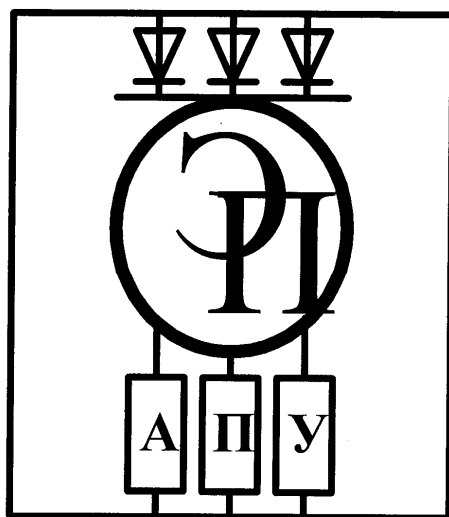


МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Электропривод и АПУ»

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

*Методические рекомендации к самостоятельной работе
для студентов специальности
1-53 01 05 «Автоматизированные электроприводы»
заочной формы обучения*



Могилев 2023

УДК 681.58
ББК 32.965
Т33

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Электропривод и АПУ» «31» августа 2022 г.,
протокол № 1

Составитель ст. преподаватель Г. В. Лабкович

Рецензент канд. техн. наук С. В. Болотов

Методические рекомендации к самостоятельной работе предназначены для
студентов специальности 1-53 01 05 «Автоматизированные электроприводы»
заочной формы обучения.

Учебно-методическое издание

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Ответственный за выпуск	С. М. Фурманов
Корректор	Т. А. Рыжикова
Компьютерная верстка	М. М. Дударева

Подписано в печать. 01.02.2023 . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 1,63. Уч.-изд. л. 1,63 . Тираж 56 экз. Заказ № 123.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изделий
№1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2023

Содержание

Введение.....	4
1 Примерная рабочая программа курса.....	5
2 Перечень контрольных вопросов для самостоятельной подготовки к экзамену.....	7
3 Задания для аудиторной контрольной работы.....	8
4 Краткие теоретические сведения.....	10
5 Задание для самостоятельного решения.....	25
Список литературы.....	26

Введение

Изучение курса «Теория автоматического управления» осуществляется студентами заочного отделения самостоятельно, с привлечением специальной литературы и в сочетании с обзорными лекциями, лабораторно-практическими занятиями, групповыми и индивидуальными консультациями в период сессии. Самостоятельная работа включает изучение теоретического материала курса по учебной литературе в соответствии с рабочей программой, выполнение двух контрольных и одной курсовой работ. Содержание контрольных работ и методические указания к ним изложены в методических рекомендациях.

1 Примерная рабочая программа курса

Тема 1. Основные принципы автоматического управления.

Основные понятия и определения теории автоматического управления, содержание понятий «объект управления», «управляющее устройство», «автоматическое управление», «управляющее воздействие», «задающее воздействие», «возмущающее воздействие», «управляющая величина». Виды автоматического управления (разомкнутое и замкнутое, стабилизирующее, программное и следящее, оптимальное и адаптивное управления).

Тема 2. Классификация систем автоматического управления.

Классификация систем автоматического управления (по виду управления, по принципу действия, по характеру изменения задающего, по способности поддерживать с определённой степенью точности значения регулируемой величины, по виду сигналов управления, по характеру используемой информации об условиях работы, по виду математического описания, по количеству выходных координат объекта управления, по виду замкнутых контуров регулирования и др.). Функциональные схемы систем автоматического управления. Статическое и астатическое регулирование.

Тема 3. Статические характеристики элементов в САУ.

Понятие о математической модели системы управления. Понятие об установившемся процессе. Статические характеристики элементов и систем автоматического управления. Общие понятия о передаточных свойствах СА. Линейные дифференциальные уравнения при описании динамики объектов СА. Операторный метод, динамические характеристики. Частотные характеристики. Основные типовые возмущающие воздействия. Расчет переходных процессов в линейных САУ.

Тема 4. Составление и решение уравнений динамических режимов САУ.

Понятие о динамическом режиме. Составление уравнений динамических режимов САУ. Линеаризация дифференциальных уравнений. Методы решения уравнений динамики (линейные и нелинейные, аналитические и графоаналитические, классический, операторный, частотный методы)

Тема 5. Динамические характеристики элементов САУ.

Математическое представление сигналов, виды управляющих и возмущающих воздействий. Динамические характеристики элементов и САУ (переходная, импульсная и передаточная функции, амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), фазочастотная характеристика (ФЧХ), логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ), логарифмическая фазочастотная характеристика (ЛФЧХ)).

Тема 6. Типовые динамические звенья.

Классификация звеньев. Пропорциональное, дифференцирующее, реальное дифференцирующее, интегрирующее, интегродифференцирующее, апериодическое первого порядка, запаздывающее звенья. Звено второго порядка. Соединение звеньев автоматики. Обратные связи, жесткие, гибкие. Замкнутые системы.

Тема 7. Структурные схемы СА.

Составление структурных схем САУ. Передаточные функции системы управления при различных включениях звеньев.

Тема 8. Основные понятия об устойчивости САУ.

Основные понятия об устойчивости САУ (содержание понятий «устойчивость», «устойчивость положения», «устойчивые и неустойчивые движения»; устойчивая, неустойчивая и нейтрально устойчивая динамические системы; устойчивость «в малом» и «в большом»; математическая формулировка условий устойчивости).

Тема 9. Критерии устойчивости САУ.

Понятие устойчивости по Ляпунову. Критерии Рауса – Гурвица, Михайлова, Найквиста. Сравнение критериев устойчивости и рекомендации по их применению.

Тема 10. Понятие о запасе устойчивости.

Понятие о запасе устойчивости (запас устойчивости по модулю и фазе, определение запаса устойчивости по ЛЧХ и критериям устойчивости). Метод Д-разбиения.

Тема 11. Понятие о качестве процесса управления.

Основные показатели качества процесса управления (быстродействие, перерегулирование, точность, число колебаний и др.).

Тема 12. Методы оценки качества переходных процессов САУ.

