МЕЖГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛОРУССКО-РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Электропривод и автоматизация промышленных установок»

АВТОНОМНЫЕ МОБИЛЬНЫЕ РОБОТЫ

Методические рекомендации к практическим занятиям для магистрантов направления подготовки 15.04.06 «Мехатроника и робототехника» очной и заочной форм обучения

Часть 1

Могилев 2023

УДК 621.865.8
ББК 32.816
А22

Рекомендовано к изданию
учебно-методическим отделом
Белорусско-Российского университета

Одобрено кафедрой «Электропривод и автоматизация промышленных установок» «26» октября 2022 г., протокол № 3

Составитель канд. техн. наук, доц. С. М. Фурманов

Рецензент канд. техн. наук, доц. М. Н. Миронова

Методические рекомендации к практическим занятиям по дисциплине «Автономные мобильные роботы» предназначены для магистрантов направления подготовки 15.04.06 «Мехатроника и робототехника» очной и заочной форм обучения.

Учебно-методическое издание

АВТОНОМНЫЕ МОБИЛЬНЫЕ РОБОТЫ

Часть 1

Ответственный за выпуск С. М. Фурманов

Корректор А. А. Подошевко

Компьютерная верстка Н. П. Полевничая

Подписано в печать . Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 26 экз. Заказ №

Издатель и полиграфическое исполнение:
Межгосударственное образовательное учреждение высшего образования
«Белорусско-Российский университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/156 от 07.03.2019.
Пр-т Мира, 43, 212022, г. Могилев.

© Белорусско-Российский
университет, 2023

Содержание

1 Практическое занятие № 1. Применение уравнений Лагранжа с неопределенными множителями в задачах динамики мобильных колесных роботов …… 4

2 Практическое занятие № 2. Описание динамики колесных роботов при помощи уравнений Воронца и уравнений Чаплыгина …… 10

3 Практическое занятие № 3. Применение псевдоскоростей для описания динамики колесных роботов; уравнения Маджи …..... 14

4 Практическое занятие № 4. Уравнения Эйлера – Лагранжа в псевдоскоростях и их использование в задачах динамики мобильных роботов …… 21

5 Практическое занятие № 5. Уравнения Аппеля для неголономных механических систем с применением к динамике мобильных колесных роботов …… 25

6 Практическое занятие № 6. Описание электроприводов постоянного тока ……...……..... 33

7 Практическое занятие № 7. Стационарные движения колесных роботов……. 38

8 Практическое занятие № 8. Нестационарные движения колесных роботов …… 43

Список литературы …….…….. 47

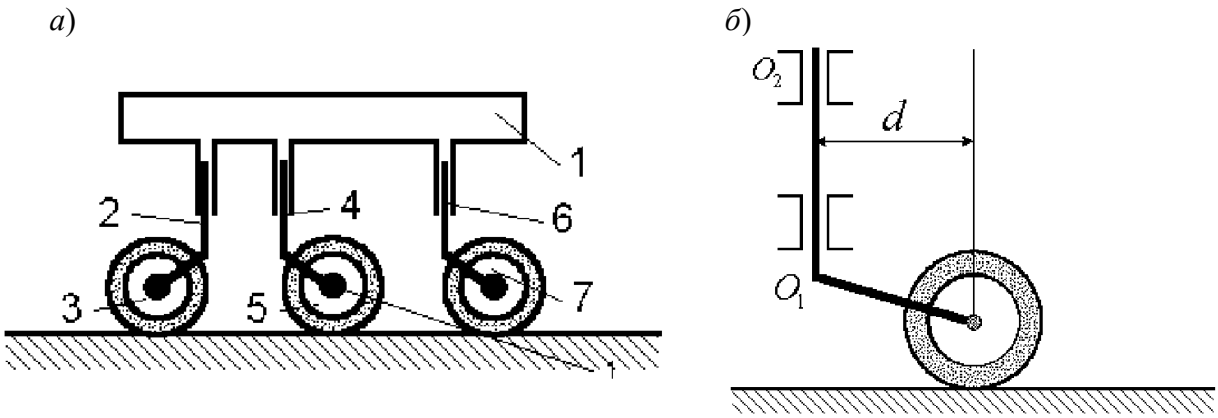
1 Практическое занятие № 1. Применение уравнений Лагранжа с неопределенными множителями в задачах динамики мобильных колесных роботов

Цель работы: изучить процесс получения уравнений Лагранжа с неопределенными множителями в задачах динамики мобильных колесных роботов.

1.1 Уравнения Лагранжа с неопределенными множителями

Автономный колесный робот является сложной управляемой электромеханической системой, состоящей из ходовой части и многоуровневой системы управления движением. В нем одновременно протекают механические процессы при движении робота и информационные процессы при обработке сигналов измерительных устройств и формировании управляющих сигналов.

Моделью механической части робота является система абсолютно твердых тел, соединенных цилиндрическими шарнирами. Одно из тел системы, к которому прикреплено n колес, называется платформой. На рисунке 1.1, *а* показана трехколесная система ($n = 3$). Колесо удерживается в вертикальном положении с помощью вилки, и его положение относительно платформы определяется двумя обобщенными координатами: углом поворота вокруг вертикальной (поворотной) оси, фиксированной в платформе, и углом поворота вокруг горизонтальной (маршевой) оси (рисунок 1.1, *б*). Горизонтальные оси колес могут жестко фиксироваться относительно платформы, в этом случае положение колеса относительно платформы определяется одним углом поворота вокруг горизонтальной оси. Если пренебречь проскальзыванием колес в точке соприкосновения колес с поверхностью, то возникают неголономные связи, определяющие набор псевдоскоростей системы. В робототехнике механическая система с неголономными связями служит объектом управления, и механические процессы в ней взаимосвязаны с информационными процессами обработки выходных сигналов чувствительных датчиков и формирования управляющих воздействий.



1 – платформа; *2*, *4*, *6* – поворотные оси вилок; *3*, *5*, *7* – колеса; *d* – вынос вилки колеса

Рисунок 1.1 – Трехколесная система ($n = 3$) (*а*) и конструкция «рояльного колеса» (*б*)

Вывод уравнений движения механических систем с неголономными связями является одним из центральных моментов при изучении аналитической динамики. Основные подходы к выводу уравнений движения колесных роботов базируются на общих теоремах динамики [1] или аппарате неголономной механики [2, 3]. В последнем случае весьма удобна векторно-матричная форма уравнений, предложенная в [4–7] и ориентированная на использование систем компьютерной алгебры для построения математических моделей неголономных механических систем.

