1)^m=(t+1)^{n+m}=\sum\limits_{s=0}^{n+m} C_{n+m}^s t^s$. С другой стороны, перемножаем многочлены: $f(t)\cdot g(t)=\left(\sum\limits_{r=0}^{n} C_n^r t^r\right)\cdot\left(\sum\limits_{r=0}^{m} C_m^r t^r\right)=\sum\limits_{s=0}^{n+m}\left(\sum\limits_{r=0}^{s} C_n^r\cdot C_m^{s-r}\right)t^s$.

Приравнивая коэффициенты при t^k, получаем требуемое тождество.

Метод производящих функций позволяет находить формулу общего члена последовательности по рекуррентной формуле.

Пример 2 **–** Найти общий член последовательности чисел Фибоначчи. Числа Фибоначчи B_n равны числу способов расположения n знаков, из которых каждый – нуль или единица, в последовательность, не содержащую двух нулей подряд. Эта последовательность задается рекуррентной формулой

$$\begin{cases} B_0 = 1,\ B_1 = 2, \\ B_n = B_{n-1} + B_{n-2},\ n \geq 2. \end{cases}$$

Решение

Рассмотрим производящую функцию последовательности чисел Фибоначчи $f_B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k t^k$. Умножим рекуррентное уравнение на t^k и просуммируем полученное выражение от двух до бесконечности. Два числа $B_0 = 1$ и $B_1 = 2$ известны из начальных условий, поэтому необходимо отбросить индексы $k = 0$ и $k = 1$. Получим уравнение

$$\sum_{k=2}^{\infty} B_k t^k = \sum_{k=2}^{\infty} B_{k-1} t^k + \sum_{k=2}^{\infty} B_{k-2} t^k \text{ или } \sum_{k=2}^{\infty} B_k t^k = t \sum_{k=2}^{\infty} B_{k-1} t^{k-1} + t^2 \sum_{k=2}^{\infty} B_{k-2} t^{k-2}.$$

Так как $f_B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k t^k = B_0 + B_1 t + B_2 t^2 + \ldots + B_k t^k + \ldots$, то

$$\sum_{k=2}^{\infty} B_k t^k = f_B(t) - B_0 - B_1 t = f_B(t) - 1 - 2t,$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} B_{k-1} t^{k-1} = \left[k - 1 = n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} B_n t^n = f_B(t) - B_0 = f_B(t) - 1.$$

Аналогично, $\sum_{k=2}^{\infty} B_{k-2} t^{k-2} = \left[k - 2 = n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} B_n t^n = f_B(t)$.

Тогда $f_B(t) - 1 - 2t = t\left(f_B(t) - 1\right) + t^2 f_B(t)$ или $f_B(t)\left(1 - t - t\ \right) = 1 + t$.

Таким образом, $f_B(t) = \dfrac{1+t}{1-t-t^2}$ – производящая функция последовательности чисел Фибоначчи.

Так как обычный степенной ряд, представляющий производящую функцию, есть ряд Тейлора в окрестности точки $t = 0$, то приведенное выражение можно разложить по общему правилу в ряд Тейлора и получить формулу общего члена B_k (выполнить самостоятельно).

Окончательно получаем $B_0 = 1,\ b_1 = 2,\ B_k = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right)$.

Постановка задачи.

Выполнить упражнения.

1 Применить технику производящих функций для нахождения суммы:

а) $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \sum_{i=0}^{n} i^2$; б) $1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \sum_{i=0}^{n} i^3$.

Ответ: а) $\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$; б) $\left(\dfrac{k(k+1)}{2}\right)^2$.

2 Решить рекуррентные соотношения:

а) $a_{n+3} = 3a_{n+2} - a_{n+1} + 3a_n,\ a_0 = 1,\ a_1 = 3,\ a_2 = 8$;

б) $a_{n+3} + a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0,\ a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 3$.

Ответ: а) $\begin{cases} a_{2k} = \dfrac{1}{10}\left(9\cdot 3^{2k} + (-1)^k\right), \\ a_{2k+1} = \dfrac{1}{10}\left(9\cdot 3^{2k+1} + 3(-1)^k\right); \end{cases}$ б) $a_n = (-1)^n(n-1) + 2$.

3 Доказать тождества, используя метод производящих функций:

а) $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1},\ k = 1, 2, ..., n+1$, начальные условия $C_1^0 = C_1^1 = 1$;

б) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

5 Лабораторная работа № 5. Метод включений и исключений

Основные теоретические сведения.

Пусть дано n-множество S некоторых элементов и N-множество свойств p_1, p_2, …, p_N, которыми элементы множества могут как обладать, так и не обладать. Требуется найти число элементов, не обладающих ни одним из вышеперечисленных свойств.

Выделим какую-либо r-выборку свойств $\left(p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_r}\right)$. Число элементов множества S, каждый из которых обладает всеми выбранными свойствами, обозначим через $n\left(p_{i_1}, p_{i_2}, ..., p_{i_r}\right)$. Отсутствие у элементов свойства p_i будем обозначать через $\bar{p}_i$. Таким образом, число элементов, обладающих, скажем, свойствами p_1, p_3, p_5 и не обладающих свойствами p_2, p_4, p_6, запишется как $n\left(p_1, \bar{p}_2, p_3, \bar{p}_4, p_5, \bar{p}_6\right)$.

Если имеется только одно свойство p, то, очевидно, $n(\bar{p}) = n - n(p)$. Если имеется конечное число свойств p_1, p_2, …, p_N, несовместимых друг с другом, то $n(\bar{p}_1, \bar{p}_2, ..., \bar{p}_N) = n - \sum\limits_{i=1}^{N} n(p_i)$. В более общем случае, когда элементы множества могут обладать комбинациями совместимых свойств, имеет место следующая теорема.

Теорема.

Если даны n-множество элементов и N-множество свойств $p_i,\ i = \overline{1, N}$, то

$$n\left(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_N\right) = n - \sum_{i=1}^{N} n\left(p_i\right) + \sum_{1 \le i < j \le N} n\left(p_i, p_j\right) -$$
$$- \sum_{1 \le i < j < k \le N} n\left(p_i, p_j, p_k\right) + \ldots + (-1)^N n\left(p_1, p_2, \ldots, p_N\right).$$

Чтобы получить элементы, не обладающие ни одним из указанных свойств, необходимо из n-множества исключить элементы, обладающие свойством p_1, затем – свойством p_2 и т. д., т. е. $\sum_i n\left(p_i\right)$ элементов. Однако при этом элементы, имеющие два свойства, скажем p_1 и p_2, оказались исключенными дважды (сначала как обладающие свойством p_1, затем как обладающие свойством p_2). Значит надо возвратить все множества, элементы которых обладают двумя свойствами, т. е. прибавить $\sum_{1 \le i < j \le N} n\left(p_i, p_j\right)$ элементов. Но при этом элементы, обладающие тремя свойствами, скажем p_1, p_2 и p_3, оказались включенными, следовательно, надо вычесть $\sum_{1 \le i < j < k \le N} n\left(p_i, p_j, p_k\right)$. Рассуждая далее аналогичным образом, получим алгоритм для вычисления $n\left(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_N\right)$, состоящий в попеременном отбрасывании и возвращении подмножеств. Это определило одно из названий метода: *метод включений и исключений*. Этот метод встречается также под названиями: метод решета, логический метод, принцип перекрестной классификации, символический метод.

Алгоритм метода можно применить для любой комбинации свойств. В левой части равенства может стоять не только $n\left(\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_N\right)$, но и, например, $n\left(p_1, \bar{p}_2, p_3, \bar{p}_4\right)$. Теорема формулируется при этом относительно совокупности свойств p_2 и p_4 с обязательным выполнением свойств p_1 и p_3 следующим образом:

$$n\left(p_1, \bar{p}_2, p_3, \bar{p}_4\right) = n\left(p_1, p_3\right) - n\left(p_1, p_2, p_3\right) - n\left(p_1, p_3, p_4\right) + n\left(p_1, p_2, p_3, p_4\right).$$

Постановка задачи.

Пусть имеется конечное упорядоченное множество чисел 1, 2, …, n. Для них могут быть образованы перестановки: a_1, a_2, …, a_n. Число всех перестановок $s = n!$ Среди этих перестановок имеются такие, где ни один элемент не сохранил своего первоначального места: $a_i \ne i$, $i = 1$, 2, …, n. Такие перестановки называются *беспорядками*.

1 С помощью метода включений и исключений найти число беспорядков.

2 Используя результат, полученный в пункте 1, найти число перестановок, в которых остаются на своих местах s элементов.

6 Лабораторная работа № 6. Системы представителей множеств

Основные теоретические сведения.

Пусть имеются n-множество S и множество $P(S)$ всех его подмножеств. Пусть $M=(S_1,S_2,...,S_m)$ есть некоторая m-выборка из $P(S)$, а $a=(a_1,a_2,...,a_m)$ есть некоторая m-выборка из S. Если выборке M можно сопоставить (не обязательно однозначно) выборку a такую, что элементы a_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$, попарно различны и при этом $a_i \in S_i$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$, то говорят, что элемент a_i представляет множество S_i, а вся выборка $(a_1,a_2,...,a_m)$ называется *системой различных представителей* для M. Заметим, что если $i \neq j$, то $a_i \neq a_j$, даже если $S_i = S_j$. Если множество появляется несколько раз, то всякий раз оно должно иметь представителя, отличного от всех других.

Система различных представителей может существовать не для всяких совокупностей множеств. На вопрос о том, существует ли система различных представителей для заданного семейства множеств, отвечает теорема английского математика Филиппа Холла, найденная последним не позже 1935 г. и дающая необходимые и достаточные условия существования системы различных представителей.