Качество переходных процессов. Переходные процессы в автоматических системах с типовыми регуляторами. Прямые и косвенные методы, метод распределения корней, интегральные методы, частотные методы.

Тема 13. Этапы и методы синтеза САУ.

Сущность задачи синтеза САУ. Основные этапы синтеза САУ. Методы синтеза САУ по заданным показателям качества процесса управления (графоаналитические и аналитические методы, математическое моделирование).

Тема 14. Способы коррекции САУ.

Способы коррекции систем управления (последовательная и параллельная коррекция, подчинённое регулирование, коррекция по возмущению и др.). Синтез корректирующих устройств по логарифмическим частотным характеристикам. Пропорциональное (П), интегральное (И), пропорционально-интегральное (ПИ) и пропорционально-интегрально-дифференциальное (ПИД) регулирование.

Тема 15. Понятие о нелинейных звеньях и системах.

Понятие о нелинейных звеньях и системах (содержание понятий «нелинейное звено», «нелинейная система»; структура нелинейной САУ и методика её построения). Виды нелинейностей: «насыщение», «гистерезис», «ограничение», «люфт», «зона нечувствительности», «сухое трение», «релейные характеристики» и др.

Тема 16. Методы исследования нелинейных САУ.

Особенности нелинейных систем. Типовые нелинейные элементы СУ и их характеристики. Метод фазовых траекторий и их построение с помощью изоклин, метод кусочно-линейной аппроксимации, метод гармонической линеаризации. Оценка абсолютной устойчивости с помощью критерия Попова.

2 Перечень контрольных вопросов для самостоятельной подготовки к экзамену

- 1 Основные понятия, термины и определения ТАУ.
- 2 Понятие об объекте управления, регуляторе и системе автоматического управления.
- 3 Принципы построения разомкнутых и замкнутых САР.
- 4 Классификация САР.
- 5 САР стабилизации.
- 6 Программные САР.
- 7 Следящие системы автоматического регулирования.
- 8 Непрерывные и дискретные САР.
- 9 Режимы работы САР: статические и динамические.
- 10 Статические свойства САР.
- 11 Понятие о коэффициенте передачи.
- 12 Прямое и обратное преобразования Лапласа и их свойства.
- 13 Принципы составления и формы записи уравнений динамических звеньев.
- 14 Передаточная функция динамического звена.
- 15 Типовые воздействия при исследовании САР.
- 16 Понятие о переходной характеристике.
- 17 Понятие об импульсной характеристике.
- 18 Понятие о типовых динамических звеньях, их классификация.
- 19 Передаточная функция и переходные характеристики безынерционного звена.
- 20 Передаточная функция и переходные характеристики инерционного звена.
- 21 Передаточная функция и переходные характеристики колебательного звена.
- 22 Передаточная функция и переходные характеристики интегрирующего звена.
- 23 Передаточная функция и переходные характеристики дифференцирующего звена. Метод неопределённых коэффициентов.
- 24 Определение передаточных функций по дифференциальным уравнениям звеньев.
- 25 Составление систем уравнений, описывающих звено по его передаточной функции.
- 26 Основные правила преобразования структурных схем САР.
- 27 Определение передаточных функций САР по задающему воздействию.
- 28 Определение передаточных функций САР по возмущающему воздействию.
- 29 Определение передаточных функций САР по ошибке.
- 30 Определение частотных характеристик динамических звеньев.
- 31 Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) динамического звена.
- 32 Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) динамического звена.
- 33 Фазочастотная характеристика (ФЧХ) динамического звена.
- 34 Вещественная частотная характеристика динамического звена.

35 Мнимая частотная характеристика динамического звена.

36 Частотные характеристики основных соединений линейных звеньев.

37 Логарифмические амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики (ЛАЧХ и ЛФЧХ) звеньев и систем.

38 Способы построения логарифмических частотных характеристик ЛАЧХ и ЛФЧХ.

39 Понятие об устойчивости САР.

40 Формы устойчивости: неустойчивая, устойчивая, асимптотически устойчивая.

41 Метод Ляпунова определения устойчивости линейных САР.

42 Алгебраический критерий устойчивости Рауса-Гурвица.

43 Частотный критерий устойчивости Михайлова.

44 Частотный критерий устойчивости Найквиста.

45 Устойчивость систем с запаздыванием и астатических систем.

46 Оценка устойчивости по ЛЧХ.

47 Запасы устойчивости.

48 Понятие о качестве переходных процессов.

49 Качество переходных процессов в линейных системах автоматического управления.

50 Автоматический регулятор. Понятие, определение и основные элементы. Виды регуляторов.

3 Задания для аудиторной контрольной работы

Задание на аудиторную контрольную работу (АКР) включает четыре задания, указанных в подразделах далее.

3.1 Состав первого задания АКР

Дать определение следующего понятия:

- 1) динамическое звено;
- 2) автоматизированное управление;
- 3) автоматическое управление;
- 4) передаточная функция;
- 5) объект управления;
- 6) система автоматического управления;
- 7) регулятор;
- 8) задающее воздействие;
- 9) возмущающее воздействие;
- 10) выходные сигналы;
- 11) ошибка регулирования;
- 12) переходная характеристика;
- 13) устойчивость системы;
- 14) амплитудно-частотная характеристика;

- 15) фазочастотная характеристика;
- 16) амплитудно-фазовая характеристика;
- 17) статическая характеристика;
- 18) динамическая характеристика;
- 19) единичное ступенчатое воздействие;
- 20) обратная связь;
- 21) величина перерегулирования;
- 22) статический коэффициент передачи;
- 23) запас устойчивости системы по фазе;
- 24) запас устойчивости системы по амплитуде;
- 25) частота среза.