Если положение мобильного робота определяется s-мерным вектором обобщенных координат $\mathbf{q} = | q_1 \ q_2 \ ... \ q_S |^{\mathrm{T}}$, где T – знак транспонирования, то условия отсутствия проскальзывания в точках соприкосновения колес с поверхностью приводят к l дифференциальным неинтегрируемым (неголономным) стационарным связям, уравнения которых имеют вид

$$\underset{l\times S}{\mathbf{B}} \times \underset{S\times 1}{\dot{\mathbf{q}}} = \underset{l\times 1}{0}, \tag{1.1}$$

где $\dot{\mathbf{q}}$ – вектор обобщенных скоростей (точка обозначает дифференцирование по времени);

B – прямоугольная ($l \times$ s)-матрица, элементы которой являются функциями обобщенных координат (для простоты связи считаются стационарными, поэтому **B** явно от времени не зависит).

Движение мобильного робота описывается уравнениями Лагранжа с неопределенными множителями

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)^{\mathrm{T}} - \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}, \tag{1.2}$$

где T – кинетическая энергия системы;

Q – вектор обобщенных сил;

$\boldsymbol{\lambda}$ – l-мерный вектор неопределенных множителей Лагранжа, $\boldsymbol{\lambda} = |\lambda_1 \ \lambda_2 \ ... \ \lambda_l |^{\mathrm{T}}$.

Производная от скаляра T по вектору **q** определяется как вектор-строка

$$\frac{\partial T}{d\mathbf{q}} = \left(\frac{\partial T}{\partial q_1} \ \frac{\partial T}{\partial q_2} ... \frac{\partial T}{\partial q_S}\right).$$

Уравнения (1.1), (1.2) образуют замкнутую систему $s + l$ уравнений для $s + l$ неизвестных **q**, $\boldsymbol{\lambda}$. Если строки матрицы **B** образуют единичные векторы

$$\sum_{k=1}^{S} b_{ik}^2 = 1,$$

то механический смысл неопределенных множителей $\boldsymbol{\lambda}$ состоит в том, что вектор $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}$ представляет собой обобщенную реакцию неголономных связей, которые однозначно восстанавливаются из уравнений связи (1.1) и движения (1.2).

1.2 Пример решения задачи

Задача. Однородный диск массой m радиусом r катится без скольжения так, что его плоскость остается перпендикулярной горизонтальной плоскости качения (рисунок 1.2). Составить уравнения движения диска; определить движение, отвечающее начальным условиям $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\psi(0) = 0$, $\dot{\psi}(0) = \Omega_0$, $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$; найти реакцию неголономной связи.

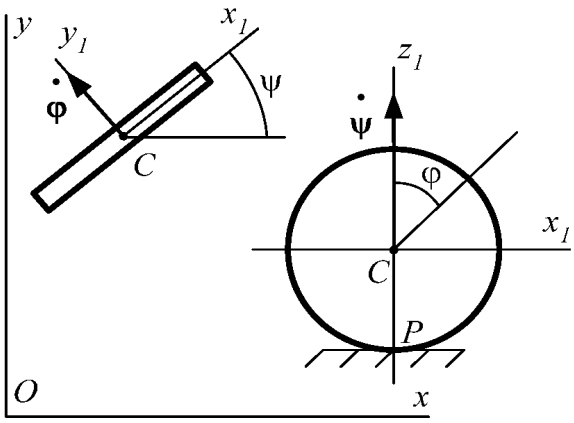


Рисунок 1.2 – Однородный диск массой m с радиусом r

Решение

Положение диска определяется четырехмерным вектором обобщенных координат $\mathbf{q} = (x, y, \psi, \varphi)^{\mathrm{T}}$, где x, y – координаты центра диска. На эти координаты наложена неголономная стационарная связь $\mathbf{V}_P = 0$. Для получения уравнений этой связи составим выражение для скорости точки P в соответствии с графом $C \to P$ и приравняем его нулю.

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_C + \left[\mathbf{\Omega}_1, \mathbf{CP}\right] = 0.$$

В матричной форме в трехграннике $Oxyz$ это выражение будет иметь вид

$$\mathbf{V}_C + \hat{\mathbf{C}}\mathbf{P}\mathbf{\Omega}_1 = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -r & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{\varphi}\sin\psi \\ \dot{\varphi}\cos\psi \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &\dot{x} - \dot{\varphi} r \cos\psi = 0; \\ &\dot{y} - \dot{\varphi} r \sin\psi = 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Отвечающая этим уравнениям и вектору $\mathbf{q}$ матрица $\mathbf{B}$ имеет вид

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -r\cos\psi \\ 0 & 1 & 0 & -r\sin\psi \end{pmatrix}.$$

Вычислим кинетическую энергию диска как функцию обобщенных координат и скоростей:

$$T = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + T^{от},$$

где $T^{от}$ – кинетическая энергия движения диска относительно точки C.

Так как диск совершает пространственное движение, $T^{от}$ определим как для тела, вращающегося около одной неподвижной точки:

$$T^{от} = \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{I}\mathbf{\Omega}_1; \qquad \mathbf{I} = \frac{mr^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathbf{\Omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$T^{от} = \frac{mr^2}{8}\left(2\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2\right).$$

Следовательно

$$T = \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{mr^2}{8}\left(2\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2\right).$$

В рассматриваемом движении диска вектор обобщенных сил $\mathbf{Q} = 0$ и уравнение (1.2) примут вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)^{\mathrm{T}} - \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}; \qquad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1 \ \lambda_2)^{\mathrm{T}}.$$

Выполняя все процедуры, предусмотренные этим уравнением, получим

$$m\ddot{x} = \lambda_1; \qquad m\ddot{y} = \lambda_2; \qquad \frac{mr^2}{4}\ddot{\psi} = 0;$$

$$\frac{mr^2}{4}\ddot{\varphi} = -r\left(\lambda_1 \cos\psi + \lambda_2 \sin\psi\right). \tag{1.4}$$

Уравнения (1.3) и (1.4) представляют замкнутую систему, определяющую движение диска и реакцию неголономной связи.

