

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КУРСОВОГО ДВИЖЕНИЯ  
КОЛЕСНОГО ТЯГАЧА С ПОЛУПРИЦЕПОМ  
С НЕГОЛОНОМНЫМИ СВЯЗЯМИ**

**MATHEMATICAL MODEL OF THE COURSE MOTION  
OF A WHEELED TRACTOR WITH A SEMITRAILER  
WITH NONHOLONOMIC CONSTRAINTS**

*Билык С.Ю.,*

Белорусско-Российский университет,  
г. Могилев, Республика Беларусь

*S. Bilyk,*

Belarusian-Russian University,  
Mogilev, Republic of Belarus

*В работе изложена методика составления математической модели движения колесного тягача с одноосным прицепом для произвольного криволинейного движения, включающей динамические уравнения в обобщенных координатах, и уравнения неголономных связей (неинтегрируемые уравнения связей), полученных из условия отсутствия скольжения контактов колес относительно опорной поверхности. Математическая модель позволяет решение прямой и обратной задачи динамики движения колесного тягача с полуприцепом.*

*Ключевые слова: обобщенные координаты, кинетическая энергия, уравнения кинематических связей, механическая система.*

*The paper describes a method for compiling a mathematical model of the motion of a wheeled tractor with a uniaxial trailer for an arbitrary curvilinear motion, including dynamic equations in generalized coordinates, and equations of nonholonomic constraints (non-integrable constraint equations) obtained from the condition that the wheel contacts do not slip relative to the support surface. The mathematical model allows solving the direct and inverse problem of the dynamics of the motion of a wheeled tractor with a semitrailer.*

*Keywords: generalized coordinates, kinetic energy, kinematic coupling equations, mechanical system.*

## **Введение**

Колесные машины относятся к неголономным механическим системам. Механика неголономных систем, оформилась как самостоятельный раздел аналитической механики (механики Ньютона) не так давно – в 1894 году в книге Г. Герца (1857–1894). Ему принадлежат термины «голономные и неголономные системы».

*Связью*, наложенной на систему материальных точек  $V_j (j=1, 2, \dots, N)$ , называется условие, налагаемое в процессе движения системы на координаты точек  $x_j (j=1, 2, \dots, N)$  скорости  $\dot{x}_j$  и ускорения  $\ddot{x}_j$ . Данные условия выражаются уравнениями, имеющими вид:

$$f(x_j, \dot{x}_j, \ddot{x}_j, t) = 0. \quad (1)$$

Условно уравнение (1) в виде векторной форме:

$$\varphi_k(\bar{x}_j, \bar{\dot{x}}_j, \bar{\ddot{x}}_j, t) = 0.$$

Если дифференциальное уравнение, выражающее связь, неинтегрируемое, т. е. его нельзя привести к некоторому эквивалентному соотношению вида

$$f(x_j, t) = C, \quad (2)$$

т.е. только между координатами точек  $x_j$  и  $t$ , то такая связь называется *неголономной*. В зависимости от того, входят ли в это уравнение только вторые или первые производные от координат, неголономная связь может быть первого или второго порядка.

Понятие интегрируемости и неинтегрируемости дифференциальных уравнений подразумевается следующее:

- нахождение конечных уравнений только между координатами точек системы в определенной области их изменения, эквивалентных данным дифференциальным уравнениям;

- нахождение координат  $x_j = \varphi_j(t)$  как определенных функций, удовлетворяющих данной неголономной связи, представленной дифференциальным уравнением.

Неголономная связь может быть неинтегрируемой и интегрируемой.

Например, связь

$$x \cdot \dot{x} + y \cdot \dot{y} + z \cdot \dot{z} = 0 \quad (3)$$

голономна, так как из ее уравнения следует уравнение  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ , т.е. конечное соотношение, выражающее зависимость между координатами.