3.2 Состав второго задания АКР

Дать ответ на следующий вопрос:

- 1) уравнение и переходная характеристика инерционного звена;
- 2) уравнение и переходная характеристика апериодического звена второго порядка;
- 3) уравнение и переходная характеристика колебательного звена;
- 4) уравнение и переходная характеристика безынерционного звена;
- 5) уравнение и переходная характеристика консервативного звена;
- 6) уравнение и переходная характеристика звена чистого запаздывания;
- 7) уравнение и переходная характеристика идеального интегрирующего звена;
- 8) уравнение и переходная характеристика реального интегрирующего звена;
- 9) уравнение и переходная характеристика изодромного звена;
- 10) уравнение и переходная характеристика идеального дифференцирующего звена;
- 11) уравнение и переходная характеристика реального дифференцирующего звена;
- 12) уравнение и переходная характеристика форсирующего звена;
- 13) частотные характеристики безынерционного звена;
- 14) частотные характеристики инерционного звена;
- 15) частотные характеристики апериодического звена второго порядка;
- 16) частотные характеристики колебательного звена;
- 17) частотные характеристики безынерционного звена;
- 18) частотные характеристики консервативного звена;
- 19) частотные характеристики звена чистого запаздывания;
- 20) частотные характеристики идеального интегрирующего звена;
- 21) частотные характеристики реального интегрирующего звена;
- 22) частотные характеристики изодромного звена;
- 23) частотные характеристики идеального дифференцирующего звена;
- 24) частотные характеристики реального дифференцирующего звена;
- 25) частотные характеристики форсирующего звена.

3.3 Состав третьего задания АКР

Определить устойчивость замкнутой системы по ее характеристическому уравнению по критерию Гурвица.

$$a_0 \cdot p^3 + a_1 \cdot p^2 + a_2 \cdot p + a_3 = 0. \quad (3.1)$$

Коэффициенты уравнения задаются индивидуально.

3.4 Состав четвертого задания АКР

Требуется построить статическую характеристику, отражающую зависимость величины выхода САУ y от возмущающего воздействия f в диапазоне от 0 до $f_{\max} = 5$ при значении задающего воздействия $x = 10$ (рисунок 3.1).

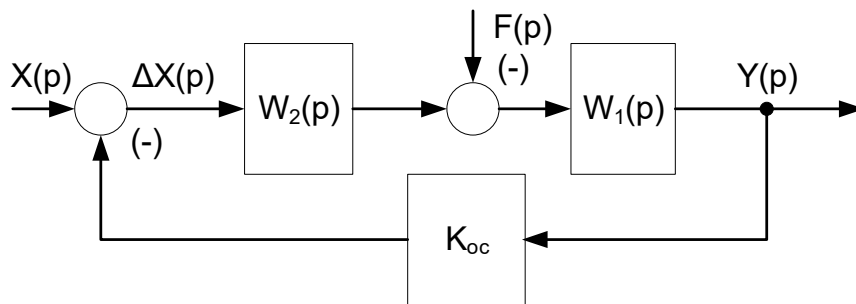


Рисунок 3.1 – Структурная схема

Передаточные функции звеньев САУ из рисунка 3.1 определяются выражениями

$$W_1(p) = K_1 \frac{\tau_1 \cdot p + 1}{T_1 \cdot p + k_{01}}; \quad (3.2)$$

$$W_2(p) = K_2 \frac{\tau_2 \cdot p + 1}{T_2 \cdot p + k_{02}}. \quad (3.3)$$

Параметры передаточных функций (3.2) и (3.3) задаются индивидуально.

4 Краткие теоретические сведения

4.1 Основные понятия и определения

Управление – это совокупность действий, направленных на достижение поставленной цели.

Регулирование – частный случай управления техническими системами. Регулирование направлено на достижение объектом заданного состояния.

Закон управления – математическое описание способа образования управляющего воздействия с учётом безынерционности объекта управления.

Устройства управления – техническое устройство, обеспечивающее формирование управляющих воздействий на объект управления в соответствии с целью управления.

Объект управления – любой объект техники, требуемый режим работы которого поддерживается извне специально организованными управляющими воздействиями.

Система управления – совокупность управляющего устройства и объекта управления. Система автоматического регулирования (САР) – это совместное действие управляющего устройства (регулятора) и объекта управления (регулируемого).

Система разомкнутая, если сигнал передается в одном направлении, от управляющего устройства к объекту управления.

Система замкнутая, если сигнал передается не только от управляющего устройства к объекту управления, но и обратно, от объекта управления к управляющему устройству. В замкнутой системе различают канал прямой связи и канал обратной связи.

Система управления (регулирования) характеризуется состоянием: значением всех параметров и показателей в данный момент времени. Параметром называют количественную характеристику, показателем – качественную.

Воздействие – любой фактор, приводящий к изменению состояния объекта управления или какого-либо элемента управляющего устройства (например, сила, момент, напряжение).

Воздействия классифицируют на:

- задающие $u(t)$ – команды управляющему устройству (регулятору);
- управляющие (регулирующие) $x(t)$ – изменяют параметры, определяющие состояние объекта;
- возмущающие $f(t)$ – случайные воздействия окружающей среды на объект управления.

Уравнение динамики – это уравнение, описывающее изменение входящих в него переменных во времени. Из уравнения динамики можно получить уравнение статики, если предположить, что все входящие в него производные и возмущение равны нулю или являются постоянными величинами.

Передачная функция $W(p)$ – отношение изображения по Лапласу выходной величины $Y(p)$ к входной $X(p)$ при нулевых начальных условиях.

Переходная функция (характеристика) – функция $h(t)$ (ее графическое представление), определяющая реакцию системы на единичное ступенчатое воздействие $I(t)$ при нулевых начальных условиях.

Переходная импульсная или весовая функция – функция $w(t)$, определяющая реакцию системы на единичное импульсное воздействие $\delta(t)$ при нулевых начальных условиях.

Передачная частотная функция (АФЧХ, комплексный коэффициент передачи) – функция, определяющая реакцию системы на гармоническое воздействие при нулевых начальных условиях.

Амплитудная частотная характеристика (АЧХ) – график, характеризующий усиление или ослабление входных гармонических сигналов различной фиксированной частоты в установившемся режиме.

Логарифмическая амплитудная характеристика (ЛАХ) – представление АЧХ в логарифмическом масштабе.

Фазовая частотная характеристика (ФЧХ) – график, характеризующий сдвиг по фазе гармонических выходных сигналов относительно входных различной фиксированной частоты в установившемся режиме.