Найдем движение, отвечающее заданным начальным условиям. Из третьего уравнения системы (1.4) находим

$$\dot{\psi} = \Omega_0; \qquad \psi = \Omega_0 t.$$

Из первого, второго и четвертого уравнений в (1.4) имеем

$$\frac{mr^2}{2}\ddot{\varphi} = -rm\left(\ddot{x}\cos\psi + \ddot{y}\sin\psi\right). \qquad (1.5)$$

Продифференцировав (1.3) и подставив $\ddot{x}, \ddot{y}$ в (1.5), получим

$$\frac{3mr^2}{2}\ddot{\varphi} = 0.$$

Отсюда $\dot{\varphi} = \omega_0$, $\varphi = \omega_0 t$.

Подставим $\dot{\varphi}$ и ψ в (1.3):

$$\dot{x} = \omega_0 r\cos\Omega_0 t; \qquad \dot{y} = \omega_0 r\sin\Omega_0 t. \qquad (1.6)$$

Параметрические уравнения движения центра C диска будут иметь вид

$$x = \frac{\omega_0 r}{\Omega_0}\sin\Omega_0 t; \qquad y = \frac{\omega_0 r}{\Omega_0}\left(1 - \cos\Omega_0 t\right).$$

Траекториями, отвечающими этим уравнениям, является семейство окружностей радиуса $R_T = \dfrac{\omega_0 r}{\Omega_0}$, центр которых смещен по оси y на величину этого радиуса. Такие же окружности описывает и точка касания диска с плоскостью качения – неподвижные центроиды, т. к. по условию задачи плоскость диска остается перпендикулярной плоскости качения. Центр C диска движется по траектории с постоянной скоростью $V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \omega_0 r$. Для определения проекций $R_x = \lambda_1$, $R_y = \lambda_2$ реакции R неголономной связи продифференцируем (1.6) и подставим $\ddot{x}, \ddot{y}$ в первое и второе уравнения (1.4):

$$R_x = -m\Omega_0\omega_0 r\sin\Omega_0 t; \qquad R_y = -m\Omega_0\omega_0 r\cos\Omega_0 t;$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = m\Omega_0\omega_0 r.$$

Таким образом, реакция неголономной связи постоянна по величине и направлена к центру соответствующей неподвижной центроиды радиуса:

$$R_T = \frac{\omega_0 r}{\Omega_0}.$$

Оценим условия освобождаемости неголономной связи. Реакция неголономной связи во время движения реализуется силой кулонова трения $F_{тр} \le fN = fmg$. Следовательно, $m\Omega_0\omega_0 r \le fmg$, где f – коэффициент трения скольжения.

Учитывая, что $\omega_0 r = V_{Cx1} = V_C$, $\Omega_0 = \dfrac{V_C}{R_T}$, ограничения по скорости V_C:

$$V_C^2 \le fgR_T .$$

Запишем уравнения связи $\mathbf{V}_p = 0$ в осях $Cx_1y_1z_1$:

$$\begin{pmatrix} V_{Px1} \\ V_{Py1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{Cx1} \\ V_{Cy1} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -r & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$V_{Px1} = V_{Cx1} - \dot{\varphi} r = 0; \qquad V_{Py1} = V_{Cy1} = 0 .$$

Учитывая, что V_{Cx1}, V_{Cy1} связаны с x, y матрицей направляющих косинусов:

$$\begin{pmatrix} V_{Cx1} \\ V_{Cy1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix},$$

получим уравнения связи и соответствующую им и вектору $\mathbf{q}$ матрицу $\mathbf{B}_1$:

$$\dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi - \dot{\varphi} r = 0; \quad -\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi = 0;$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 & -r \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор неопределенных множителей $\lambda_1 = (\lambda_{11}\ \lambda_{12})^{\mathrm{T}}$.

Уравнениями движения диска будут

$$m\ddot{x} = \lambda_{11}\cos\psi - \lambda_{12}\sin\psi; \quad m\ddot{y} = \lambda_{11}\sin\psi - \lambda_{12}\cos\psi;$$

$$\frac{mr^2}{4}\ddot{\psi} = 0; \qquad \frac{mr^2}{2}\ddot{\varphi} = -\lambda_{11} r . \tag{1.7}$$

Если в уравнениях (1.4) и (1.7) исключить неопределенные множители, получим одну и ту же систему

$$\ddot{\psi} = 0; \quad \ddot{\varphi} r = -2\left(\ddot{x}\cos\psi + \ddot{y}\sin\psi\right).$$

1.3 Задание для самостоятельной работы

Задача. Составить уравнения движения одноколесной тачки под действием сил F_1, F_2. Корпус тачки массой m_1 движется параллельно горизонтальной плоскости, по которой колесо массой m_2 катится без скольжения (рисунок 1.3). Силы F_1, F_2 параллельны оси Ax_1, $AC = a$, точка C – центр масс корпуса, радиус инерции $\rho_{Cz} = \rho$, $BD = BE = b$, колесо – однородный диск радиуса R.

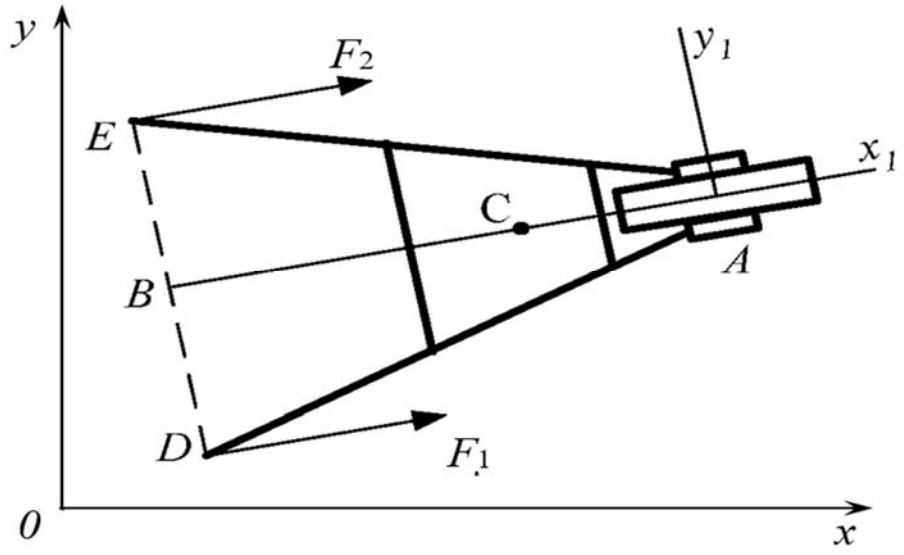


Рисунок 1.3 – Модель одноколесной тачки

Контрольные вопросы

1 Механическая система мобильного робота с неголономными связями как объект управления в робототехнике.