Теорема Ф. Холла.

Подмножества S_1, S_2, …, S_m имеют систему различных представителей тогда и только тогда, когда объединение любых k из этих множеств содержит не менее k элементов. Иными словами, система различных представителей для S_1, S_2, …, S_m существует тогда и только тогда, когда $S_{i_1} \cup S_{i_2} \cup ... \cup S_{i_k}$ состоит не менее чем из k элементов, при этом $k=1,\ 2,\ \ldots,\ m$, а $(i_1,i_2,...,i_m)$ – любая k-выборка из 1, 2, …, m.

Практически очень трудно проверить, выполняются ли в данном конкретном случае условия теоремы Ф. Холла. Алгоритм, который позволяет подобрать систему различных представителей для конечного числа множеств или показать, что такой системы для данного набора множеств не существует, дал американский математик Маршалл Холл Мл. в качестве доказательства теоремы Ф. Холла о различных представителях.

Пусть задано n множеств: S_1, S_2, …, S_n. Требуется найти для них систему различных представителей или показать, что этой системы не существует. Произвольным образом выберем элемент первого множества $a_1 \in S_1$ в качестве его представителя. Поочерёдно будем выбирать представителей других множеств: $a_2 \in S_2$, $a_3 \in S_3$, …, заботясь только о том, чтобы все они были различными. Если мы доведём этот процесс до $a_n \in S_n$ включительно, то получим искомую систему различных представителей.

Может случиться, что на r-м шаге мы дойдем до некоторого t-множества S_r, все элементы которого b_1, b_2, …, b_t уже были выбраны представителями других множеств. Это, однако, ещё не означает, что система различных представителей не существует. Будем брать поочередно все множества, элементами которых являются b_i ($i = 1, 2, \ldots$), и удалять из них все элементы последовательности b_1, b_2, …, b_t, а оставшиеся приписывать в конец этой последовательности. Так будем поступать до тех пор, пока не случится одно из двух:

1) мы достигнем элемента b_i, который не может служить представителем;

2) последовательность исчерпывается элементами b_1, b_2, …, b_s как представителями множеств.

В случае 2 мы можем быть убеждены, что система различных представителей не существует. Если же имеет место случай 1, то на некотором этапе мы находим элемент $b_i = b_{i_1} \in S_{j_1}$ $(i_1 > t)$, не являющийся до сих пор представителем. Это означает, что представителем S_{j_1} уже был выбран другой элемент b_{i_2} $(i_2 < i_1)$. Если $i_2 > t$, то значит $b_{i_2} \in S_{j_2}$, представителем которого является b_{i_3} $(i_3 < i_2)$, и т. д. Таким образом, возникает последовательность, индексы которой убывают $b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_m}$, причем в этой последовательности каждый её член входит в множество, представителем которого является следующий член. Заменяем представителей, выбирая элементы: b_{i_1} для S_{j_2}, b_{i_2} для S_{j_3}, …, $b_{i_{m-1}}$ для S_{j_m}. Элемент b_{i_m} в результате этой замены освобождается для выбора в качестве представителя S_r. Итак, S_1, …, S_r имеют различных представителей, и мы можем следовать тем же путем, имея в виду либо возможность дойти до S_n и получить полную систему различных представителей, либо встретить случай 2 и установить несуществование системы различных представителей.

Понятие о представителях множеств и о системах представителей находит в математике многочисленные и разнообразные приложения; например, это представители классов эквивалентности. Метод систем представителей встречается также в теории сетей при исследовании допустимости потоков и в теории расширения латинских квадратов.

Постановка задачи.

Матрицу $A = \left(a_{ij}\right)$ размера $m \times n$, в которой $a_{ij} = \begin{cases} 1, s_j \in S_i, \\ 0, s_j \notin S_i, \end{cases}$ $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$

называют *матрицей инцидентности* для M по отношению к S.

Перманентом квадратной матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ порядка m называется $\operatorname{per} A = \sum\limits_{i_1, \ldots, i_m} a_{1 i_1} \ldots a_{m i_m}$, где суммирование производится по всевозможным перестановкам чисел 1, …, m.

1 Пусть A – матрица инцидентности для M по отношению к S. Доказать, что число различных представителей для M равно перманенту матрицы A.

2 Пусть матрица инцидентности для M – такая, что количество единиц в каждой строке и каждом столбце равно фиксированному числу r ($1 \le r \le m$). Доказать, что существует система различных представителей для M.

3 Пусть A и B – два конечных множества и $k \ge 1$ – натуральное число. Между A и B установлено такое многозначное соответствие, что каждому элементу множества A соответствует ровно k элементов множества B и каждому элементу из B соответствует ровно k элементов из A. Не добавляя новых связей, установить взаимно-однозначное соответствие между множествами A и B.

7 Лабораторная работа № 7. Начала теоремы Рамсея

Основные теоретические сведения.

Операция разбиения множеств лежит в основе бесчисленного количества практических задач. Рассмотрим подход, позволяющий получить данные о характере самих разбиений и о возможности осуществлять разбиение заданного заранее типа.

Пусть имеется n-множество S, элементы которого должны быть размещены по двум ящикам. Каким должно быть число n, чтобы обеспечить попадание либо в первый ящик q_1 элементов, либо во второй ящик q_2 элементов? Ответ почти очевиден: $n \ge q_1 + q_2 - 1$. Таким образом, минимальное число элементов, обеспечивающих решение задачи, равно $N(q_1, q_2; 1) = q_1 + q_2 - 1$.

Если ставится задача о распределении не в два, а более (скажем, t) ящиков, причём соответственные числа, характеризующие требуемое заполнение ящиков, суть q_1, q_2, …, q_t, то $N(q_1, q_2, \ldots, q_t; 1) = \sum_{i=1}^{t} q_i - (t-1)$.

В 1930 г. английский математик Фрэнк Пламптон Рамсей доказал теорему, в которой эти частные результаты были обобщены. Вместо распределения единичных элементов n-множества в этой теореме имеют дело с распределением его r-подмножеств. Обозначим через S_n множество из n элементов, а через $P_r(S_n)$ – совокупность его r-подмножеств.

Теорема Рамсея.

Пусть $r \ge 1$, $q_i \ge r$ ($i = 1, \ldots, t$). Существует такое наименьшее натуральное $N = N(q_1, \ldots, q_t; r)$, что для любого $n \ge N$ и любого упорядоченного t-разбиения $P_r(S_n) = A_1 \cup \ldots \cup A_t$ найдется (при некотором $i \in \{1, \ldots, t\}$) (q_i, A_i)-подмножество, т. е. такое q_i-подмножество множества S_n, все r-подмножества которого содержатся в A_i.

Приведенные выше примеры, относящиеся к разбиениям множеств, являются частными случаями теоремы Рамсея при $r=1$, $P_r(S)=S$, а (q_i, A_i) -множество есть просто q_i-подмножество множества A_i. Для частного случая, когда $t=1$, имеем $N(q_1, r)=q_1$.

Казалось бы, что для любого t-разбиения и при любых подходящих $(q_1, q_2, ..., q_t; r)$ можно определить $\min n = N(q_1, q_2, ..., q_t; r)$, существование которого в силу теоремы Рамсея обеспечено. Но это оказалось исключительно трудным делом, т. к. ещё нет никакого метода подсчёта этих чисел, называемых *числами Рамсея*.

Усилия в части отыскания чисел Рамсея не прекращаются, поскольку проблема допускает многочисленные интерпретации и разнообразные приложения. В теории графов, например, она интерпретируется как задача об окрашивании рёбер графов. Сама проблема отыскания чисел Рамсея часто рассматривается для отдельных классов графов.

Постановка задачи.

Имеется шесть точек, связанных попарно дугами, окрашенными в красный или голубой цвет.

1 Доказать, что существуют три точки такие, что дуги образуемого ими треугольника окрашены в один и тот же цвет.

2 Какое минимальное число точек гарантирует наличие треугольника одного цвета?

3 Привести пример множества из пяти точек, соединённых попарно красными или голубыми дугами так, что при этом не образуется треугольника одного цвета.

Назовем треугольник *хроматическим*, если три его дуги одного и того же цвета.

4 Показать, что существует не менее двух хроматических треугольников.

5 Показать, что если имеется семь точек, соединенных попарно голубой или красной дугой, то существует не менее трёх хроматических треугольников.

8 Лабораторная работа № 8. Системы инцидентности и специальные матрицы

Основные теоретические сведения.

Пример 1 – Построить матрицу перестановки $(5 \quad 3 \quad 4 \quad 1 \quad 2)$.

Решение

Матрицей перестановки $(k_1, k_2, ..., k_n)$ называется матрица порядка *n*, в которой $a_{k_j i}=1$ для $j=1, ..., n$; $a_{ij}=0$ для $i \neq k_j$.

Строки искомой матрицы соответствуют номерам элементов перестановки, а столбцы – порядковым номерам мест.

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица перестановки есть квадратная матрица, в которой в каждой строке и каждом столбце стоит ровно одна единица. Она обладает тем свойством, что $PP^T=E$, где E – единичная матрица.