Вещественная частотная характеристика (ВЧХ) – проекция амплитудно-фазовой характеристики системы на вещественную ось в прямоугольной системе координат на комплексной плоскости.

Мнимая частотная характеристика (МЧХ) – проекция амплитудно-фазовой характеристики системы на мнимую ось в прямоугольной системе координат на комплексной плоскости.

Частота среза ω_c – частота колебаний входного гармонического сигнала, при которой АЧХ системы равна единице (точка перехода ЛЧХ через ось частот).

Типовые динамические звенья – элементарные звенья, описываемые обыкновенными линейными алгебраическими или дифференциальными уравнениями связи не выше второго порядка с положительными постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение системы – уравнение, получаемое приравниваем к нулю числителя или знаменателя передаточной функции системы.

Качество автоматической системы – характеристика поведения системы в установившемся и переходном процессах при определенном виде внешних воздействий.

Устойчивость АС – свойства системы обеспечить сколь угодно малое отклонение возмущенного движения при достаточно малых начальных возмущениях за конечный отрезок времени.

Критерии устойчивости АС – математически сформулированные правила, позволяющие исследовать устойчивость системы без вычисления корней характеристического уравнения.

Запас устойчивости по амплитуде – величина АЧХ (ЛЧХ) в относительных единицах (децибел), которая показывает, насколько нужно изменить коэффициент передачи системы при неизменных фазовых соотношениях, чтобы привести её к границе устойчивости.

Запас устойчивости по фазе – величина угла разности фаз в градусах, которая показывает, насколько должен возрасти отрицательный сдвиг по фазе (запаздывание по фазе) в системе на частоте среза при неизменном значении коэффициента передачи, чтобы система оказалась на границе области устойчивости (выходной и входной сигналы находились бы в противофазе).

Частота сопряжения – частота, на которой происходит сопряжение низкочастотной и высокочастотной асимптотических составляющих ЛАХ.

Время регулирования – время, за которое переходной процесс практически заканчивается.

Величина перерегулирования – отношение максимального отклонения управляемой величины от установившегося значения к этому установившемуся значению, выраженное в процентах.

Статическая АС – система, в которой при постоянном задающем или возмущающем воздействии устанавливается ошибка, зависящая от величины этого воздействия.

Астатическая АС – система, в которой при постоянном задающем или возмущающем воздействии устанавливается равная нулю ошибка, не зависящая от величины этого воздействия.

Порядок астатизма АС – параметр АС, характеризующий её свойства как астатической системы и определяемый структурной схемой АС. При ступенчатом входном сигнале порядок астатизма замкнутой АС равен числу интегрирующих звеньев в соответствующей цепи обратной связи.

4.2 Классификация систем управления

Системы управления и регулирования делятся по различным признакам на следующие основные классы.

1 По принципу действия:

- а) разомкнутые системы;
- б) замкнутые системы;
- в) комбинированные системы;
- г) адаптивные системы.

2 По виду задающего воздействия $g(t)$:

- а) системы стабилизации, если $g(t)=const$;
- б) системы программного управления, если $g(t)$ – наперед заданная функция времени;
- в) следящие системы, если $g(t)$ – случайная величина.

3 По математическому описанию:

- а) линейные системы;
- б) нелинейные системы.

4 По характеру передачи сигналов:

- а) непрерывные системы;
- б) дискретные системы.

5 По реакции системы на входное воздействие;

- а) детерминированные системы
- б) стохастические системы;
- в) стационарные системы;
- г) нестационарные системы.

6 По виду используемой энергии:

- а) электрические системы;
- б) пневматические системы;
- в) гидравлические системы;
- г) электропневматические системы;
- д) электрогидравлические системы.

7 По числу управляемых величин.

- а) одномерные системы;
- б) многомерные или многосвязные системы.

4.3 Принципы управления

Различают четыре принципа управления:

- 1) принцип разомкнутого цикла (управление по возмущению);
- 2) принцип замкнутого цикла или принцип обратной связи (управление по отклонению);
- 3) комбинированный принцип;
- 4) принцип адаптации.

Принцип разомкнутого цикла (управление по возмущению) заключается в том, что требуемый закон управления формируется только на основе цели управления в соответствии с задающим воздействием. Воздействие на объект вырабатывается как компенсирующее отрицательное воздействие возмущений. Из действующих на систему возмущений выбирают основное (оно должно быть измеряемым). Система, построенная по этому принципу, является разомкнутой или незамкнутой. Регулятор формирует управляющее воздействие только на основе задающего воздействия, т. е. $u(t) = f[g(t)]$.

Достоинство разомкнутой системы – высокое быстродействие, главный недостаток – низкая точность работы.

Принцип замкнутого цикла (принцип обратной связи или управление по отклонению) заключается в том, что закон управления формируется на основе отклонения управляемой величины от задающего воздействия. Воздействие на объект вырабатывается как функция отклонения управляемой величины от предписанного значения. Регистрируется отклонение управляемой величины $y(t)$ от заданного значения $u(t)$. Управляющее устройство сравнивает значения $y(t)$ и $u(t)$, вырабатывает регулирующее воздействие $x(t)$ и устраняет рассогласование.

Закон управления в замкнутой системе является функцией $u(t) = f[x(t)]$.

Основным достоинством замкнутых систем является их высокая точность, однако быстродействие их ниже, чем у разомкнутых систем.

Комбинированный принцип заключается в сочетании принципов разомкнутого и замкнутого циклов в одной системе. Такое управление, сочетающее в себе управление по задающему воздействию и отклонению, называется комбинированным управлением. Оно обеспечивает высокую точность и высокое быстродействие.

Закон управления комбинированной системы имеет вид: $u(t) = f[x(t), g(t), f(t)]$.