2 Опишите модель механической части мобильного робота.

3 Опишите движение механических систем с неголономными связями с помощью уравнений Лагранжа с неопределенными множителями.

2 Практическое занятие № 2. Описание динамики колесных роботов при помощи уравнений Воронца и уравнений Чаплыгина

Цель работы: изучить процесс получения уравнений Воронца и Чаплыгина в задачах динамики мобильных колесных роботов.

2.1 Уравнения Воронца и Чаплыгина

Различные способы исключения неопределенных множителей из системы уравнений (1.1) и (1.2) приводят к различным формам уравнений неголономной механики. Если векторы обобщенных координат и сил можно разделить на два вектора меньшей размерности $r + l = s$, то

$$\underset{s\times 1}{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} \mathbf{q_1} \\ \mathbf{q_2} \end{pmatrix}; \qquad \underset{r\times 1}{\mathbf{q_1}} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_r \end{pmatrix}; \qquad \underset{l\times 1}{\mathbf{q_2}} = \begin{pmatrix} q_{r+1} \\ \dots \\ q_s \end{pmatrix};$$

$$\underset{s\times 1}{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q_1} \\ \mathbf{Q_2} \end{pmatrix}; \qquad \underset{r\times 1}{\mathbf{Q_1}} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \dots \\ Q_r \end{pmatrix}; \qquad \underset{l\times 1}{\mathbf{Q_2}} = \begin{pmatrix} Q_{r+1} \\ \dots \\ Q_s \end{pmatrix},$$

так что уравнения неголономных связей можно представить в виде

$$\underset{l\times 1}{\dot{\mathbf{q}}_2} = \underset{l\times r}{\mathbf{A}}\,\underset{r\times 1}{\dot{\mathbf{q}}_1}\,. \tag{2.1}$$

Получаемые из (1.2) уравнения называются уравнениями Воронца:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{\mathbf{q}}_1}\right)^{\mathrm{T}} - \left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mathbf{q}_1}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\cdot\left(\mathbf{Q}_2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mathbf{q}_2}\right)^{\mathrm{T}}\right) +$$

$$+\left[\frac{d\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}{dt} - \left(\frac{\partial(\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}_1)}{\partial\mathbf{q}_1}\right)^{\mathrm{T}} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\cdot\left(\frac{\partial(\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}_1)}{\partial\mathbf{q}_2}\right)^{\mathrm{T}}\right]\mathbf{p}_2, \tag{2.2}$$

где Θ – «приведенная» кинетическая энергия системы, $\Theta = \Theta(\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}, \dot{\mathbf{q}}_1) \equiv$ $\equiv T(\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}, \dot{\mathbf{q}}_1, \mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}_1)$;

$\mathbf{p_2}$ – вектор обобщенного импульса, отвечающий исключаемым обобщенным скоростям, $\mathbf{p_2} = \left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot{\mathbf{q}}_2}\right)^{\mathrm{T}}$.

В частном случае, когда кинетическая энергия и уравнения неголономных связей не зависят от вектора обобщенных координат $\mathbf{q_2}$, уравнения Воронца (2.2) принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{\mathbf{q}}_1}\right)^{\mathrm{T}} - \left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mathbf{q}_1}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_2 + \left[\frac{d\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}{dt} - \left(\frac{\partial(\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}_1)}{\partial\mathbf{q}_1}\right)^{\mathrm{T}}\right]\mathbf{p}_2. \tag{2.3}$$

Уравнения (2.3) называются уравнениями Чаплыгина. Если действующие на систему силы потенциальны, а силовая функция U не зависит от обобщенных координат $\mathbf{q_2}$, то в уравнениях Чаплыгина исчезает слагаемое, зависящее от $\mathbf{Q}_2$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{\mathbf{q}}_1}\right)^{\mathrm{T}} - \left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mathbf{q}_1}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial U}{\partial\mathbf{q}_1}\right)^{\mathrm{T}} + \left[\frac{d\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}{dt} - \left(\frac{\partial(\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}_1)}{\partial\mathbf{q}_1}\right)^{\mathrm{T}}\right]\mathbf{p}_2. \tag{2.4}$$

2.2 Пример решения задачи

Задача. Мобильный робот движется по горизонтальной плоскости под действием момента M_1, приложенного к ведущему колесу (рисунок 2.1). Управление поворотом робота производится с помощью двигателя-маховика, ось вращения которого проходит через центр масс C платформы, момент на валу двигателя – M_2. Составить уравнения движения робота, если ведущее колесо массой m_1 радиусом r катится без скольжения; масса платформы – m_2; $AC = a$; радиус инерции $\rho_{Cz} = \rho$; масса двигателя-маховика m_3; радиус инерции $\rho_{3Cz} = \rho_3$. Ведущее колесо – однородный диск, а рояльные колеса D и E – гладкие опоры.