Пример 2 – Найти перманент матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение

Пусть дана матрица $A=\left(a_{ij}\right)$ $(i=1,\dots,m;\quad j=1,\dots,n)$. Её *перманентом* называют число $\operatorname{per} A=\sum a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{mi_m}$. Здесь суммирование производится по всем m-перестановкам $\left(i_1,i_2,\ \dots,i_m\right)$ целых чисел 1, 2, ..., n $(m\le n)$. Перманент A не меняется при перестановке строк или столбцов матрицы.

$$\operatorname{per} A_{2\times 3}=a_{11}a_{22}+a_{11}a_{23}+a_{12}a_{21}+a_{12}a_{23}+a_{13}a_{21}+a_{23}a_{22}=$$
$$=3\cdot 7+3\cdot 4+(-2)\cdot 0+(-2)\cdot 4+5\cdot 0+5\cdot 7=60.$$

Пример 3 – Составить матрицу инцидентности системы троек $\{1,2,3\}$, $\{1,4,5\}$, $\{1,6,7\}$, $\{2,4,6\}$, $\{2,5,7\}$, $\{3,4,7\}$, $\{3,5,6\}$ по отношению к множеству $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Найти перманент этой матрицы.

Решение

Составим матрицу инцидентности

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем перманент этой матрицы: $\operatorname{per} A_{7\times 7} = 24$.

Пример 4 – Составить матрицу попарных сравнений для множества чисел $\{3,2,1,4,5\}$.

Решение

Элементы матрицы попарных сравнений для множества чисел $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ $a_{ij} = 1$, если $b_i > b_j$, и $a_{ij} = 0$ в противном случае. Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 5 – Является ли матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ матрицей Адамара?

Решение

Матрицей Адамара называется квадратная матрица, состоящая из элементов 1 и -1, в которой каждая строка ортогональна всем остальным строкам, а каждый столбец – остальным столбцам.

Проверим выполнение равенства $HH^T = nE$.

$$HH^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4E.$$

Значит, это матрица Адамара.

Постановка задачи.

Научиться строить системы инцидентности и составлять матрицы инцидентности, матрицы перестановок, матрицы попарных сравнений, находить перманент матрицы, матрицы Адамара.

1 Составить матрицы перестановок:

а) $(3 \quad 2 \quad 4 \quad 1)$; в) $(2 \quad 4 \quad 3 \quad 1)$;

б) $(1 \quad 2 \quad 4 \quad 3)$; г) $(3 \quad 4 \quad 2 \quad 1)$;

2 Составить матрицы инцидентности систем подмножеств:

а) $\{1,3,4\}$, $\{2,3,7\}$, $\{2,6\}$, $\{4,5\}$; в) $\{1,2,3\}$, $\{2,4,5\}$, $\{1,4\}$, $\{6,7\}$;

б) $\{2,3,5,6\}$, $\{1,4,7\}$, $\{2,3\}$, $\{1,5\}$; г) $\{1,2,5\}$, $\{2,4,5\}$, $\{1,2,6,7\}$, $\{3,4,6\}$

по отношению к множеству $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Найти перманенты этих матриц.

3 Имеются n игроков, каждый из которых играет с каждым из остальных игроков по одной партии. Рассмотреть случай, когда i-й игрок выигрывает у j-го при $i < j$:

а) $n = 6,\ i, j = 1, \ldots, 6$; в) $n = 5, i, j = 1, \ldots, 5$.

б) $n = 7, i, j = 1, \ldots, 7$;

Требуется составить матрицы попарных сравнений выигрышей при условии, что ставки во всех партиях одинаковые.

4 Является ли матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ матрицей Адамара?

9 Лабораторная работа № 9. Латинские прямоугольники и квадраты

Основные теоретические сведения.

Пример 1 – Найти все латинские прямоугольники 3×5 из элементов 1, 2, 3, 4, 5, содержащие первые две строки

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{matrix}$$

Решение

Латинским прямоугольником называется прямоугольная таблица размера $m\times n$, в которой в каждой строке и каждом столбце элементы не повторяются.

В качестве третьей строки можно взять любую из следующих:

3 1 5 2 4, 3 4 5 1 2, 3 5 1 2 4, 3 5 2 1 4,
4 1 5 2 3, 4 1 5 3 2, 4 5 1 2 3, 4 5 1 3 2,
4 5 2 1 3, 5 1 2 3 4, 5 4 1 2 3, 5 4 1 3 2,
5 4 2 1 3.

Пример 2 – Найти все дважды нормализованные (по строке и столбцу) латинские квадраты 4×4.

Решение

Латинский прямоугольник называется *нормализованным*, если элементы первой строки (или первого столбца) расположены в заранее фиксированном порядке (чаще всего $1, 2, \ldots, n$).

Если $m = n$, имеем *латинский квадрат*.

Всего возможно построить четыре дважды нормализованных латинских квадратов 4×4:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{matrix}; \quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{matrix}.$$

Постановка задачи.

Научиться строить латинские прямоугольники и квадраты.

1 Сколькими способами можно составить таблицу размера $2 \times n$, первая строка которой есть $1 \ 2 \ \ldots \ n$, а вторая является перестановкой чисел $1, 2, \ \ldots, \ n$ так, чтобы ни в одном столбце этой таблицы не было повторений чисел, если:

а) $n = 7$; б) $n = 8$; в) $n = 9$.

2 Сколько можно составить латинских прямоугольников вида:

а) $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix}$; б) $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix}$; в) $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix}$.

3 Сколько существует латинских прямоугольников размера $3 \times n$ из пяти элементов с первой строки 1 2 3 4 5, если:

а) $n = 4$; б) $n = 5$; в) $n = 6$.

4 Найти все дважды нормализованные латинские квадраты $n \times n$, если:

а) $n = 3$; б) $n = 5$; в) $n = 6$.

10 Лабораторная работа № 10. Блок-схемы

Основные теоретические сведения.

Пример 1 – Построить BIB-схему с параметрами $v = b = 7, \ k = r = 3, \lambda = 1$.

Решение

Блок-схема – система подмножеств конечного множества, удовлетворяющая некоторым условиям, связанным с частотой появления пар элементов множества в подмножествах системы. Блок-схема задается парой множеств (V, B), где $V = \{a_1, a_2, \ldots, a_v\}$ – элементы блок-схемы, $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_b\}$ – её блоки. Причем $B_i \subseteq V, i = \overline{1, b}$. Элемент a_i и блок B_j инцидентны, если $a_i \in B_j$.

Число $|B_j|$ элементов, инцидентных блоку B_j, обозначается через k_j, а число блоков, инцидентных элементу a_i, – через r_i. Через λ_{ii} обозначается число $\left|\left\{B_j : a_i \in B_j, a_i \in B_j\right\}\right|$. Числа $v, b, r_i, k_j, \lambda_{ii}$ $\left(i=\overline{1,v};\ j=\overline{1,b}\right)$ называются *параметрами* блок-схемы. Если $\forall i=\overline{1,v}\quad r_i = r$, $\lambda_{ii}=\lambda$, $\forall j=\overline{1,b}\ \ k_j = k$, то (V, B) есть *уравновешенная неполная* блок-схема или BIB-схема. Для BIB-схем справедливы равенства: $\begin{cases} vr = kb, \\ \lambda(v-1) = r(k-1). \end{cases}$

Имеем следующую BIB-схему с параметрами $v=6,\ b=10,\ k=3, r=5, \lambda=2$.

1	1	1	1	1	2	3	2	3	2
2	3	4	5	2	3	4	4	5	4
3	4	5	6	6	5	6	5	6	6

Пример 2 – Составить матрицу инцидентности BIB-схемы с параметрами $v=6,\ b=10,\ k=3,\ r=5, \lambda=2$.

Решение

Матрицей инцидентности BIB-схемы с параметрами $v, b, r_i, k_j, \lambda_{ii}$ называется матрица размером $v \times b$ с элементами

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й элемент находится в } j\text{-м блоке,} \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $i=\overline{1,v},\quad j=\overline{1,b}$.

Каждая строка матрицы инцидентности содержит r единиц, а каждый столбец – k единиц.

Матрица инцидентности BIB-схемы удовлетворяет основному матричному соотношению $AA^T = (r-\lambda)E + \lambda J$, где $E-$ единичная матрица порядка v, $J-$ матрица порядка v, составленная из единиц.

Матрица инцидентности BIB-схемы с параметрами $v=6,\ b=10,\ k=3,\ r=5$, $\lambda=2$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Постановка задачи.

Ознакомиться с одним из видов блок-схем – BIB-схемами. Научиться проводить анализ существования BIB-схем с различными параметрами, строить BIB-схемы и их матрицы инцидентности.

1 Построить BIB-схемы с параметрами:

а) $v=b=13,\ k=r=4, \lambda=1$; в) $v=9,\ b=12,\ k=3,\ r=4, \lambda=1$.

б) $v=b=7,\ k=r=3, \lambda=1$;

2 Существуют ли BIB-схемы с параметрами:

а) $v=15,\ b=21,\ k=5,\ r=7, \lambda=2$; в) $v=36,\ b=42, k=6,\ r=7, \lambda=1$;

б) $v=b=22,\ k=r=7, \lambda=2$; г) $v=b=43,\ k=r=7, \lambda=1$.

3 Составить матрицы инцидентности BIB-схемы с параметрами:

а) $v=b=13,\ k=r=4, \lambda=1$; в) $v=9,\ b=12,\ k=3,\ r=4, \lambda=1$.

б) $v=b=7,\ k=r=3, \lambda=1$;

Проверить основное матричное соотношение.

11 Лабораторная работа № 11. Графические интерпретации и задачи

Основные теоретические сведения.

Граф в общем виде можно определить как совокупность множества V (вершин) и отображения α множества $V \times V$ в некоторое множество M.

Если $M=N$, граф называется *мультиграфом*; если $M=\{0,1\}$ – *обыкновенным графом*; $M=R^{+}$ – *сетью*.