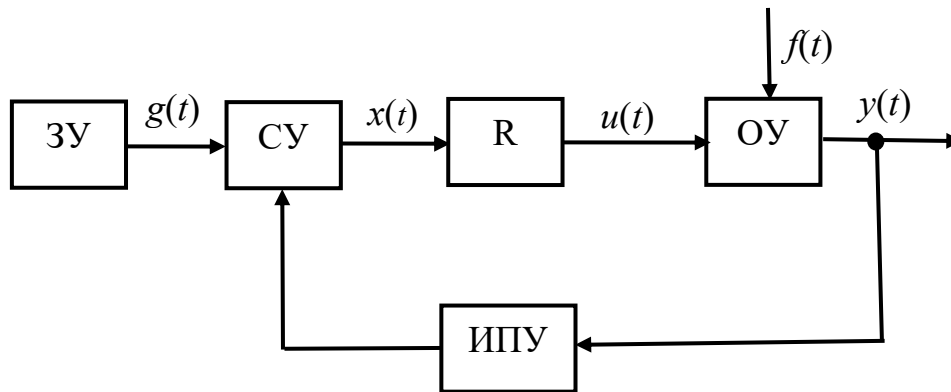
Комбинированное управление позволяет реализовывать инвариантные к внешним воздействиям системы управления.

Принцип адаптации заключается в том, что системы, реализующие этот принцип, в процессе работы приспособляются, адаптируются к изменяющимся внешним условиям. Адаптивные системы имеют в своем составе, как

правило, дополнительные блоки и контуры для анализа показателей качества процесса управления или внешних условий, по которым необходима адаптация.

Адаптивные системы разделяются на экстремальные, самонастраивающиеся и самоорганизующиеся.

Функциональная схема автоматического управления, представленная на рисунке 4.1, состоит из пяти элементов, выполняющих функции, необходимые для осуществления процесса автоматического управления.



ЗУ – задающее устройство; СУ – сравнивающее устройство; R – регулятор; ОУ – объект управления; ИПУ – измерительно-преобразовательное устройство; координаты (переменные) системы: $g(t)$ – задающее воздействие; $y(t)$ – управляемая (регулируемая) величина; $f(t)$ – возмущающее воздействие; $x(t)$ – рассогласование (ошибка); $u(t)$ – управляющее воздействие

Рисунок 4.1 – Функциональная схема замкнутой САУ

4.4 Прямое и обратное преобразование Лапласа и их свойства

Для расчета САУ необходимо иметь математическую модель системы. Обычно математической моделью является дифференциальное уравнение, которое получают, анализируя физический, механический или иной процесс.

При составлении дифференциального уравнения динамики любой автоматической системы последнюю разбивают на отдельные звенья и записывают уравнение каждого звена в отдельности.

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ = b_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \quad . \end{aligned} \quad (4.1)$$

Решение уравнения (4.1) дает полное представление об изменении управляемой величины. Однако в теории автоматического управления предпочитают иметь дело не с дифференциальным уравнением, а с операторным уравнением.

Операторное уравнение получают, применяя преобразование Лапласа к дифференциальному уравнению.

Суть преобразования Лапласа в том, что функцию от времени преобразуют в функцию от комплексного переменного $p = \delta + j \cdot \omega$. где δ – действительная часть, $j \cdot \omega$ – мнимая часть, $j = \sqrt{-1}$.

Функцию от времени называют оригинал, а ее преобразование по Лапласу – изображение.

Для изображения используют прописные буквы. Символически преобразование Лапласа принято обозначать прописной буквой L . Например,

$$L\{x(t)\} = X(p); \quad L\{y(t)\} = Y(p); \quad L\{f(t)\} = F(p).$$

Читается: «изображение функции $x(t)$ есть $X(p)$ » и т. д.

При преобразовании Лапласа коэффициенты-множители не меняются, а изображение производной представляется произведением комплексного переменного p на изображение функции. Например,

$$L\{a_0 y(t)\} = a_0 Y(p); \quad L\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\} = pY(p).$$

Формально оператор дифференцирования заменяется комплексной переменной p в соответствующей степени:

$$\frac{d}{dt} \text{ на } p; \quad \frac{d^2}{dt^2} \text{ на } p^2; \quad \frac{d^n}{dt^n} \text{ на } p^n.$$

Преобразование Лапласа, будучи применено к дифференциальному уравнению, преобразует его в алгебраическое. Например,

$$L\left\{a_0 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)\right\} = a_0 pY(p) + Y(p) = kX(p). \quad (4.2)$$

Обратный переход из комплексного пространства во временное достигается обратными преобразованием Лапласа, символ L^{-1} . Например,

$$L^{-1}\{X(p)\} = x(t); \quad L^{-1}\{p Y(p)\} = \frac{dy(t)}{dt};$$

$$L^{-1}\{a_0 pY(p) + Y(p) = kX(p)\} = a_0 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t). \quad (4.3)$$

Для преобразования Лапласа необходимо, чтобы начальные условия были нулевыми, а дифференциальные уравнения – линейными.

Для большинства функций, встречающихся на практике, составлены таблицы соответствия между оригиналами и изображениями.

Свойства преобразования Лапласа.

1 Сумма оригиналов соответствует сумме их изображений, a и b – константы.

2 Дифференцирование функции приводит к умножению изображения на переменную p .

3 Интегрирование функции приводит к делению изображения на переменную p .

4 Умножение оригинала на некоторое число приводит к умножению изображения на это число.

Для выполнения прямого и обратного перехода с помощью таблиц преобразования Лапласа часто бывает необходимо выполнять разложение полученного дробно-рационального выражения на сумму простейших дробей. Простыми дробями называют дроби следующих четырех типов:

$$1) \frac{A}{x-a};$$

$$2) \frac{A}{(x-a)^k}, k \geq 2;$$

$$3) \frac{Cx+D}{x^2+px+q}, p^2+4q < 0;$$

$$4) \frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^k}, p^2+4q < 0, k \geq 2.$$

Задача разложения правильной дроби на простейшие состоит в следующем: некоторую правильную рациональную дробь необходимо представить в виде суммы простейших рациональных дробей четырех типов.