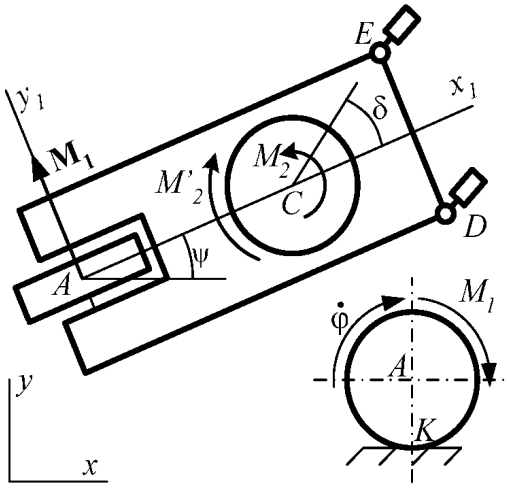


Рисунок 2.1 – Модель движения мобильного робота по горизонтальной плоскости

Решение

Положение робота определяется пятимерным вектором $\mathbf{q} = (\varphi, \psi, \delta, x, y)^{\mathrm{T}}$, где x, y – координаты точки A. На систему наложены две неголономные связи $V_{Kx} = 0$ и $V_{Ky} = 0$, уравнения которых (1.3) представим в виде:

$$\dot{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}_1, \tag{2.5}$$

где $\dot{\mathbf{q}}_1 = \left(\dot{\varphi}\ \dot{\psi}\ \dot{\delta}\right)^{\mathrm{T}}$;

$\dot{\mathbf{q}}_2 = \left(\dot{x}\ \dot{y}\right)^{\mathrm{T}}$;

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} r\cos\psi & 0 & 0 \\ r\sin\psi & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем выражение кинетической энергии $T(\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}, \dot{\mathbf{q}}_1, \dot{\mathbf{q}}_2)$:

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

где

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m_1 r^2}{8}(2\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2);$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m_2\dot{\psi}a(\dot{y}\cos\psi - \dot{x}\sin\psi) + \frac{1}{2}m_2(\rho^2 + a^2)\dot{\psi}^2;$$

$$T_3 = \frac{1}{2}m_3(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m_3\dot{\psi}a(\dot{y}\cos\psi - \dot{x}\sin\psi) + \frac{1}{2}m_3\rho_3^2(\dot{\psi} + \dot{\delta})^2.$$

После несложных преобразований получим

$$T=\frac{1}{2}m_0(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+m_1\dot{\psi}a(\dot{y}\cos\psi-\dot{x}\sin\psi)+\frac{m_1r^2}{4}\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}I\dot{\psi}^2+\frac{1}{2}m_3\rho_3^2\left(\dot{\psi}+\dot{\delta}\right)^2,$$

где $m_0=m_1+m_C$;

$m_c=m_2+m_3$;

$I=\dfrac{m_1r^2}{4}+m_2(\rho^2+a^2)+m_3a^2.$

Найдем вектор обобщенных сил $\mathbf{Q}=(Q_\varphi\ \ Q_\psi\ \ Q_\delta\ \ Q_x\ \ Q_y)^{\mathrm{T}}$, для чего вычислим мощность активных сил на возможных скоростях:

$$M_{1y1}\dot{\varphi}^{\hat{a}}+M_{2z}(\dot{\psi}^{\hat{a}}+\dot{\delta}^{\hat{a}})-M_{2z}\dot{\psi}^{\hat{a}}=M_1\dot{\varphi}^{\hat{a}}+M_2\dot{\delta}^{\hat{a}}=$$

$$=Q_\varphi\dot{\varphi}^{\hat{a}}+Q_\psi\dot{\psi}^{\hat{a}}+Q_\delta\dot{\delta}^{\hat{a}}+Q_x\dot{x}^{\hat{a}}+Q_y\dot{y}^{\hat{a}}.$$

Отсюда

$$\mathbf{Q}=\left(M_1\ 0\ M_2\ 0\ 0\right)^{\mathrm{T}}=(\mathbf{Q}_1\ \mathbf{Q}_2)^{\mathrm{T}};\quad \mathbf{Q}_1=\left(M_1\ 0\ M_2\right)^{\mathrm{T}};\quad \mathbf{Q}_2=\left(0\ 0\right)^{\mathrm{T}}.$$

Вычислим функцию $\Theta=\Theta(\mathbf{q_1}\ \mathbf{q_2}\ \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{1})^{\mathrm{T}}$:

$$\Theta=\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}I\dot{\psi}^2+\frac{1}{2}m_3\rho_3^2(\dot{\psi}+\dot{\delta})^2;\quad m=m_0+\frac{m_1}{2}.$$

Вектор обобщенного импульса

$$\mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}P_x\\P_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial T}{\partial\dot{x}} & \dfrac{\partial T}{\partial\dot{y}}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}m_0\dot{x}-m_0\dot{\psi}a\sin\psi\\ m_0\dot{y}+m_0\dot{\psi}a\cos\psi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m_0\dot{\varphi}r\cos\psi-m_C\dot{\psi}a\sin\psi\\ m_0\dot{\varphi}r\sin\psi+m_C\dot{\psi}a\cos\psi\end{pmatrix}.$$

Выполним все процедуры, предусмотренные оператором (2.3):

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}r\cos\psi & r\sin\psi\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};\qquad \frac{d\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}{dt}=\begin{pmatrix}-r\dot{\psi}\sin\psi & r\dot{\psi}\cos\psi\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial(\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}_1)}{\partial\mathbf{q}_1}=\begin{pmatrix}0 & -\dot{\varphi}r\sin\psi & 0\\ 0 & \dot{\varphi}r\cos\psi & 0\end{pmatrix};$$

$$\left[\frac{d\mathbf{A}^{\mathrm{T}}}{dt}-\left(\frac{\partial(\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}_1)}{\partial\mathbf{q}_1}\right)^{\mathrm{T}}\right]\begin{pmatrix}P_x\\P_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-r\dot{\psi}\sin\psi & r\dot{\psi}\cos\psi\\ \dot{\varphi}r\sin\psi & -\dot{\varphi}r\cos\psi\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_x\\P_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m_crar\dot{\psi}^2\\ -m_crar\dot{\varphi}\dot{\psi}\\ 0\end{pmatrix};$$

$$mr^2\ddot{\varphi} = M_1 + m_C ra\dot{\psi}^2;$$

$$I\ddot{\psi} + m_3\rho_3^2 \cdot \left(\ddot{\psi} + \ddot{\delta}\right) = -m_C ra\dot{\varphi}\dot{\psi};$$

$$m_3\rho_3^2\left(\ddot{\psi} + \ddot{\delta}\right) = M_2. \qquad (2.6)$$

Система (2.5), (2.6) представляет собой замкнутую систему уравнений в форме Воронца – Чаплыгина, определяющих движение робота.