При решении инженерных задач, например, исследование динамики движения колесных машин часто приходится решать задачи определения законов движения в зависимости от времени, а также определение реакций связей качения колес с опорной поверхностью с целью определения тяговой динамики и устойчивости курсового движения. Математические модели, позволяющие решение поставленных задач включают динамические уравнения движения машин и уравнение кинематических связей, накладываемых на качение колеса. При этом, наибольшую сложность представляют создание уравнений кинематических связей.

### **Основная часть**

*Цель исследований* – разработать математическую модель движения неголономной механической системы, состоящей из колесного тягача и колесного полуприцепа с целью исследования кинематических параметров его движения и определения реакций связей колес с опорной поверхностью.

Для составления математической модели криволинейного движения колесного тягача с полуприцепом используем плоскую расчетную схему представленную на рисунке 1.

На рисунке 1: 1 – колесный тягач; 2 – полуприцеп; 3, 4 – задний и передний мосты тягача; 5 – ось полуприцепа;  $C$ ,  $C_{\Pi}$  – центры

масс тягача и полуприцепа;  $K_1, K'_1, K_2, K'_2$  – колеса заднего и переднего моста тягача 1;  $K_3, K'_3$  – колеса полуприцепа;  $a_1, a'_1, a_2, a'_2, a_3, a'_3$  – контакты колес тягача и полуприцепа с опорной поверхностью;  $x_c, y_c, x_{сп}, y_{сп}, \varphi_1, \varphi_2$  – обобщенные координаты тягача и полуприцепа в прямоугольной системе координат ХОУ;  $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}'_2, \bar{n}_3$  – нормали к плоскостям обода колес тягача и полуприцепа;  $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{21}, \delta_{22}, \delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{31}, \delta_{32}$  – углы увода шин колес тягача и полуприцепа;  $\bar{R}_1, \bar{R}'_1, \bar{R}_2, \bar{R}'_2, \bar{R}_3, \bar{R}'_3$  – боковые реакции опорной поверхности колес (неопределенные множители подлежащие определению  $\lambda_i, i=1\dots 6$ );  $\Theta_1, \Theta_2$  – углы поворота управляемых колес тягача;  $\bar{F}_1, \bar{F}'_1, \bar{F}_2, \bar{F}'_2$  – касательные силы тяги, приложенные в контакте колес ведущих мостов тягача с опорной поверхностью;  $\bar{R}_{c1}, \bar{R}'_{c1}, \bar{R}_{c2}, \bar{R}'_{c2}, \bar{R}_{c3}, \bar{R}'_{c3}$  – силы сопротивления движению; «В» – точка шарнирной связи тягача 1 с полуприцепом 2.

Для составления уравнений движения механической системы воспользуемся уравнением Лагранжа первого рода с неопределенными множителями для механической системы:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_{iq} + \lambda_j \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i}, \quad (4)$$

где:  $T$  – кинетическая энергия механической системы;  $q_i$  – обобщенные координаты ( $x_c, y_c, \varphi_1, \varphi_2$ );  $\dot{q}_i$  – обобщенные скорости ( $\dot{x}_c, \dot{y}_c, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$ );  $Q_{iq}$  – обобщенные силы по обобщенным координатам;  $\lambda_j$  – неопределенные множители Лагранжа (пропорциональны боковым реакциям опорной поверхности колес).

Кинетическая энергия  $T$  колесного тягача и полуприцепа запишется в виде:

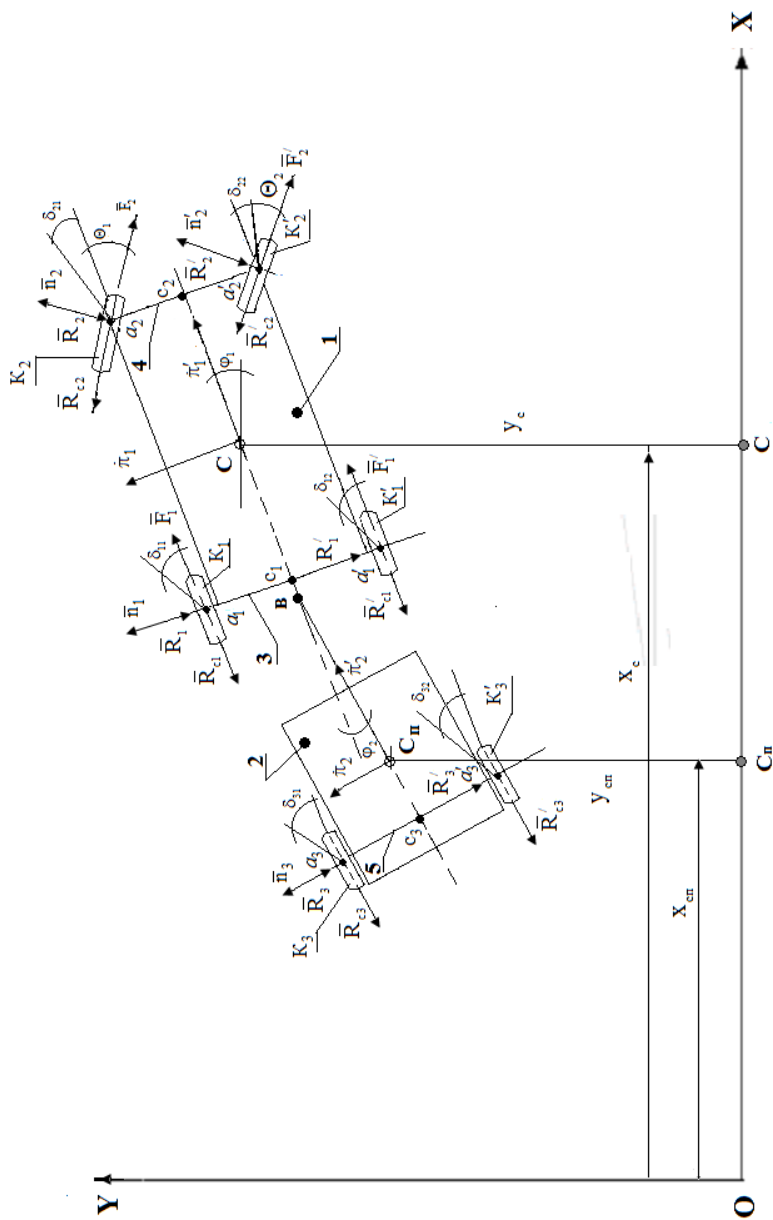


Рисунок 1 – Расчетная схема математической модели курсового движения тягача с полуприцепом

$$T = \frac{1}{2} \cdot \left( m_T \cdot \dot{x}_T^2 + m_T \cdot \dot{y}_T^2 + m_{cn} \cdot \dot{x}_{cn}^2 + m_{cn} \cdot \dot{y}_{cn}^2 + J_T \cdot \dot{\phi}_1^2 + J_n \cdot \dot{\phi}_2^2 + \sum_{k=1}^n J_k \cdot \dot{\phi}_k^2 \right), \quad (5)$$

где:  $m_T$  – масса тягача;  $J_T$  – момент инерции тягача относительно оси перпендикулярной плоскости движения тягача, и проходящей через точку центра масс «С»;  $J_n$  – момент инерции полуприцепа относительно оси перпендикулярной плоскости движения полуприцепа, и проходящей через точку центра масс прицепа «С<sub>n</sub>»;  $x_{ct}$ ,  $x_{cn}$ ,  $y_n$ ,  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  – обобщенные линейные координаты центра масс тягача и прицепа, угловые координаты тягача и полуприцепа;  $\dot{x}_{ct}$ ,  $\dot{y}_{ct}$ ,  $\dot{x}_{cn}$ ,  $\dot{y}_{cn}$ ,  $\dot{\phi}_1$ ,  $\dot{\phi}_2$  – обобщенные линейные и угловые скорости тягача и прицепа;  $\pi_1, \pi_2$  – квазикоординаты, используются при применении уравнения Аппеля, основанной на вычислении энергии ускорения механической системы;  $J_{ki}$  – моменты инерции колес тягача и прицепа ( $n=6$ );  $\dot{\phi}_{ki}$  – угловые скорости вращения колес ( $n=6$ ).