Каждая рациональная дробь, знаменатель которой имеет вид произведения

$$Q_n(x) = (x-x_1)^{n_1} \cdot (x-x_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (x^2+p_1+q_1)^{n_1} \cdot (x^2+p_2+q_2)^{n_2} \cdot \dots, \quad (4.4)$$

может быть разложена, и притом единственным образом, на сумму простых дробей по правилу:

$$\begin{aligned} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = & \frac{A_1}{x-x_1} + \dots + \frac{A_{n_1}}{(x-x_1)^{n_1}} + \frac{B_1}{x-x_2} + \dots + \frac{B_{n_2}}{(x-x_2)^{n_2}} + \dots \\ & + \frac{C_1 \cdot x + D_1}{x^2+p_1 \cdot x + q_1} + \dots + \frac{C_i \cdot x + D_i}{(x^2+p_i \cdot x + q_i)^{n_i}} + \dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $A_1 \dots A_{n_1}, B_1 \dots B_{n_2}, C_1 \dots C_{n_1}, D_1 \dots D_{n_1}$ – действительные постоянные числа, часть которых в разложении может обратиться в нуль.

Алгоритм разложения дроби на простейшие состоит в следующем.

1 Прежде всего необходимо убедиться, что многочлен, содержащийся в знаменателе правильной рациональной дроби, разложен на множители так, что данное разложение имеет вид произведения (4.4).

2 Каждому множителю вида $x - a$, расположенному в знаменателе, соответствует дробь вида $\frac{A}{x - a}$.

3 Каждому множителю вида $(x - b)^n$ расположенному в знаменателе, соответствует сумма из n_1 дробей:

$$\frac{B_1}{x - b} + \frac{B_2}{(x - b)^2} + \dots + \frac{B_{n_1}}{(x - b)^{n_1}}.$$

4 Каждому множителю вида $x^2 + px + q$, расположенному в знаменателе, соответствует дробь вида

$$\frac{Cx + D}{x^2 + px + q}.$$

5 Каждому множителю вида $(x^2 + ux + v)^{n_i}$, расположенному в знаменателе, соответствует сумма из n_i дробей

$$\frac{E_1x + F_1}{x^2 + ux + v} + \dots + \frac{E_{n_i}x + F_{n_i}}{(x^2 + ux + v)^{n_i}}.$$

Для завершения разложения рациональной дроби на сумму простейших дробей необходимо найти значения чисел $A_1 \dots A_{n_1}, B_1 \dots B_{n_2}, C_1 \dots C_{n_1}, D_1 \dots D_{n_1}$.

Для нахождения неизвестных коэффициентов в разложении (4.5) используется метод неопределенных коэффициентов.

1 Правую часть записанного равенства приводим к общему знаменателю, который совпадает со знаменателем дроби, стоящей в левой части этого равенства, $- Q_n(x)$.

2 В числителе левой части получим некоторый многочлен $R_m(x)$ с неизвестными коэффициентами.

3 Используем тот факт, что две дроби равны, когда равны их числители и знаменатели. Из того, что знаменатели левой и правой частей равенства равны, следует равенство числителей

$$P_m(x) = R_m(x). \quad (4.6)$$

4 Два многочлена равны, если равны коэффициенты при соответствующих степенях переменной, поэтому в выражении $R_m(x)$ раскрываем скобки, группируем слагаемые при одинаковых степенях переменной x и при-

равниваем полученные коэффициенты к соответствующим коэффициентам в $P_m(x)$ (при одинаковых степенях переменной x). В результате получаем систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов. Решая ее, находим искомые коэффициенты.

Можно не раскрывать скобки, а находить неизвестные коэффициенты из уравнения (4.6), подставляя вместо переменной некоторые числа (как правило, корни знаменателя).

Пример 1 – Записать передаточную функцию и характеристическое уравнение для системы, поведение которой описывается дифференциальным уравнением

$$2\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 6\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 10\frac{dy(t)}{dt} + 25y(t) = 3\frac{d^3 x(t)}{dt^3} + 10\frac{dx(t)}{dt} + 100x(t).$$

Решение

Производим замену символов в дифференциальном уравнении:

$$\frac{d}{dt} \text{ на } p, \quad \frac{d^2}{dt^2} \text{ на } p^2, \quad \frac{d^3}{dt^3} \text{ на } p^3;$$

$$y(t) \text{ на } Y(p), \quad x(t) \text{ на } X(p).$$

Получаем операторное уравнение

$$(2p^3 + 6p^2 + 10p + 25) \cdot Y(p) = (3p^2 + 10p + 100) \cdot X(p).$$

Отношение $Y(p)/X(p)$ есть передаточная функция $W(p)$. Значит, искомая передаточная функция есть

$$W(p) = \frac{3p^2 + 10p + 100}{2p^3 + 6p^2 + 10p + 25}.$$

Характеристическое уравнение получается, если приравнять нулю комплексный полином знаменателя передаточной функции:

$$2p^3 + 6p^2 + 10p + 25 = 0.$$

Пример 2 Дана передаточная функция объекта управления:

$$W(p) = \frac{7p^3 + 5,5}{(p - 0,5) \cdot (3p^2 + 2)}.$$

Определить дифференциальное уравнение, описывающее объект.

Решение

Для записи дифференциального уравнения необходимо учесть, что по определению $W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$:

$$W(p) = \frac{7p^3 + 5,5}{(p - 0,5) \cdot (3p^2 + 2)} = \frac{Y(p)}{X(p)}.$$

По правилу преобразования пропорции получаем

$$((p - 0,5) \cdot (3p^2 + 2))Y(p) = (7p^3 + 5,5)X(p),$$

раскроем скобки:

$$3p^3Y(p) + 2pY(p) - 1,5p^2Y(p) - Y(p) = 7p^3X(p) + 5,5X(p).$$

Применим обратное преобразование Лапласа:

$$L^{-1}(3p^3Y(p) + 2pY(p) - 1,5p^2Y(p) - Y(p)) = L^{-1}(7p^3X(p) + 5,5X(p)).$$

По первому свойству преобразования Лапласа

$$L^{-1}3p^3Y(p) + L^{-1}2pY(p) - L^{-1}1,5p^2Y(p) - L^{-1}Y(p) = L^{-1}7p^3X(p) + L^{-1}5,5X(p);$$

$$3L^{-1}p^3Y(p) + 2L^{-1}pY(p) - 1,5L^{-1}p^2Y(p) - L^{-1}Y(p) = 7L^{-1}p^3X(p) + 5,5L^{-1}X(p).$$

Применим основное свойство преобразования Лапласа (при нулевых начальных условиях), считая $Y(p)$ и $X(p)$ изображениями сигналов $y(t)$ и $x(t)$ соответственно:

$$3 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} - 1,5 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} - y(t) = 7 \frac{d^3 x(t)}{dt^3} + 5,5x(t).$$

4.5 Основные типы линейных динамических звеньев.