2.3 Задание для самостоятельной работы

Задача. Пользуясь результатами при решении задачи в примере, определить движение робота, отвечающее начальным условиям $x(0) = 0$; $y(0) = 0$; $\varphi(0) = 0$; $\psi(0) = 0$; $\delta(0) = 0$; $\dot{\varphi}(0) = 0$; $\dot{\psi}(0) = 0$; $\dot{\delta}(0) = 0$, $m_1 = 3$ кг; $m_2 = 25$ кг; $m_3 = 2$ кг; $r = 0{,}1$ м; $\rho = 0{,}3$ м; $\rho_3 = 0{,}07$ м; $a = 0{,}3$ м; $M_1 = c_{11}U_1 - c_{12}\dot{\varphi}$; $M_2 = -(c_{21}U_2 - c_{22}\dot{\delta})$; $c_{11} = 0{,}75$ Н·м/В; $c_{21} = 0{,}7$ Н·м/В; $c_{12} = 0{,}36$ Н·м·с; $c_{22} = 0{,}01$ Н·м·с.

По результатам интегрирования уравнений (2.5), (2.6) на интервале времени $\tau = 30$ с построить траектории точки A $y = y(x)$ и графики $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\delta(t)$ для трех значений напряжения U_2 на управляющем двигателе (4; 8; 12 В); напряжение на ведущем двигателе $U_1 = 12$ В.

Для интегрирования системы (2.5), (2.6) и построения графиков можно использовать математический пакет MathCAD.

Контрольные вопросы

1 Опишите вывод уравнений неголономной механики Воронца и Чаплыгина, определяющих движение мобильного робота.

2 Опишите движение мобильного робота по горизонтальной плоскости с помощью уравнений в форме Воронца – Чаплыгина.

3 Практическое занятие № 3. Применение псевдоскоростей для описания динамики колесных роботов; уравнения Маджи

Цель работы: изучить применение псевдоскоростей и уравнения Маджи для описания динамики мобильных колесных роботов.

3.1 Псевдоскорости и уравнение Маджи

Пусть обобщенные скорости системы выражены через $r = s - l$ независимых псевдоскоростей, являющихся числом степеней свободы системы

$$\underset{l\times 1}{\dot{\mathbf{q}}} = \underset{l\times r}{\mathbf{H}}\,\underset{r\times 1}{\dot{\pi}}, \tag{3.1}$$

где **H** – прямоугольная ($S \times r$)-матрица, зависящая от обобщенных координат.

Хотя во многих задачах выбор матрицы H в (3.1) осуществляется из механических соображений, построение замены (3.1) может быть проведено и чисто формальным способом. Для этого необходимо дополнить уравнения связи r линейно независимыми уравнениями вида

$$\sum_{k=1}^{s} c_{ik}\dot{q}_k = \dot{\pi}_i \quad (i = 1,\ldots,r). \tag{3.2}$$

Коэффициенты $c_{ik} = c_{ik}(q_1, \ldots, q_S)$ в (3.2) выбираются гладкими функциями обобщенных координат q_k и образуют прямоугольную матрицу **C** размером $r \times S$. При этом уравнения (3.2) в матричной форме имеют вид

$$\underset{r\times S}{\mathbf{C}}\,\underset{S\times 1}{\dot{\mathbf{q}}} = \underset{r\times 1}{\dot{\pi}}\,. \tag{3.3}$$

Введем квадратную матрицу $\tilde{\mathbf{B}}$, составленную из коэффициентов c_{ik}, b_{ik}:

$$\underset{s\times s}{\tilde{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{r1} & c_{r2} & \ldots & c_{rs} \\ b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{l1} & b_{l2} & \ldots & b_{ls} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{r\times s}{\mathbf{C}} \\ \underset{l\times s}{\mathbf{B}} \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты c_{ik} в (3.2) выбираются так, чтобы определитель матрицы $\tilde{\mathbf{B}}$ был отличен от нуля, при этом символы $\dot{\pi}_1, \ldots, \dot{\pi}_r$, представляющие собой линейные формы обобщенных скоростей $\dot{q}_k$, называются **псевдоскоростями**. Величины $\dot{\pi}_1, \ldots, \dot{\pi}_r$ имеют вполне определенный физический смысл, а сами символы

$$\pi_k = \int_0^t \dot{\pi}_k dt,$$

называемые псевдокоординатами, не имеют физического смысла, т. к. левые части в равенствах (3.2) могут и не быть полными производными по времени от каких-либо функций обобщенных координат.

Уравнения (3.2) можно записать в виде одного матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{r1} & c_{r2} & \dots & c_{rs} \\ b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{l1} & b_{l2} & \dots & b_{ls} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dots \\ \dot{q}_r \\ \dot{q}_{r+1} \\ \dots \\ \dot{q}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\pi}_1 \\ \dots \\ \dot{\pi}_r \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Согласно выбору в равенствах (3.2) коэффициентов $c_{ik} = c_{ik}(q_1, \dots, q_s)$ уравнения (3.4) всегда можно разрешить относительно обобщенных скоростей

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dots \\ \dot{q}_r \\ \dot{q}_{r+1} \\ \dots \\ \dot{q}_s \end{pmatrix} = \tilde{\mathrm{H}} \begin{pmatrix} \dot{\pi}_1 \\ \dots \\ \dot{\pi}_r \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{B}}^{-1}. \tag{3.5}$$

Обозначим через $\mathbf{H}$ прямоугольную матрицу, составленную из r первых столбцов матрицы $\tilde{\mathbf{H}}$. Тогда уравнение (3.5) может быть записано в форме (3.1), которое в скалярной форме имеет вид

$$\dot{q}_i = \sum_{k=1}^{r} h_{ik} \dot{\pi}_k \quad (i = 1, \dots, s), \tag{3.6}$$

где h_{ik} – элементы матрицы $\mathbf{H}$.