На основании теоремы о скоростях точек тела при плоскопараллельном движении проекции скорости центра масс полуприцепа в проекциях на оси X и Y запишутся в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_{cn} = \dot{x}_c + CB \cdot \dot{\phi}_1 \sin \phi_1 + BC_n \cdot (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \cdot \sin(\phi_1 + \phi_2); \\ \dot{y}_{cn} = \dot{y}_c - CB \cdot \dot{\phi}_1 \cdot \cos \phi_1 - BC_n \cdot (\dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2) \cdot \cos(\phi_1 + \phi_2), \end{cases} \quad (6)$$

где  $CB$ ,  $BC_n$  – геометрические параметры механической системы;  $\dot{x}_c$ ,  $\dot{y}_c$ ,  $\dot{\phi}_1$ ,  $\dot{\phi}_2$  обобщенные линейные скорости центра масс тягача и угловые скорости тягача и полуприцепа.

С учетом системы уравнений (6) уравнение кинетической энергии (5) запишется в виде:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \left( \begin{aligned} & m_T \cdot \dot{x}_c^2 + m_T \cdot \dot{y}_c^2 + m_{\text{сн}} \cdot \left[ \dot{x}_c + CB \cdot \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \right. \\ & \left. + BC_n \cdot (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \right]^2 + \\ & + m_{\text{сн}} \cdot \left[ \dot{y}_c - CB \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \cos \varphi_1 - \right. \\ & \left. - BC_n \cdot (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \right]^2 + \\ & + J_T \cdot \dot{\varphi}_1^2 + J_n \cdot \dot{\varphi}_2^2 + \sum_{k=1}^n J_k \cdot \dot{\varphi}_{k(n=6)}^2 \end{aligned} \right).$$

Функции Лагранжа по обобщенным координатам для заданной механической системы имеют вид:

- по обобщенной координате  $x_c$

$$\frac{\partial T}{\partial x_c} = 0;$$

$$a_{11} = m_T + m_{\text{сн}};$$

$$a_{12} = 0;$$

$$a_{13} = m_{\text{сн}} \cdot (CB \cdot \sin \varphi_1 + BC_n \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$a_{14} = m_{\text{сн}} \cdot BC_n \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2);$$

$$C_1 = m_{\text{сн}} \cdot (\dot{\varphi}_1^2 \cdot CB \cdot \cos \varphi_1 + (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_2) \cdot BC_n \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2)) +$$

$$+ (\dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2) m_{\text{сн}} \cdot BC_n \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2),$$

$$L_{x_c} = \ddot{x}_c \cdot a_{11} + \ddot{\varphi}_1 \cdot a_{13} + \ddot{\varphi}_2 \cdot a_{14} + C_{1x};$$

- по координате  $y_c$

$$\frac{\partial T}{\partial y_c} = 0;$$

$$a_{21} = (m_T + m_T); \quad a_{23} = 0 \quad a_{23} = m_{\text{сн}} \cdot (CB \cdot \cos \varphi_1 + BC_n \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2)));$$

$$\begin{aligned}
a_{24} &= m_{\text{сн}} \cdot BC_{\text{н}} \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2); \quad C_2 = m_{\text{сн}} \cdot \dot{\varphi}_1^2 \cdot CB \cdot \sin \varphi_1 + \\
&\quad m_{\text{сн}} \cdot (\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_2) \cdot BC_{\text{н}} \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2) - \\
&\quad - (\dot{\varphi}_1 \cdot \dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2) \cdot m_{\text{сн}} \cdot BC_{\text{н}} \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2); \\
L_{\text{yc}} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_c} - \frac{\partial T}{\partial y_c} = \ddot{y}_c \cdot a_{21} - \ddot{\varphi}_1 \cdot a_{23} - \ddot{\varphi}_2 \cdot a_{24} + C_2;
\end{aligned}$$