Звенья, передаточные функции которых имеют вид простых множителей или простых дробей, называют типовыми или элементарными звеньями. Одно и то же дифференциальное уравнение может описывать разные по своей физической природе элементы.

Все конструктивное разнообразие САР можно представить небольшим числом типовых звеньев или их комбинаций.

Звенья, описываемые алгебраическими уравнениями:

- усилительное (пропорциональное);
- запаздывающее.

Звенья, описываемые дифференциальным уравнением первого порядка:

- инерционное;
- интегрирующее;
- дифференцирующее.

Звено, описываемое дифференциальным уравнением второго порядка, в зависимости от соотношения коэффициентов может быть колебательным или апериодическим.

Характеристики типовых звеньев принято указывать для единичного ступенчатого входного воздействия.

Для полной характеристики типового звена следует указать его дифференциальное уравнение, операторное уравнение, передаточную функцию, комплексную, действительную, мнимую, амплитудную, фазовую, логарифмическую амплитудную, логарифмическую фазовую, частотные характеристики и переходную функцию.

1 Пропорциональное (усилительное, безынерционное) звено.

Пропорциональное звено описывается следующим уравнением:

$$y(t) = k \cdot x(t). \quad (4.7)$$

Выходной сигнал такого звена в точности повторяет входной сигнал, усиленный в k раз (выходной сигнал пропорционален входному).

Параметр k называется коэффициентом передачи (усиления).

Переходная функция пропорционального звена (рисунок 4.2)

$$h(t) = k \cdot x(t) = k \cdot 1(t) \begin{cases} 0, t < 0 \\ k, t \geq 0 \end{cases}. \quad (4.8)$$

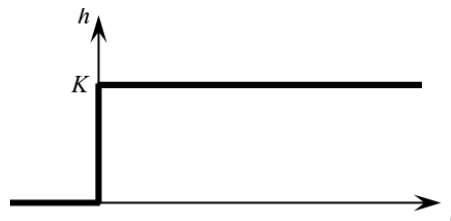


Рисунок 4.2 – График переходной функции пропорционального звена

Импульсная переходная (весовая) функция пропорционального звена

$$w(t) = k \cdot x(t) = k \cdot \delta(t) \begin{cases} 0, t \neq 0 \\ \infty, t = 0 \end{cases}. \quad (4.9)$$

Комплексная частотная характеристика имеет только действительную часть: $W(j\omega) = k$.

Действительная частотная характеристика $U(\omega) = k$, мнимая частотная характеристика $V(\omega) = 0$.

Амплитудная частотная характеристика

$$A(\omega) = \sqrt{U(\omega)^2 + V(\omega)^2} = k. \quad (4.10)$$

Она не зависит от ω – входной сигнал любой частоты изменяется в k раз.
Фазовая частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} 0 = 0 \quad (4.11)$$

Фазовый сдвиг отсутствует.

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика имеет вид

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k. \quad (4.12)$$

2 Запаздывающее звено.

В запаздывающем звене выходная величина начинает изменяться не мгновенно с воздействием входной величины, а некоторое время τ спустя.

Уравнение звена:

$$y(t) = k \cdot x(t - \tau), \quad (4.13)$$

где τ – время запаздывания.

Операторное уравнение

$$Y(p) = k \cdot e^{-p\tau} X(p). \quad (4.14)$$

Передаточная функция звена

$$W(p) = k \cdot e^{-p\tau}. \quad (4.15)$$

Действительная частотная характеристика $U(\omega) = k \cos \omega\tau$, мнимая частотная характеристика $V(\omega) = -k \sin \omega\tau$.

Амплитудная частотная характеристика – постоянная величина, не зависит от частоты, входной сигнал не изменяется:

$$A(\omega) = \sqrt{k^2 (\cos^2 \omega\tau + \sin^2 \omega\tau)} = k. \quad (4.16)$$

Фазовая частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = -\omega\tau. \quad (4.17)$$

Запаздывание по фазе нарастает с увеличением частоты.
Логарифмическая амплитудная частотная характеристика

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k. \quad (4.18)$$

Переходная функция запаздывающего звена

$$h(t) = k \cdot 1(t - \tau). \quad (4.19)$$

На выходе звена получается скачок спустя τ секунд после воздействия на входе (рисунок 4.3).

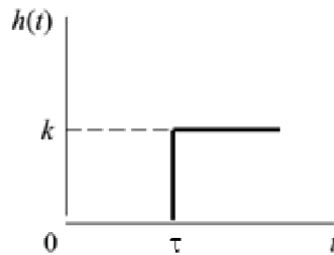


Рисунок 4.3 – График переходной функции запаздывающего звена

3 Инерционное звено или апериодическое звено первого порядка.
Апериодическое звено первого порядка описывается уравнением

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \cdot x(t), \quad (4.20)$$

где k – коэффициент передачи (усиления);
 T – постоянная времени, с.

Выходной сигнал зависит от времени по экспоненциальному закону, переходный процесс – монотонный.