Формулы (3.6) позволяют выразить все обобщенные скорости через r независимых псевдоскоростей. При этом подстановка в (3.1) приводит к тождеству

$$\mathrm{BH} = 0. \tag{3.7}$$

Следовательно, $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$, и умножение уравнений (1.2) слева на транспонированную матрицу $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ позволяет исключить неопределенные множители из уравнений движения и получить матричную форму уравнений Маджи

$$\mathrm{H}^{\mathrm{T}} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathrm{q}}} \right)^{\mathrm{T}} - \left(\frac{\partial T}{\partial \mathrm{q}} \right) - \mathrm{Q} \right) = 0. \tag{3.8}$$

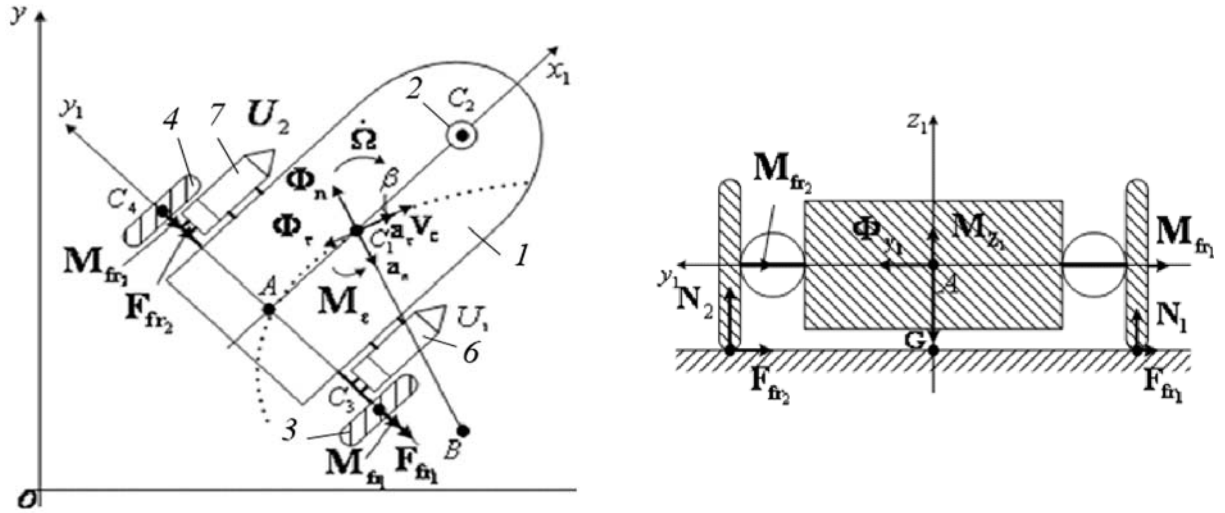
Подстановка (3.1) в (3.8) приводит к r скалярным уравнениям для $\ddot{\pi}, \dot{\pi}, \mathrm{q}$ (сами псевдокоординаты π в уравнения (3.8) не входят, а обобщенные скорости исключаются благодаря подстановке (3.1)). Совместно с s кинематическими уравнениями (3.1) уравнения (3.8) образуют замкнутую систему $s + r$ уравнений для определения обобщенных координат q и псевдоскоростей $\dot{\pi}$.

3.2 Расчет уравнений движения мобильного робота с двумя независимыми ведущими колесами

Рассмотрим движение мобильного робота с двумя независимо моторизованными ведущими колесами по горизонтальной шероховатой плоскости.

Составим уравнения движения робота, учитывающие влияние моментов трения качения, приложенных к ведущим колесам, при условии изменения сил нормальной реакции опорной плоскости, обусловленного отработкой криволинейных траекторий. Вывод уравнений движения робота удобно осуществлять на базе формы уравнений Маджи для электромеханических систем с неголономными связями.

Для составления уравнений движения рассматриваемой системы введем следующие системы координат (рисунок 3.1): неподвижную система $Oxyz$, плоскость которой Oxy совпадает с горизонтальной шероховатой плоскостью, по которой катятся колеса робота, и подвижную система $Ax_1y_1z_1$ с началом в точке A, жестко связанную с его платформой.



1 – платформа; *2* – абсолютно гладкая опора; *3*, *4* – ведущие колеса; *5* – блок расчета управляющих напряжений (не представлен); *6*, *7* – электроприводы; *8* – оптронная линейка

Рисунок 3.1 – Расчетная схема мобильного робота для вывода уравнений движения и определения сил нормальной реакции шероховатой плоскости, действующих на колеса

При этом примем, что центр масс робота C_1 лежит на оси Ax_1, являющейся осью симметрии шасси. Также примем следующие допущения: робот представляет собой систему абсолютно твердых тел; движение осуществляется без проскальзывания; массы опоры *2* и шестерней редукторов считаются равными нулю; в точке C_2 платформа имеет абсолютно гладкую опору; робот движется опорой вперед.

С учетом принятых допущений робот рассматривается как система трех абсолютно твердых тел, одним из которых является платформа совместно с электродвигателями с редукторами (электроприводами), двумя другими – ведущие колеса. Положение этих тел в системе координат $Oxyz$ определяется вектором обобщенных координат

$$\mathbf{q}_1 = |x\ y\ \psi\ \varphi_1\ \varphi_2|^{\mathrm{T}},$$

где x, y – координаты точки A (полюса робота) – середины отрезка, соединяющего центры C_3, C_4 ведущих колес;

ψ – угол поворота вокруг вертикали платформы, отсчитываемый от оси Ox;

φ_1, φ_2 – углы поворота ведущих колес (с центрами в точках C_3 и C_4 соответственно) относительно горизонтальных осей.

Так как рассматриваемый робот является электромеханической системой, содержащей два контура с токами, вектор его обобщенных координат $\mathbf{q}_1 = |x\ y\ \psi\ \varphi_1\ \varphi_2\ e_1\ e_2|^{\mathrm{T}}$ включает также заряды e_1, e_2, такие, что $i_1 = \dot{e}_1$, $i_2 = \dot{e}_2$ представляют собой токи в цепях питания электродвигателей.

Вектор обобщенных скоростей рассматриваемой системы имеет вид $\dot{\mathbf{q}} = \left|\dot{x}\ \dot{y}\ \dot{\psi}\ \dot{\varphi}_1\ \dot{\varphi}_2\ \dot{e}_1\ \dot{e}_2\right|^{\mathrm{T}}$ (точка обозначает дифференцирование по времени). Обобщенные скорости удовлетворяют трем уравнениям неголономных связей:

$$\begin{cases} -\dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi = 0; \\ \dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi + l\dot{\psi} - r\dot{\varphi}_1 = 0; \\ \dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi - l\dot{\psi} - r\dot{\varphi}_2 = 0, \end{cases} \tag{3.9}$$

где l – половина расстояния между ведущими колесами, $l = AC_3 = AC_4$;

r – радиус ведущих колес.