- по обобщенной координате  $\varphi_1$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} &= \dot{\varphi}_1 \cdot m_{\text{сн}} \cdot \left[ CB \cdot \cos \varphi_1 + CB \cdot \sin \varphi_1 + \right. \\
&\quad \left. + BC_{\text{н}} \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \right] + \\
&\quad + \dot{\varphi}_2 \cdot m_{\text{сн}} \cdot BC_{\text{н}} \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + (\sin(\varphi_1 + \varphi_2))); \\
a_{31} &= m_{\text{сн}} \cdot \left( \begin{array}{l} CB \cdot \sin \varphi_1 + \\ + BC_{\text{н}} \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \end{array} \right); \\
a_{32} &= m_{\text{сн}} \cdot \left( \begin{array}{l} CB \cdot \cos \varphi_1 + \\ + BC_{\text{н}} \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \end{array} \right); \\
a_{33} &= m_{\text{сн}} \cdot \left( \begin{array}{l} CB \cdot \sin \varphi_1 + \\ + BC_{\text{н}} \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \end{array} \right)^2; \\
a_{34} &= BC_{\text{н}} \cdot m_{\text{сн}} \cdot \left( \begin{array}{l} CB \cdot \sin \varphi_1 + \\ + BC_{\text{н}} \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \end{array} \right) \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2); \\
C_{\varphi_1} &= -m_{\text{сн}} \cdot (CB \cdot \cos \varphi_1 + C_{\text{н}} \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2)) \cdot \\
&\quad \cdot (CB \cdot \varphi_1^2 \cdot \sin \varphi_1 + BC_{\text{н}} \cdot (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) + \\
&\quad + m_{\text{сн}} \cdot (\dot{\varphi}_1 \cdot CB \cdot \cos \varphi_1 + (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) BC_{\text{н}} \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2)) \cdot \\
&\quad \cdot [\dot{x}_c + CB \cdot \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + BC_{\text{н}} \cdot (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] - \\
&\quad - m_{\text{сн}} \cdot (-\dot{\varphi}_1 \cdot CB \cdot \sin \varphi_1 - BC_{\text{н}} \cdot \sin(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)) \cdot \\
&\quad \cdot [\dot{y}_c - CB \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \cos \varphi_1 - BC_{\text{н}} \cdot (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2)]. \\
L_{\varphi_1} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = a_{31} \cdot \ddot{x}_c - a_{32} \cdot \ddot{y}_c + a_{33} \ddot{\varphi}_1 + a_{34} \cdot \ddot{\varphi}_2 + C_{\varphi_1}.
\end{aligned}$$



- по обобщенной координате  $\varphi_2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} &= \dot{\varphi}_1 \cdot m_{\text{cn}} \cdot \left[ CB \cdot \sin \varphi_1 - CB \cdot \cos \varphi_1 + BC_n \cdot \begin{array}{l} \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ -\cos(\varphi_1 + \varphi_2) \end{array} \right] + \\ &+ \dot{\varphi}_2 \cdot BC_n \cdot m_{\text{cn}} \cdot (\sin(\varphi_1 + \varphi_2) - \cos(\varphi_1 + \varphi_2)); \\ C_4 &= m_{\text{cn}} \cdot BC_n \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \left[ BC_n \cdot (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \right. \\ &\left. - CB \cdot \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1 \right] - \\ &- m_{\text{cn}} \cdot BC_n \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \left[ CB \cdot \dot{\varphi}_1^2 \cdot \sin \varphi_1 - \right. \\ &\left. - BC_n \cdot (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)^2 \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \right] \\ &+ (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \cdot m_{\text{cn}} \cdot BC_n \cdot \\ &\cdot \left( \begin{array}{l} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \left[ \dot{x}_c + CB \cdot \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \right. \\ \left. + BC_n \cdot (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \right] + \\ + \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot \left[ \dot{y}_c - CB \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \cos \varphi_1 - \right. \\ \left. - BC_n \cdot (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \right] \end{array} \right) - \\ &- \dot{\varphi}_1 \cdot m_{\text{cn}} \cdot \left[ CB \cdot \sin \varphi_1 - CB \cdot \cos \varphi_1 + BC_n \cdot \begin{array}{l} \sin(\varphi_1 + \varphi_2) - \\ -\cos(\varphi_1 + \varphi_2) \end{array} \right] + \\ &+ \dot{\varphi}_2 \cdot BC_n \cdot m_{\text{cn}} \cdot \begin{pmatrix} \sin(\varphi_1 + \varphi_2) - \\ -\cos(\varphi_1 + \varphi_2) \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$a_{41} = m_{\text{cn}} \cdot BC_n \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2);$$