Пары $(a,b)\in V\times V$, для которых $\alpha(a,b)>0$, называются *ребрами*. Если $\alpha(a,b)>1$, то ребро (a,b) называется *кратным*, а граф G, содержащий кратные ребра, – *мультиграфом*, число $\alpha(a,b)$ – *кратностью ребра*. Если $\forall(a,b)$ $\alpha(a,b)\le 1$, говорят, что граф без кратных ребер.

Если $|V|=n$ – конечное число, то граф называется *конечным*, а число n – его *порядком*.

Если $\forall(a,b)\in V\times V \quad \alpha(a,b)=\alpha(b,a)$, то граф G называется *неориентированным*. В противном случае граф ориентирован – *орграф*.

Если $\forall a\in V \quad \alpha(a,a)=0$, то говорят, что граф G не имеет *петель*. В противном случае граф G с петлями.

Обыкновенным называется конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер.

$X\subseteq V\times V$ задает множество рёбер графа $G(V,X)$.

Вершины $a,b\in V$ графа $G=(V,X)$ называются *смежными*, если $(a,b)\in X$.

Вершина $a\in V$ и ребро $(b,c)\in X$ называются *инцидентными*, если $a=b$ или $a=c$.

Число $|X|$ называется *размерностью* графа $G=(V,X)$.

Матрица $A=\left(a_{ij}\right)$, где $a_{ij}=\alpha\left(a_i,a_j\right)$ $(a_i,a_j\in V)$, называется *матрицей смежности* графа $G=(V,X)$.

Для неориентированного графа матрица A обладает условием $a_{ij}=a_{ji}$; для графа без петель $a_{ii}=0$ $(1\le i\le|V|)$.

Степенью вершины $a\in V$ называется число $\deg a=\left|\{b\in V:(a,b)\in X\}\right|$.

Если $\forall a,b\in V$ $\deg a=\deg b=d$, то граф называется *однородным* (*регулярным*) *степени* d.

Если в графе G имеется k_i вершин степени i, то выражение $\left(1^{k_1}2^{k_2}...n^{k_n}\right)$ называется *распределением вершин* графа G по степеням.

Полным графом K_n на n вершинах называется граф $G=(V,X)$, у которого $|V|=n$, $X=(V\times V)\setminus\{(a,a),a\in V\}$ ($|X|=C_n^2$).

Кликой графа называется любой его максимальный полный подграф.

Граф $G=(V,X)$ называется *связным*, если $\forall a,b\in V$ $\exists c_1,\ ...,c_k\in V$ $\left(a,c_1\right),\left(c_1,c_2\right),...,\left(c_k,b\right)\in X$.

Максимальный связный подграф графа G называется его *компонентой связности*.

Граф называется *планарным*, если его вершины и ребра можно уложить в плоскости так, что рёбра не пересекутся.

Хроматическим числом $\mathrm{chr}\,G$ $(\chi(G))$ графа G называется такое наименьшее положительное число n, что существует отображение множества V на множество $\{1,2,...,n\}$ («цветов»), при котором смежные вершины получают разные «цвета».

Граф $G_1=(V_1,X_1)$ называется *изоморфным* графу $G_2=\left(V_2,X_2\right)$, если существует такое взаимно однозначное отображение $\beta:V_1\xrightarrow{\beta}V_2$, при котором $\forall a,b\in V_1$ $\left(a,b\right)\in X_1\Longleftrightarrow\left(\beta a,\beta b\right)\in X_2$ $\left(G_1\cong G_2\right)$.

В матричном виде $T^TAT=B$, где A,B – матрицы смежности вершин графов G_1 и G_2 соответственно; T – матрица подстановки, соответствующей отображению β.

Автоморфизм графа G – это изоморфизм графа на себя. В матричном виде $T^TAT=A$.

Граф, не содержащий циклов, называется *лесом*.

Дерево – это связный граф без циклов.

Графом n*-перестановок* назовем граф, вершины которого – все перестановки элементов n-множества и две вершины смежны в том и только том случае

Постановка задачи.

1 Дан орграф $G=(V,U)$, где V – множество вершин, $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$; U – множество дуг:

а) $\{(v_1,v_6),(v_2,v_3),(v_2,v_5),(v_2,v_4),(v_3,v_1),(v_4,v_1),(v_4,v_3),(v_5,v_1),(v_5,v_3),(v_5,v_4)\}$;

б) $\{(v_1,v_3),(v_1,v_4),(v_1,v_5),(v_2,v_1),(v_2,v_5),(v_2,v_6),(v_4,v_3),(v_5,v_4),(v_6,v_1),(v_6,v_5)\}$;

в) $\{(v_1,v_4),(v_2,v_4),(v_2,v_5),(v_3,v_1),(v_3,v_2),(v_3,v_6),(v_5,v_4),(v_6,v_1),(v_6,v_5),(v_6,v_2)\}$;

г) $\{(v_1,v_2),(v_1,v_4),(v_2,v_4),(v_3,v_2),(v_3,v_4),(v_3,v_6),(v_4,v_6),(v_5,v_1),(v_5,v_2),(v_5,v_3)\}$.

Следует:

1) построить граф;

2) составить матрицу смежности вершин орграфа, матрицу смежности дуг, матрицу инциденций;

3) упорядочить вершины орграфа и построить изоморфный граф.

2 Найти произведение графов (рисунок 1).

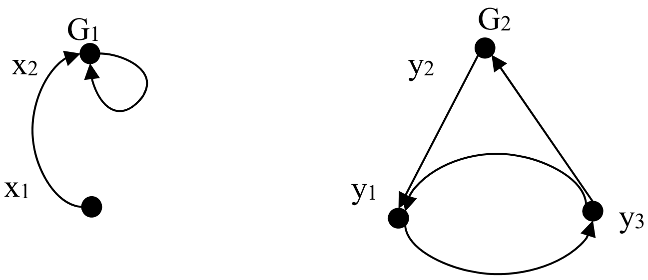


Рисунок 1 – Графы

3 Найти декартово произведение следующих графов (рисунок 2).

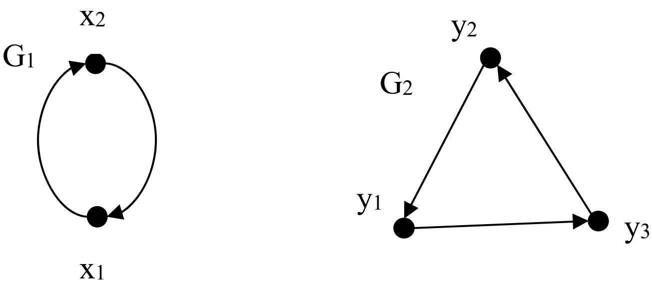


Рисунок 2 – Графы

4 Найти композицию графов (рисунок 3).

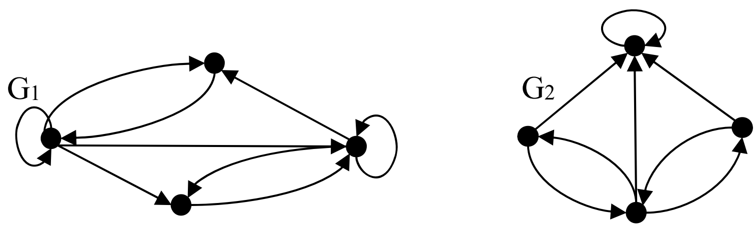


Рисунок 3 – Графы

12 Лабораторная работа № 12. Перечислительные задачи на графах

Основные теоретические сведения.

Пример – Рассмотрим восемь классов графов с отмеченными вершинами. Каждый из этих классов определяется заданием параметров α, β, γ, принимающих значения 0 или 1, и его элементы назовём (α, β, γ)-графами. При этом, если $\alpha = 0$, то рассматриваются графы без петель, если $\alpha = 1$, то петли допускаются; если $\beta = 0$, то рассматриваются графы без параллельных ребер, если $\beta = 1$, то параллельные ребра допускаются; если $\gamma = 0$, то рассматриваются неориентированные графы, если $\gamma = 1$, то вводится ориентация ребер.

Обозначим $g_{\alpha,\beta,\gamma}(n,k)$ число (α, β, γ)-графов с n вершинами и k ребрами. Доказать, что

$$g_{0,0,0}(n,k) = \binom{n(n-1)/2}{k}; \; g_{0,1,0}(n,k) = \binom{\frac{n(n-1)}{2} + k - 1}{k}.$$

Какое максимальное число ребер может иметь (α, β, γ)-граф?

Решение

Число $(\alpha, 0, \gamma)$-графов с n вершинами и k ребрами равно числу k-подмножеств соответствующего множества всех возможных ребер. Поэтому для написания формул достаточно знать мощность множества ребер. В случае неориентированных графов она равна $n(n-1)/2$, если петли исключаются, и равна $n(n-1)/2$, если петли допускаются. В случае ориентированных графов она равна $n(n-1)$ и $n(n+1)$ соответственно.

Следовательно,

$$g_{0,0,0}(n,k) = \binom{n(n-1)/2}{k}.$$

Способ получения формул для $g_{\alpha,1,\gamma}(n,k)$ рассмотрим на примере $(0,1,0)$-графа. Перенумеруем возможные пары вершин такого графа с n вершинами. Пусть $x_i \geq 0$ – число ребер, соединяющих i-ю пару вершин в $(0,1,0)$-графе с n вершинами и k ребрами. Имеем уравнение в целых неотрицательных числах:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n(n-1)/2} = k.$$

Число различных решений этого уравнения есть

$$\binom{\frac{n(n-1)}{2}+k-1}{k}=g_{0,1,0}(n,k),$$

поскольку каждый $(0,1,0)$-граф однозначно определяется набором величин $\left(x_1,x_2,\ \dots,x_{n(n-1)/2}\right)$.