Операторное уравнение

$$(Tp + 1)Y(p) = k \cdot X(p). \quad (4.21)$$

Передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}. \quad (4.22)$$

Переходная функция (рисунок 4.4)

$$h(t) = k(1 - e^{-t/T}). \quad (4.23)$$

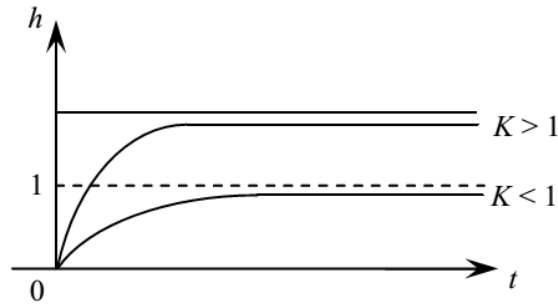


Рисунок 4.4 – График переходной функции инерционного звена

Комплексная частотная характеристика. Для получения комплексной частотной характеристики необходимо заменить p на $j\omega$ и умножить дробь на сопряженное число $\frac{1-Tj\omega}{1-Tj\omega}$

$$W(j\omega) = \frac{k}{Tj\omega + 1} \cdot \frac{1-Tj\omega}{1-Tj\omega} = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1} - j \frac{k\omega T}{T^2\omega^2 + 1}. \quad (4.24)$$

Действительная и мнимая частотные характеристики

$$U(\omega) = \frac{k}{T^2\omega^2 + 1}; \quad V(\omega) = -j \frac{k\omega T}{T^2\omega^2 + 1}.$$

Амплитудная частотная характеристика

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}. \quad (4.25)$$

При $\omega = 0$ амплитуда равна коэффициенту усиления, с увеличением ω стремится к нулю.

Фазовая частотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = -\arctg\omega T. \quad (4.26)$$

Она представляет собой кривую, асимптотически приближающуюся к величине $\varphi(\infty) = -\pi/2$.

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика

$$L(\omega) = 20 \lg \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} = 20 \lg k - 10 \lg(T^2\omega^2 + 1). \quad (4.27)$$

5 Задание для самостоятельного решения

Требуется:

а) по заданному дифференциальному уравнению определить передаточные функции;

б) изобразить структурную схему объекта;

в) по заданной передаточной функции записать дифференциальное уравнение.

Данные по вариантам приведены в таблице 5.1.

Таблица 5.1 – Исходные данные к заданию

Вариант	Дифференциальное уравнение	Передаточная функция
1	$6 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2x(t) + \frac{du(t)}{dt}$	$W(p) = \frac{7p^3 + 5,5}{(p - 0,5) \cdot (3p^2 + 2)}$
2	$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 2 \frac{du(t)}{dt}$	$W(p) = \frac{2p + 1}{p^2 + 3p - 12}$
3	$6 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{du(t)}{dt} - 3f(t)$	$W(p) = \frac{p - 10}{(p - 2) \cdot (p + 5)}$
4	$5 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 0,5y(t) = 2 \frac{du(t)}{dt} + 4u(t) + \frac{df(t)}{dt}$	$W(p) = \frac{4p}{p^3 + 3p - 1}$
5	$y(t) + \frac{dy(t)}{dt} + 3 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = 2u(t) + 3 \frac{df(t)}{dt} + 2f(t)$	$W(p) = \frac{p^2 + 1}{(p - 3) \cdot (p + 2) \cdot (p + 0,5)}$
6	$4 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 6 \frac{du(t)}{dt} + u(t)$	$W(p) = \frac{5}{2p^2 + 3p + 16}$
7	$y(t) - \frac{dx(t)}{dt} + \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = 3x(t) + \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$	$W(p) = \frac{3p - 4}{(p^2 + 1) \cdot (p - 2)}$
8	$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} - 2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} - u(t) = 2 \frac{d^2 u(t)}{dt^2}$	$W(p) = \frac{p - 4}{(p - 1) \cdot (p^2 + 12)}$
9	$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t) + 2f(t) - \frac{du(t)}{dt}$	$W(p) = \frac{2p + 1}{(p + 2) \cdot (p + 3)}$
10	$2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = -4u(t) + 2f(t) - 0,1 \frac{dx(t)}{dt}$	$W(p) = \frac{3p + 5}{(p - 2) \cdot (p^2 + 3)}$
11	$4 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 0,5 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3f(t)$	$W(p) = \frac{5p^2 + 10}{p^3 + 5p - 15}$
12	$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t) + \frac{du(t)}{dt}$	$W(p) = \frac{2p^2 + 1}{4p^2 + 8p - 12}$
13	$y(t) + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 5 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -2u(t) + 3 \frac{df(t)}{dt}$	$W(p) = \frac{3p^3 + 5}{(p + 2) \cdot (p + 1) \cdot (p + 3)}$
14	$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 0,5 \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + x(t)$	$W(p) = \frac{4p + 2}{2p^2 + 6p - 16}$

Список литературы

1 **Антимиров, В. М.** Системы автоматического управления: учебное пособие для вузов / В. М. Антимиров; под науч. ред. В. В. Телицина. – Москва: Юрайт; Екатеринбург: Урал. ун-т, 2018. – 92 с.

2 **Жмудь, В. А.** Системы автоматического управления высшей точности: учебное пособие для бакалавриата и магистратуры / В. А. Жмудь, А. В. Тайченачев. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Юрайт, 2018. – 211 с.

3 **Кудинов, Ю. И.** Теория автоматического управления (с использованием MATLAB-SIMULINK): учебное пособие / Ю. И. Кудинов, Ф. Ф. Пащенко. – 2-е изд., испр. и доп. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2018. – 312 с.: ил.

4 **Кузьмин, А. В.** Теория систем автоматического управления: учебник / А. В. Кузьмин, А. Г. Схиртладзе. – Старый Оскол: ТНТ, 2016. – 224 с.

5 **Сазонов, Г. Г.** Основы автоматического управления: учебное пособие / Г. Г. Сазонов. – Старый Оскол: ТНТ, 2016. – 236 с.

6 **Анхимюк, В. Л.** Теория автоматического управления / В. Л. Анхимюк, О. Ф. Опейко, Н. Н. Михеев. – Минск: ДизайнПРО, 2000. – 351 с.

7 **Брюханов, В. Н.** Теория автоматического управления / В. Н. Брюханов, М. Г. Косов, С. П. Протопопов; под ред. Ю. М. Соломенцева. – 3-е изд., стер. – Москва: Высшая школа, 2000. – 268 с.: ил.