$$a_{42} = m_{\text{cn}} \cdot BC_n \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \ddot{\varphi}_1 \cdot m_{\text{cn}} \cdot BC_n \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot BC_n \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + \\ + \ddot{\varphi}_2 \cdot BC_n \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot m_{\text{cn}} \cdot BC_n \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2);$$

$$a_{43} = m_{\text{cn}} \cdot (CB \cdot \cos \varphi_1 + BC_n \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2)) \cdot BC_n \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2);$$

$$a_{44} = BC_n \cdot \cos(\varphi_1 + \varphi_2) m_{\text{cn}} \cdot BC_n \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2).$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_2} = \ddot{x}_c \cdot a_{41} + \ddot{y}_c \cdot a_{42} + \ddot{\varphi}_1 \cdot a_{43} + \ddot{\varphi}_2 \cdot a_{44} + C_4.$$

- по угловым координатам вращения колес

$$L_{\varphi_{ki}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_{ki}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_{ki}} = J_{ki} \cdot \ddot{\varphi}_{ki} \quad (\text{где } i=1\dots 6).$$

Обобщенные силы по обобщенным координатам:

$$\begin{aligned} Q_x &= (F_1 + F') \cdot \cos j_1 + (F_2 + F'_2) \cdot \cos(Q_2 + j) - \\ &\quad - \sum_1^4 R_{ck} \cdot \cos j_1 - \sum_2^2 R_{cy} \cdot \cos(j_1 + j_2); \\ Q_y &= (F_1 + F') \cdot \sin j_1 + (F_2 + F'_2) \cdot \sin(Q_2 + j) - \\ &\quad - \sum_1^4 R_{ck} \cdot \sin j_1 - \sum_2^2 R_{cy} \cdot \sin(j_1 + j_2); \\ Q_{j_1} &= \sum_1^1 M_{cT}(P_n); Q_{j_2} = \sum_1^1 M_{cn}(P_n), \end{aligned}$$

где  $F_1, F', F_2, F'$  силы тяги в контакте ведущих колес тягача с опорной поверхностью, зависящие от реализации ведущими колесами их условий сцепления с опорной поверхностью.

Уравнения неголономных связей получены из условия отсутствия скольжения контактов колеса в боковом направлении к плоскости его качений по нормали,  $\bar{n}_{1-6}$ .

Таким образом, система динамических уравнений колесного тягача с полуприцепом запишется в виде:

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{x}_c \cdot a_{11} + \ddot{\varphi}_1 \cdot a_{13} + \ddot{\varphi}_2 \cdot a_{14} &= Q_x + \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}_c} - C_1; \\ \ddot{y}_c \cdot a_{21} - \ddot{\varphi}_1 \cdot a_{23} - \ddot{\varphi}_2 \cdot a_{24} &= Q_y + \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \dot{y}_c} + C_2; \\ \ddot{x}_c \cdot a_{31} - a_{32} \cdot \ddot{y}_c + a_{33} \ddot{\varphi}_1 + a_{34} \cdot \ddot{\varphi}_2 &= Q_{\varphi_1} + \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \dot{\varphi}_1} + C_3; \\ \ddot{x}_c \cdot a_{41} + \ddot{y}_c \cdot a_{42} + \ddot{\varphi}_1 \cdot a_{43} + \ddot{\varphi}_2 \cdot a_{44} &= Q_{\varphi_2} + \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \dot{\varphi}_2} + C_4. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