Из полученного следует, что максимально возможное число ребер в $(0,0,0)$-графе с n вершинами есть $\frac{n(n-1)}{2}$.

Максимально возможное число ребер в $(0,1,0)$-графе бесконечно.

Постановка задачи.

Ознакомиться с некоторыми перечислительными задачами на графах. Доказать предложенные равенства.

1 Рассмотрим восемь классов графов с отмеченными вершинами. Каждый из этих классов определяется заданием параметров $\alpha,\ \beta,\ \gamma$, принимающих значения 0 или 1, и его элементы назовем (α,β,γ)-графами. При этом, если $\alpha=0$, то рассматриваются графы без петель, если $\alpha=1$, то петли допускаются; если $\beta=0$, то рассматриваются графы без параллельных ребер, если $\beta=1$, то параллельные ребра допускаются; если $\gamma=0$, то рассматриваются неориентированные графы, если $\gamma=1$, то вводится ориентация рёбер.

Обозначим $g_{\alpha,\beta,\gamma}(n,k)$ число (α,β,γ)-графов с n вершинами и k ребрами.

Доказать, что

а) $g_{1,0,0}(n,k)=\binom{n(n+1)/2}{k}$;

б) $g_{0,0,1}(n,k)=\binom{n(n-1)}{k}$;

в) $g_{0,1,1}(n,k)=\binom{n(n-1)+k-1}{k}$;

г) $g_{1,1,0}(n,k)=\binom{\frac{n(n+1)}{2}+k-1}{k}$;

д) $g_{1,0,1}(n,k)=\binom{n^2}{k}$;

е) $g_{1,1,1}(n,k)=\binom{n^2+k-1}{k}$.

Какое максимальное число ребер могут иметь эти (α,β,γ)-графы?

2 Пусть $G^{(n)}_{\alpha,\beta,\gamma}(y)=\sum\limits_{k\ge 0}^{\infty}g_{\alpha,\beta,\gamma}(n,k)y^k$, $n=1,\ 2,\ \dots$, где $g_{\alpha,0,\gamma}(n,k)=0$, если k больше верхней границы для числа ребер в $(\alpha,\ 0,\ \gamma)$-графе.

Доказать, что

а) $G^{(n)}_{0,0,0}(y)=(1+y)^{n(n-1)/2}$;

б) $G^{(n)}_{0,1,0}(y)=(1-y)^{-n(n-1)/2}$;

в) $G^{(n)}_{0,0,1}(y)=(1+y)^{n(n-1)}$;

г) $G^{(n)}_{0,1,1}(y)=(1-y)^{-n(n-1)}$;

д) $G_{1,0,0}^{(n)}(y)=(1+y)^{n(n+1)/2}$; ж) $G_{1,0,1}^{(n)}(y)=(1+y)^{n^2}$;

е) $G_{1,1,0}^{(n)}(y)=(1-y)^{-n(n+1)/2}$; з) $G_{1,1,1}^{(n)}(y)=(1-y)^{-n^2}$.

3 Пусть $c_{\alpha,\beta,\gamma}(n,k)$ есть число связных (α,β,γ)-графов с n отмеченными вершинами и k ребрами. Пусть $c_{\alpha,0,\gamma}(n,k)=0$, если k больше верхней границы для числа ребер в $(\alpha,0,\gamma)$-графе. Доказать рекуррентное соотношение (формулу Гильберта)

$$g(n+1,k)=\sum_{l=0}^{n}\sum_{m=0}^{k}\binom{n}{l}c(l+1,m)g(n-l,k-m).$$

Начальные условия

$$g(0,0)=1 \text{ и } g(0,k)=0, \text{ если } k>0;\ c(1,0)=1 \text{ и } c(n,0)=0, \text{ если } n>1.$$

13 Лабораторная работа № 13. Экстремальные комбинаторные задачи

Основные теоретические сведения.

Задача о коммивояжере.

Коммивояжеру необходимо посетить несколько городов. Он должен выбрать кратчайший маршрут, чтобы, начав двигаться из своего города, побывать по одному разу в других городах и вернуться назад. Попарные расстояния между городами заданы в виде матрицы $(c_{ij}): i,j=\overline{1,n}$, где n – число всех городов, фигурирующих в задаче.

Математически это означает поиск минимума целевой функции

$$f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

с ограничениями

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1, i=\overline{1,n}, \quad \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1, j=\overline{1,n}$$

относительно неизвестных x_{ij} ($i,j=\overline{1,n}$).

Кроме того, чтобы обеспечить замкнутость маршрутов и отсутствие подциклов (несвязанных между собой), необходимо учесть еще одно условие, а именно

$$u_i-u_j+(n-1)x_{ij}\le n-2, i\ne j, i,j=\overline{2,n}.$$

Здесь $x_{ij}=\begin{cases}1, \text{если переезд осуществляется из } i\text{-го города } j\text{-й город},\\ 0, \text{в противном случае.}\end{cases}$

Данный тип задач может быть решен средствами Excel. Рассмотрим пример.

Пример – Продукцию, находящуюся на складах № 2–4 необходимо перевезти на склад № 1. Автоколонна выезжает со склада № 1, посещает остальные склады, загружает продукцию и возвращается на склад № 1. Расстояние между складами в километрах, представлено матрицей

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} - & 55 & 39 & 28 \\ 55 & - & 31 & 37 \\ 39 & 31 & - & 44 \\ 28 & 37 & 44 & - \end{pmatrix}.$$

Составить наикратчайшей длины маршрут поездки.

Решение

В соответствии с матрицей расстояний запишем целевую функцию

$$f = 55x_{12} + 39x_{13} + 28x_{14} + 55x_{21} + 31x_{23} + 37x_{24} + \\ + 39x_{31} + 31x_{32} + 44x_{34} + 28x_{41} + 37x_{42} + 44x_{43}.$$

Ограничения имеют вид:

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,4},\ \ \sum_{j=1}^{4} x_{ij} = 1, i = \overline{1,4},\ \ u_i - u_j + 3x_{ij} \le 2, i \ne j, i, j = 2, 3, 4.$$

Решение задачи минимизации данных целевой функции и ограничений относительно неизвестных $x_{ij}\ (i, j = \overline{1,4})$ в среде MS Excel осуществляем с помощью надстройки «*Поиск решения*». При этом в качестве диагональных элементов матрицы расстояний заносим любое большое число (в данном примере число 1000000), значительно превосходящее остальные числа в матрице. Результаты решения представлены на рисунке 4.

	A	B	C	D	E	F
1	коэффициенты матрицы затрат cij:					Значение функции *f* :
2		1000000	55	39	28	135
3		55	1000000	31	37	
4		39	31	1000000	44	
5		28	37	44	1000000	
6	Переменные:	Xi1	Xi2	Xi3	Xi4	Значения ограничений
7	X1j	0	0	0	1	1
8	X2j	0	0	1	0	1
9	X3j	1	0	0	0	1
10	X4j	0	1	0	0	1
11	Значения ограничений:	1	1	1	1	
12	Переменные ui:		1	2	0	
13	Формулы для ограничений по дополнительным переменным ui					
14			u2	u3	u4	
15		u2	0	2	1	
16		u3	1	0	2	
17		u4	2	-2	0	

Рисунок 4 – Внешний вид рабочего листа MS Office Excel с исходными данными и результатами решения «Задачи о коммивояжере»

В соответствии с результатами решения имеем: длина кратчайшего маршрута (1 – 4 – 2 – 3 – 1) равна 135 км.

Постановка задачи.

Молочный завод поставляет продукцию в магазины: № 1–16. В таблице 1 представлены варианты магазинов, обслуживаемых при поставке. Составить наикратчайшей длины маршрут поставки. При этом данный маршрут должен начинаться и заканчиваться у магазина № 1, который находится рядом с заводом. На рисунке 5 представлены расстояния между магазинами.

Таблица 1 – Варианты магазинов, обслуживаемых при поставке

Вариант поставки	Номер обслуживаемого магазина	Вариант поставки	Номер обслуживаемого магазина
1	4, 5, 7, 9, 10	6	3, 5, 7, 9
2	3, 6, 7, 10	7	4, 6, 8, 10
3	2, 5, 8, 9	8	4, 7, 8, 9, 10
4	3, 6, 9, 10	9	3, 4, 6, 7, 9
5	2, 3, 7, 8	10	5, 6, 7, 9, 10

	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8	№ 9	№ 10
№ 1	7	8	7,6	7,1	8,5	8,5	7,9	8	8,3
	№ 2	0,3	1,9	1,3	1,2	1,3	0,8	0,8	1,1
		№ 3	1,4	0,6	1,6	1,7	1,1	1,1	1,4
			№ 4	1,4	1,9	1,4	0,5	0,3	0,2
				№ 5	2,3	2,4	1,8	1,2	2,2
					№ 6	0,2	1	1	1,4
						№ 7	1,1	1,1	1,4
							№ 8	0,2	0,5
								№ 9	0,3
									№ 10

Рисунок 5 – Матрица расстояний (в километрах)

14 Лабораторная работа № 14. Метод ветвлений и ограничений

Основные теоретические сведения.

Рассмотрим задачу поиска гамильтонового цикла наикратчайшей длины в графе («Задача о коммивояжере»). В методе ветвлений и ограничений полный перебор маршрутов оптимизируется за счет того, что при переборе вариантов по определенным признакам отсекаются с большой долей вероятности неоптимальные множества перебора. Это значительно сокращает общее число перебираемых вариантов.