Уравнения неголономных связей механической системы колесный тягач-полуприцеп запишутся в виде

Совокупность динамических уравнений (7) и уравнений кинематических связей качения колеса (8) позволяет моделирование движения колесного тягача с прицепом и определение боковых сил, действующих на колеса тягача и прицепа, а также определить мощностные потери, возникающих из-за возникновения увода колес при криволинейном движении.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 1. \frac{df_1}{dt} = \left[ \begin{array}{l} \dot{x}_c + ca_2 \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \sin(\gamma_1 + \varphi_1) + \\ + \dot{y}_c - ca_2 \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \cos(\gamma_1 + \varphi_1) \end{array} \right] \cdot \sin \Theta_1 = 0; \\
 2. \frac{df_2}{dt} = \left[ \begin{array}{l} y_c - ca_1 \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \sin(\gamma_2 + \varphi_1) + \\ + \dot{y}_{a'2} - ca_1 \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \cos(\gamma_2 + \varphi_1) \end{array} \right] \cdot \cos \Theta_1 = 0; \\
 3. \frac{df_3}{dt} = \left[ \begin{array}{l} \dot{x}_c - ca_1 \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \sin(\gamma_3 + \varphi_1) + \\ + \dot{y}_c - ca_1 \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \cos(\gamma_3 + \varphi_1) \end{array} \right] \cdot \sin \varphi_1 = 0; \\
 4. \frac{df_4}{dt} = \left[ \begin{array}{l} \dot{x}_c - l_n \cdot (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \cdot \sin(\gamma_3 + \\ + \varphi_1 - \varphi_2) + \\ + \dot{y}_c - \\ - l_n \cdot (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \cdot \cos(\gamma_3 + \varphi_1 - \varphi_2) \end{array} \right] \cdot \cos \varphi_1 = 0; \quad (8) \\
 5. \frac{df_5}{dt} = \left[ \begin{array}{l} \dot{x}_c - l_n \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \sin \varphi_1 - \\ - \dot{\varphi}_2 \cdot l_T \cdot \sin \varphi_2 + \\ + \dot{y}_c - l_n \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \cos \varphi_1 - \\ - l_T \cdot \dot{\varphi}_2 \cdot \cos \varphi_2 \end{array} \right] \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0; \\
 6. \frac{df_6}{dt} = \left[ \begin{array}{l} \dot{x}_c - l_n \cdot \dot{\varphi}_1 \cdot \sin \varphi_1 - \\ - \dot{\varphi}_2 \cdot l_T \cdot \sin \varphi_2 + \\ + \dot{y}_c - \dot{\varphi}_1 \cdot l_n \cdot \cos \varphi_1 - \\ - \dot{\varphi}_2 \cdot l_T \cdot \cos \varphi_2 \end{array} \right] \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 0.
 \end{array} \right.$$

## **Заключение**

Разработана методика составления динамических уравнения криволинейного движения колесного тягача с полуприцепом (поезд) и уравнения неголономными связями колес поезда. Методика позволяет определить закон движения поезда по любой криволинейной траектории при заданных законах поворота управляемых колес тягача, моментах, передаваемых от силовой установки к ведущим колесам тягача, реакции связи колес с опорной поверхностью (боковые силы, действующие на колеса), а также определить потери мощности, связанных с возникновением углов увода колес.

## **Литература**

1. Управление движением колесных машин: [монография] / С.Н. Поддубко [и др.]; под общ. Ред. д-ра техн. наук, проф. И. С. Сафонова. – Могилев: Беларус.-Рос. ун-т., 2018. – 511 с.: ил.
2. Ким, В.А. Методология создания адаптивных САБ АТС на основе силового анализа: монография / В. А. Ким. – Могилев: Белорусско-Российский университет, 2003. – 346 с.
3. Лагранж, Ж. Аналитическая механика / Ж. Лагранж. – М. : Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1950. – 440 с.