Рассмотрим метод Литтла. Основная идея метода состоит в том, что вначале строят нижнюю границу длин маршрутов для всего множества гамильтоновых контуров K. Затем множество K разбивают на два подмножества таким образом, чтобы первое подмножество K_{ij}^1 состояло из гамильтоновых контуров, содержащих некоторую дугу (i, j) а другое подмножество $K_{\bar{i}\bar{j}}^1$ не содержало этой дуги. Для каждого из подмножеств определяют нижние границы по тому же правилу, что и для первоначального множества. Полученные нижние границы подмножеств K_{ij}^1 и $K_{\bar{i}\bar{j}}^1$ будут не меньше нижней границы для всего множества гамильтоновых контуров. Сравнивая нижние границы подмножеств K_{ij}^1 и $K_{\bar{i}\bar{j}}^1$, можно выделить среди них то, которое с большей вероятностью содержит оптимальный план («перспективное» подмножество). Это «перспективное» подмножество по аналогичному правилу разбивается на два новые K_{ij}^2 и $K_{\bar{i}\bar{j}}^2$. Для них снова отыскивают нижние границы и т. д. Процесс ветвления продолжается до тех пор, пока не отыщется гамильтонов цикл. Получив его, просматривают отброшенные подмножества. Если их нижние границы больше длины полученного цикла, то задача решена. Если есть такие, для которых нижние границы меньше этой длины, то найденное подмножество подвергается дальнейшему ветвлению, пока не убедимся, что оно не содержит лучшего гамильтонова цикла. Если же такой найдется, то анализ оборванных ветвей продолжается относительно нового значения длины цикла. Процесс решения будет закончен тогда, когда проанализируем все подмножества.

Рассмотрим пример.

Постановка задачи.

Пусть задана матрица расстояний «Задачи о коммивояжере».

Найти оптимальный (кратчайший) маршрут посещения городов, используя метод ветвлений и ограничений.

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} - & 10 & 20 & 30 \\ 60 & - & 10 & 20 \\ 80 & 60 & - & 10 \\ 100 & 80 & 60 & - \end{pmatrix}.$$

Решение

Справедливо следующее: вычитая любую константу из всех элементов любой строки или столбца матрицы (c_{ij}), оставляем маршрут оптимальным. В связи с этим, процесс вычитания из каждой строки ее минимального элемента (приведение по строкам) не влияет на оптимальный маршрут. Аналогично вводится понятие приведения по столбцам, обладающее тем же свойством.

Приведение матрицы по строкам дает

$$\begin{array}{c|l}\begin{pmatrix} - & 10 & 20 & 30 \\ 60 & - & 10 & 20 \\ 80 & 60 & - & 10 \\ 100 & 80 & 60 & - \end{pmatrix} & \begin{matrix}\mathbf{10} \\ \mathbf{10} \\ \mathbf{10} \\ \mathbf{60}\end{matrix}\end{array}$$

Здесь жирным цветом отмечены минимальные элементы строк. При этом сумма констант приведения есть $10+10+10+60=90$. Приведение матрицы по столбцам.

Жирным цветом отмечены минимальные элементы столбцов. Сумма констант приведения здесь есть $40+0+0+0=4$, а всех констант: $90+40=130$.

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} - & 0 & 10 & 20 \\ 50 & - & 0 & 10 \\ 70 & 50 & - & 0 \\ 40 & 20 & 0 & - \end{pmatrix} \\ \begin{matrix}\overline{\mathbf{40}} & \overline{\mathbf{0}} & \overline{\mathbf{0}} & \overline{\mathbf{0}}\end{matrix}\end{array}$$

Таким образом, получена нижняя граница множества всех возможных контуров K. То есть оптимальный маршрут в данной задаче не может быть меньше, чем 130.

Назовем *оценкой* нуля в позиции (i, j) в матрице сумму минимальных элементов в i-й строке и j-м столбце (не считая сам этот ноль). Оценим теперь каждый ноль в приведенной матрице.

$$\begin{pmatrix} - & 0^3 & 10 & 20 \\ 10 & - & 0^1 & 10 \\ 30 & 50 & - & 0^4 \\ 0^1 & 20 & 0^0 & - \end{pmatrix}$$

Рассмотрим дугу, соответствующую нулю с максимальной оценкой. В данном случае, это дуга (3, 4). Таким образом, множество всех контуров K разбивается на два: K_{34}^1 и $K_{\overline{34}}^1$. Матрицу, соответствующую K_{34}^1, с дугой (3, 4) получаем из приведенной матрицы, вычеркивая строку 3 и столбец 4, а также меняя элемент c_{43} на «–».

Матрица приведена, поэтому нижняя граница множества K^1_{34}: $130+0=130$.

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 0^3 & 10 \\ 10 & - & 0^2 \\ 0^3 & 20 & - \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Матрица, соответствующая $K^1_{\overline{34}}$, получается из матрицы, в которой элемент c_{34} на «–»:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 0 & 10 & 20 \\ 10 & - & 0 & 10 \\ 30 & 50 & - & - \\ 0 & 20 & 0 & - \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Константа приведения (нижняя граница) множества $K^1_{\overline{34}}$: $130+40=170$.

Так как нижняя граница K^1_{34} меньше нижней границы $K^1_{\overline{34}}$ ($130<170$), то дальнейшему ветвлению подвергаем множество K^1_{34}.

Оценим нули последней матрицы. Имеются две дуги, соответствующие нулю с максимальной оценкой. Выберем дугу (1,2) и множество K^1_{34} разобьем на два K^2_{12} и $K^2_{\overline{12}}$. Матрицы соответствующие этим множествам:

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cc} 1 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} - & 0^0 \\ 0^0 & - \end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} - & - & 10 \\ - & - & 0 \\ 0 & 20 & - \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Матрица приведена, поэтому нижняя граница множества K^2_{12}: $130+0=130$. Константа приведения (нижняя граница) множества $K^2_{\overline{12}}$: $130+20+10=160$. Так как нижняя граница K^2_{12} меньше нижней границы $K^2_{\overline{12}}$ $(130<160)$, то ветвь, соответствующая K^2_{12}, является перспективной. Однако последняя матрица является приведенной и содержит два нулевых элемента. Это означает, что в оптимальный маршрут должны войти дуги (2,3) и (4,1).

Таким образом, оптимальный маршрут образуют дуги: (3,4), (1,2), (2,3), (4,1). После упорядочивания этих дуг имеем кратчайший гамильтонов цикл: (1,2), (2,3), (3,4), (4,1) с длиной 130.

Ветвление, использованное при решении задачи, можно представить в следующем виде (рисунок 6).

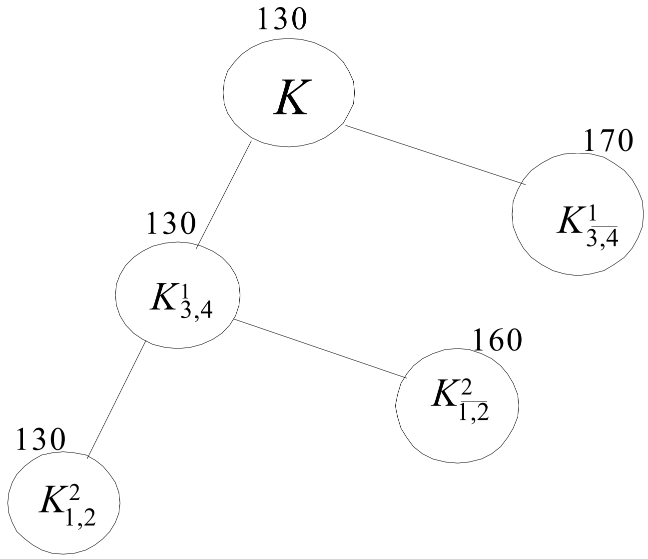


Рисунок 6 – Ветвление

Постановка задачи.

Варианты заданий даны в лабораторной работе № 13.

15 Лабораторная работа № 15. Оптимизация на графах

Основные теоретические сведения.

Рассмотрим ориентированный граф $G(V, E)$, в котором $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ – конечное множество вершин, $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ – конечное множество дуг. Здесь каждой дуге $e_k = (v_i, v_j), (k = \overline{1,m})$ ставится в соответствие положительное число c_{ij} $(i, j = \overline{1,n})$, которое интерпретируется как её длина.

Путь в ориентируемом графе – последовательность сцепленных ориентируемых дуг, в которых начало каждой следующей дуги совпадает с концом предыдущей. Длина любого пути в графе равна сумме длин дуг, входящих в этот путь. Необходимо найти путь минимальной длины (кратчайший путь) из вершины v_s в вершину v_t.

Для получения математической модели, введем переменную x_{ij}, которая $x_{ij} = 1$, если дуга (v_i, v_j) входит в путь минимальной длины, и $x_{ij} = 0$ – в противном случае. Это позволяет сформулировать целевую функцию

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

с ограничениями

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{sj} - \sum_{i=1}^{n} x_{is} = 1, \\ \sum_{j=1}^{n} x_{tj} - \sum_{i=1}^{n} x_{it} = -1, \qquad \forall i \in \{1,2,...,n\}, i \neq s, i \neq t. \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n} x_{ji} = 0, \end{cases}$$

Первое и второе ограничения – это условия начала и конца искомого пути в вершинах v_s и v_t соответственно. Третье ограничение – это условия прохождения искомого пути через промежуточные вершины графа. Общее число ограничений равно числу вершин n.

В этой ситуации построение наикратчайшего пути в графе сводится к поиску минимума фунции относительно неизвестных x_{ij} $i, j = \overline{1,n}$.

Постановка задачи.

Найти в ориентированном графе G (рисунок 7) кратчайший путь из вершины v_1 в вершину v_8.

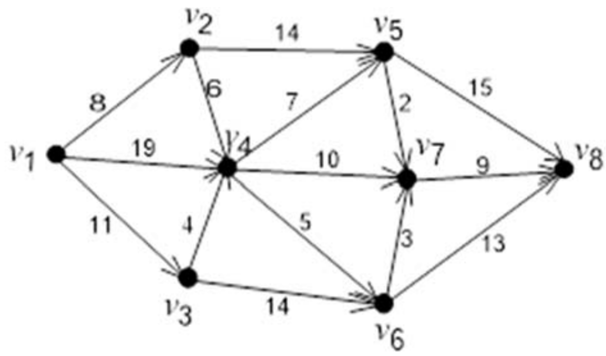


Рисунок 7 – Граф

Решение

В соответствии с рисунком целевая функция запишется как

$$f = 8x_{12} + 11x_{13} + 19x_{14} + 6x_{24} + 14x_{25} + 4x_{34} + 14x_{35} + \\ + 7x_{45} + 5x_{46} + 10x_{47} + 2x_{57} + 15x_{58} + 3x_{67} + 13x_{68} + 9x_{78}.$$

При этом ограничения имеют вид

$$
\begin{cases}
x_{12}+x_{13}+x_{14}=1, \\
x_{58}+x_{78}+x_{68}=1, \\
x_{12}-x_{24}-x_{25}=0, \\
x_{14}+x_{24}+x_{34}-x_{45}-x_{47}-x_{46}=0, \\
x_{13}-x_{34}-x_{36}=0, \\
x_{25}+x_{45}-x_{58}-x_{57}=0, \\
x_{57}+x_{47}+x_{67}-x_{78}=0, \\
x_{46}+x_{36}-x_{67}-x_{68}=0.
\end{cases}
$$

Решение задачи минимизации данных целевой функции и ограничений относительно неизвестных x_{ij} $(i, j=\overline{1,4})$ в среде MS Exel осуществляем с помощью надстройки «*Поиск решения*». Результаты решения представлены на рисунке 8.

vi	vj	cij	Переменные:	Ограничения:	Значение ЦФ
1	2	8	1	1	31
1	3	11	0	0	
1	4	19	0	0	
2	4	6	1	0	
2	5	14	0	0	
3	4	4	0	0	
3	6	14	0	0	
4	5	7	0	1	
4	6	5	1		
4	7	10	0		
5	7	2	0		
5	8	15	0		
6	7	3	1		
6	8	13	0		
7	8	9	1		

Задача о наикратчайшем пути

Рисунок 8 – Внешний вид рабочего листа MS Office Excel 2010 с исходными данными и результатами решения «Задачи о наикратчайшем пути в графе»

Таким образом, длина наикратчайшего пути от вершины v_1 к вершине v_8, равна 31 (наикратчайший путь: $v_1, v_2, v_4, v_6, v_7, v_8$).

Постановка задачи.

Для графа, длины дуг которого заданы в таблице 2, найти наикратчайший путь и его длину.

Таблица 2 – Длины дуг графа *G*

Вариант	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{24}	c_{25}	c_{34}	c_{36}	c_{46}	c_{47}	c_{57}	c_{58}	c_{67}	c_{68}	c_{78}
1	9	5	12	19	6	14	6	14	5	9	2	15	3	13	12
2	5	7	4	15	15	5	6	12	7	2	8	9	5	10	5
3	7	6	9	12	12	7	10	11	9	5	6	7	7	8	7
4	4	10	5	17	11	6	12	7	9	8	5	10	6	7	8

Окончание таблицы 2

Вариант	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{24}	c_{25}	c_{34}	c_{36}	c_{46}	c_{47}	c_{57}	c_{58}	c_{67}	c_{68}	c_{78}
5	6	13	8	21	10	7	7	9	11	8	7	11	8	7	5
6	8	7	5	15	11	5	13	7	9	5	7	9	4	8	6
7	3	10	4	9	7	8	11	4	8	3	9	12	6	11	10
8	2	5	5	10	6	7	6	9	3	8	5	11	4	10	11
9	8	11	5	16	5	6	9	7	8	6	5	7	7	7	6
10	7	8	6	12	7	5	5	7	10	8	7	4	7	5	4

16 Лабораторная работа № 16. Потоки на сетях

Основные теоретические сведения.

Сетью называют ориентированный связный граф $G(V,E)$ с множеством вершин V и множеством дуг E, где каждой дуге $(v_i,v_j)\in E$ придается числовая характеристика r_{ij}, называемая *пропускной способностью*. В G выделяют две фиксированные вершины – s и t; s называют *истоком*, t – *стоком*, а остальные вершины – *промежуточными*. Пропускная способность дуги $r_{ij}\geq 0$, и если $(v_i,v_j)\notin E$, то $r_{ij}=0$.

Множество чисел $X=\{x_{ij}\}$ называют *потоком по сети*, а сами x_{ij}, определенные на дугах $(v_i,v_j)\in E$, – *потоками в дугах*, если выполняются следующие условия:

1) $x_{ij}=-x_{ji}$;

2) $x_{ij}\leq r_{ij}$ (поток в дуге (v_i,v_j) не может превышать пропускной способности этой дуги);

3) $\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=0\left(v_i\neq s,t\right)$(условие сохранения потока в промежуточных вершинах).

Если $x_{ij}<r_{ij}$ то дуга (v_i,v_j) называется *ненасыщенной*, если же $x_{ij}=r_{ij}$ – *насыщенной.*

Суммарный поток из истока s равен суммарному потоку в сток t, т. е.

$$f=\sum_{j=1}^{n}x_{kj}=\sum_{i=1}^{n}x_{il}\left(v_k=s,v_l=t\right),$$

где v_j – конечные вершины дуг, исходящих из s;

v_i – начальные вершины дуг входящих в t.

Функцию f называют *мощностью потока* на сети.

Разрез сети $S/\bar{S}$ – множество дуг, для которых выполняются следующие требования: 1) $s\in S$; $t\in\bar{S}$; 2) $S\cap\bar{S}=\varnothing$; 3) $S\cup\bar{S}=V$.

Пропускная способность разреза $R\left(S/\bar{S}\right)$ равна сумме пропускных способностей r_{ij} всех дуг, входящих в разрез.

Поток через разрез $X\left(S/\bar{S}\right)$ равен сумме потоков x_{ij} по всем дугам, входящих в разрез.

Теорема Форда – Фалкерсона: максимальный поток по заданной сети равен минимальной пропускной способности разреза, отделяющего s от t.

Алгоритм расчета максимального потока.

1 Выписываем полный путь из истока в сток, определяя при этом пропускную способность. Пропускная способность равна наименьшему из значений пропускных способностей дуг, составляющих этот путь. Над каждой дугой пути записываем поток, равный пропускной способности данного пути. Если поток и пропускная способность совпадают, то *дуга насыщенная*, выделяем её.

2 Строим другие полные пути и считаем их пропускную способность до тех пор, пока сток достигаем из истока по ненасыщенным дугам. Если дуга пути входит в другой путь, то пропускная способность данной дуги равна первоначальной пропускной способности минус поток по другому пути. К потоку данной дуги прибавляем поток по новому пути.

3 Определяем множество S, как исток s, и вершины, достигаемые из истока по ненасыщенным дугам. Тогда множество $\bar{S}$ образует остальные вершины сети. Выделяем разрез на сети (множество дуг сети (v_i, v_j) таких, что $v_i \in S$, а $v_j \in \bar{S}$).

4 Считаем мощность потока сети f и пропускную способность разреза $R\left(S/\bar{S}\right)$. По теореме Форда – Фалкерсона эти величины равны друг другу.

Пример – Рассчитать максимальный поток в сети (рисунок 9) от истока $v_1 = s$ до стока $v_9 = t$.

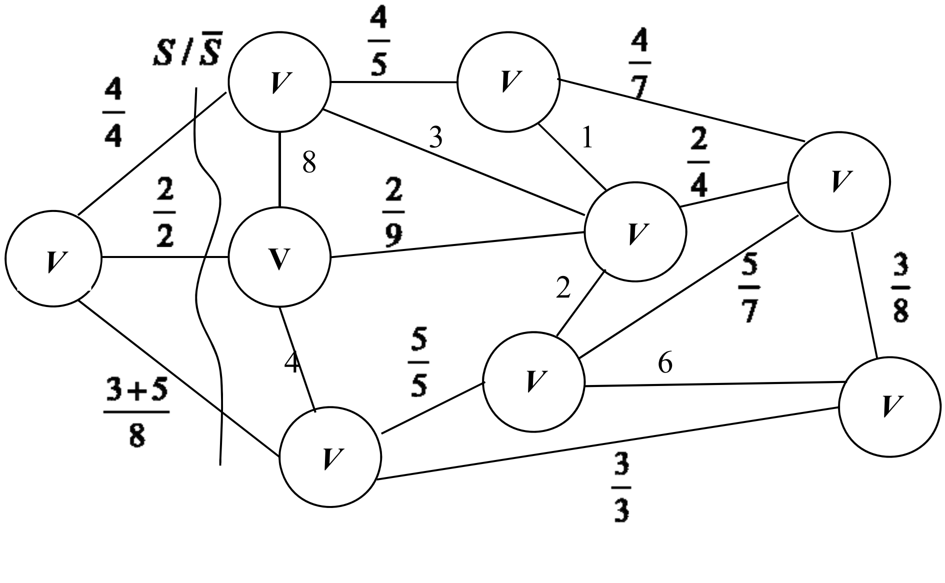


Рисунок 9 – Сеть

Решение

Запишем полные пути от истока к стоку, их пропускную способность и потоки:

$L_1 = (v_1, v_2, v_5, v_9)$, $R(L_1) = \min\{r_{12}, r_{25}, r_{59}\} = \min\{4,5,7\} = 4$, $x_{12} = x_{25} = x_{59} = 4$;

$L_2 = (v_1, v_4, v_8, v_9)$, $R(L_2) = \min\{r_{14}, r_{48}, r_{89}\} = \min\{8,3,8\} = 3$, $x_{14} = x_{48} = x_{89} = 3$;

$L_3 = (v_1, v_3, v_7, v_9)$, $R(L_3) = \min\{r_{13}, r_{37}, r_{79}\} = \min\{2,9,4\} = 2$, $x_{13} = x_{37} = x_{79} = 2$;

$L_4 = (v_1, v_4, v_6, v_9)$, дуга (v_1, v_4) входит в путь L_2 поэтому $R(L_4) = \min\{r_{14} - x_{14}, r_{46}, r_{69}\} = \min\{8-3,5,7\} = 5$, $x_{14} = 3 + 5 = 8, x_{46} = x_{69} = 5$.

Здесь $S = \{v_1\}$, $\bar{S} = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$. Разрез определяем как $S / \bar{S} = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4)\}$. Мощность потока $f = x_{12} + x_{13} + x_{14} = = 4 + 2 + 8 = 14$. Пропускная способность разреза $R\left(S / \bar{S}\right) = r_{12} + r_{13} + r_{14} = = 4 + 2 + 8 = 14.$

Постановка задачи.

Для сети, пропускные способности r_{ij} которой указаны в таблице 3, найти максимальный поток от истока $v_1 = s$ до стока $v_7 = t$.

Таблица 3 – Пропускная способность дуг сети

Вариант	$r_{ij}^{\,i,j}$													
1	$18^{1,2}$	$16^{1,3}$	$9^{1,6}$	$8^{2,3}$	$11^{2,4}$	$7^{2,5}$	$13^{2,7}$	$13^{3,5}$	$19^{3,7}$	$10^{4,3}$	$15^{4,6}$	$17^{5,4}$	$28^{5,6}$	$14^{6,7}$
2	$12^{1,2}$	$9^{1,3}$	$11^{1,6}$	$12^{2,3}$	$7^{2,4}$	$12^{3,4}$	$10^{3,5}$	$18^{3,7}$	$12^{4,5}$	$15^{4,6}$	$6^{4,7}$	$8^{5,2}$	$15^{5,7}$	$4^{6,7}$
3	$9^{1,2}$	$11^{1,4}$	$17^{1,6}$	$6^{2,3}$	$8^{2,5}$	$12^{2,7}$	$7^{3,7}$	$5^{4,2}$	$5^{4,6}$	$4^{4,7}$	$7^{5,7}$	$9^{6,7}$		
4	$10^{1,2}$	$5^{1,3}$	$8^{1,6}$	$3^{2,4}$	$3^{2,5}$	$4^{2,7}$	$4^{3,4}$	$5^{3,5}$	$10^{3,6}$	$4^{4,5}$	$9^{4,7}$	$5^{5,6}$	$6^{5,7}$	$7^{6,7}$
5	$5^{1,3}$	$15^{1,5}$	$9^{1,6}$	$6^{2,5}$	$7^{2,7}$	$3^{3,2}$	$4^{3,4}$	$7^{3,6}$	$8^{4,6}$	$3^{4,7}$	$9^{5,6}$	$18^{5,7}$	$5^{6,7}$	
6	$10^{1,2}$	$9^{1,5}$	$26^{1,7}$	$7^{3,2}$	$11^{3,2}$	$8^{4,3}$	$12^{4,6}$	$11^{4,7}$	$13^{5,4}$	$10^{5,6}$	$14^{6,3}$	$8^{6,7}$		
7	$10^{1,2}$	$8^{1,4}$	$8^{2,3}$	$12^{2,4}$	$10^{2,5}$	$6^{2,7}$	$5^{3,6}$	$11^{3,7}$	$4^{4,5}$	$12^{4,6}$	$5^{5,3}$	$9^{5,7}$	$6^{6,5}$	$7^{6,7}$
8	$10^{1,3}$	$18^{1,4}$	$8^{1,5}$	$6^{2,3}$	$11^{2,5}$	$15^{2,6}$	$19^{2,7}$	$12^{3,5}$	$13^{3,7}$	$5^{4,7}$	$18^{5,4}$	$7^{5,6}$	$9^{6,7}$	
9	$7^{1,2}$	$9^{1,3}$	$8^{1,6}$	$11^{2,3}$	$14^{2,4}$	$10^{2,5}$	$6^{2,7}$	$9^{3,5}$	$11^{3,6}$	$19^{3,7}$	$12^{4,6}$	$8^{5,4}$	$14^{5,6}$	$10^{6,7}$
10	$5^{1,2}$	$8^{1,3}$	$9^{2,5}$	$17^{2,6}$	$6^{3,2}$	$10^{3,5}$	$24^{3,7}$	$15^{4,5}$	$6^{4,7}$	$8^{5,6}$	$12^{5,7}$	$7^{5,7}$		

17 Лабораторная работа № 17. Вероятностные методы в комбинаторном анализе

Можно выделить три типа комбинаторных задач: задачи подсчета числа конфигураций определенного вида; перечислительные задачи, в результате решения которых получаются все конструкции определенного вида (например, получение всех независимых множеств графа); оптимизационные комбинаторные задачи, решением любой из которых является конструкция, обладающая оптимальным значением некоторого параметра среди всех конструкций данного вида (например, раскраска графа минимальным количеством цветов).

Основные теоретические сведения.

Пусть V – конечное непустое множество, E – некоторое семейство непустых (необязательно различных) подмножеств множества V. Пара (V, E) называется *гиперграфом* с множеством *вершин* V и множеством *ребер* E. Заметим, что матроид естественно рассматривать как гиперграф, ребрами которого служат циклы этого матроида и только они. Свободный матроид превращается при этом в *пустой,* т. е. не имеющий ребер гиперграф, тривиальный матроид оказывается гиперграфом, ребра которого – все одноэлементные подмножества вершин.

Равные подмножества в E называются *кратными ребрами* гиперграфа. Множество вершин и семейство ребер гиперграфа H обозначаются символами VH и EH соответственно. Число $|VH|$ вершин гиперграфа H называется его *порядком* и обозначается через $|H|$. Если $|H| = n$, $|EH| = m$ (с учетом кратности ребер), то H называется (n, m)-*гиперграфом.*

Если вершина $v \in V$ принадлежит ребру $e \in E$, то будем говорить, что они *инцидентны.* Каждой вершине $v \in V$ гиперграфа H сопоставим множество $E(v)$ всех инцидентных ей ребер. Число $|E(v)|$ называется *степенью вершины* v, а $|e|$ – *степенью ребра* e. Поскольку ребрами гиперграфа могут быть лишь непустые подмножества вершин, то степень любого ребра не меньше единицы, т. е. $|e| > 1$. Вершина гиперграфа, не инцидентная никакому ребру, называется *изолированной.*

Множество вершин гиперграфа называется независимым, если оно не содержит ребер. Пустое множество вершин по определению независимо. Как и в случае графов, наибольшее по мощности независимое множество вершин гиперграфа H называется наибольшим, а число вершин в этом множестве называется числом независимости гиперграфа H и обозначается через $\alpha_o(H)$. Через $ГH$ обозначается множество, элементами которого служат все независимые множества вершин гиперграфа H.

Так же, как и для графов, вводится понятие вершинной раскраски гиперграфов. Раскраска вершин гиперграфа H называется правильной, если любое ребро $e = EH$ содержит две вершины, окрашенные в различные цвета. Ясно, что правильную раскраску могут допускать лишь гиперграфы, каждое ребро которых имеет степень не меньше чем 2. Здесь рассматриваются только такие гиперграфы. Кроме того, будем считать, что изолированных вершин гиперграф не содержит.

Гиперграф называется k-раскрашиваемым (k-цветным), если для него существует правильная раскраска в k цветов.

Хроматическое число $\chi(H)$ – это наименьшее число цветов, достаточное для правильной раскраски гиперграфа H. Если $\chi(H) = k$, то гиперграф H называется k-хроматическим.

Постановка задачи.

1 В графе, представленном матрицей смежности, найти все максимальные независимые множества и одно наименьшее доминирующее множество.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}.
\end{array}
$$

2 Найти близкую к минимальной раскраску (через решение задачи о кратчайшем покрытии) вершин графа, заданного матрицей смежности

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}.
\end{array}
$$

Список литературы

1 **Баврин, И. И.** Дискретная математика : учебник и задачник для прикладного бакалавриата / И. И. Баврин. – Москва : Юрайт, 2016. – 208 с.

2 **Виленкин, Н. Я.** Комбинаторика / Н. Я. Виленкин. – Москва : Наука, 1969. – 328 с.

3 **Новиков**, **Ф. А.** Дискретная математика : учебник / Ф. А. Новиков. – Санкт-Петербург : Питер, 2007. – 364 с.

4 **Поздняков**, **С. Н.** Дискретная математика : учебник / С. Н. Поздняков. – Москва : Академия, 2008. – 448 с.

5 **Холл**, **М.** Комбинаторика : пер. с англ. / М. Холл. – Москва : Мир, 1970. – 424 с.