Поэтому рассматриваемый мобильный робот имеет четыре степени свободы, и вектор его псевдоскоростей $\dot{\pi} = \left|V\ \ \Omega\ \ i_1\ \ i_2\right|^{\mathrm{T}}$ включает четыре элемента: скорость $V = \dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi$ точки A, угловую скорость платформы $\Omega = \dot{\psi}$ и токи $i_1 = \dot{e}_1$, $i_2 = \dot{e}_2$ во внешних цепях электродвигателей.

Кинематические уравнения движения робота, описывающие зависимость между обобщенными и псевдоскоростями системы, в матричной форме

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\psi & 0 & 0 & 0 \\ r\sin\psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 1 & l & 0 & 0 \\ 1 & -l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r \end{pmatrix}\dot{\pi}. \tag{3.10}$$

Динамические уравнения движения робота имеют вид

$$\begin{cases} m\dot{V} = \dfrac{nc}{r}(i_1 + i_2) + \dfrac{1}{r}(M_{fr_1} + M_{fr_2}) + m_1 a\Omega^2; \\ J\dot{\Omega} = \dfrac{ncl}{r}(i_1 - i_2) + \dfrac{l}{r}(M_{fr_1} - M_{fr_2}) - m_1 aV\Omega; \\ L\dfrac{di_1}{dt} + Ri_1 + \dfrac{nc}{r}(V + l\Omega) = U_1; \\ L\dfrac{di_2}{dt} + Ri_2 + \dfrac{nc}{r}(V - l\Omega) = U_2, \end{cases} \tag{3.11}$$

где $m = m_1 + 2m_k + 2\dfrac{J_y}{r^2}$;

$J = J_1 + (m_1 + 2m_k)a^2 + 2\dfrac{J_y}{r^2}l^2$;

m_1 – суммарная масса платформы и статоров электродвигателей;

m_k – суммарная масса ведущего колеса и ротора электродвигателя;

J_1 – момент инерции робота относительно вертикальной оси, проходящей через его центр масс C_1;

J_y – «приведенный» момент инерции колеса, $J_y = J_{ky} + n^2 J_{ry}$;

J_{ky} – момент инерции колеса относительно горизонтальной оси;

J_{ry} – момент инерции ротора электродвигателя;

n – передаточное число редуктора;

a – расстояние от точки A до центра масс робота C_1, $a = AC_1$;

c – коэффициент электромеханического взаимодействия;

M_{fr1}, M_{fr2} – моменты трения качения;

L – обобщенная индуктивность цепи электродвигателя;

R – омическое сопротивление цепи ротора;

U_1, U_2 – управляющие напряжения, приложенные к электродвигателям.

Совместно с уравнениями (3.10) уравнения (3.11) образуют замкнутую систему уравнений для определения обобщенных координат робота **q** и его псевдоскоростей $\dot{\pi}$.

Значения M_{frK} (K = 1, 2) из (3.11) определяются следующим образом:

$$M_{frK} = \begin{cases} -\delta N_K \operatorname{sign}(\dot{\varphi}_K),\ \dot{\varphi}_K \neq 0; \\ -nci_K, \dot{\varphi}_K = 0, |nci_K| \leq \delta N_K; \\ -\delta N_K \operatorname{sign}(i_K), \dot{\varphi}_K = 0, |nci_K| > \delta N_K, \end{cases} \tag{3.12}$$

где δ – коэффициент трения качения;

N_K – сила нормальной реакции горизонтальной опорной плоскости, действующей на K-е ведущее колесо.

Для определения значений N_1 и N_2 был применен принцип Даламбера. Указанный принцип позволил разработать расчетные схемы, представленные на рисунке 3.1, где $\boldsymbol{\Phi_n}$ – центробежная сила инерции, определяемая нормальным ускорением $\boldsymbol{a_n}$; $\boldsymbol{\Phi_\tau}$ – сила инерции, определяемая тангенциальным ускорением $\boldsymbol{a_\tau}$;

$\boldsymbol{M_\varepsilon}$ – момент инерции, определяемый ускорением $\dot{\Omega}$; $\boldsymbol{M_{Z1}}$ – равнодействующий моментов $\boldsymbol{M_\varepsilon}$, моментов, определяемых силами $\boldsymbol{\Phi_n}$ и $\boldsymbol{\Phi_\tau}$, и момента, определяемого силами $\boldsymbol{M_{fr1}}/r$ и $\boldsymbol{M_{fr2}}/r$; $\boldsymbol{G}$ – вес робота; $\boldsymbol{V_C}$ – скорость центра масс робота.

Равнодействующая параллельных оси Ay_1 составляющих сил $\boldsymbol{\Phi_n}$ и $\boldsymbol{\Phi_\tau}$ – $\boldsymbol{\Phi_{y1}}$ совместно с равнодействующей сил трения скольжения (при покое) $\boldsymbol{F_{fr1}}$ и $\boldsymbol{F_{fr2}}$ образует пару сил, влияние которой определяет изменение сил нормальной шероховатой плоскости N_1 и N_2 при движении робота вдоль криволинейных траекторий. С учетом указанного изменения значения N_1 и N_2 при отсутствии поперечного проскальзывания ведущих колес определяются следующим образом:

$$N_1 = \frac{m_1 + 2m_k}{2}\left(\frac{ga_1}{a + a_1} + \frac{r\left(\left(V^2 + (\Omega a)^2\right)\cos\beta\,\mathrm{sign}(\Omega) + \dot{\Omega} a\rho\right)}{l\rho}\right);$$

$$N_2 = \frac{m_1 + 2m_k}{2}\left(\frac{ga_1}{a + a_1} + \frac{r\left(\left(V^2 + (\Omega a)^2\right)\cos\beta\,\mathrm{sign}(\Omega) + \dot{\Omega} a\rho\right)}{l\rho}\right), \qquad (3.13)$$

где g – ускорение свободного падения;

a_1 – расстояние от центра масс робота C_1 до точки крепления опоры C_2, $a_1 = C_1C_2$;

ρ – радиус кривизны траектории движения центра масс робота, $\rho = BC_1$.

Радиус кривизны траектории движения центра масс робота C_1 определяется следующим образом:

$$\rho = \frac{a}{|\sin\beta|}. \qquad (3.14)$$

Значение угла β определяется из соотношения

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, \ V = 0; \\ \mathrm{arctg}\left(\dfrac{\Omega a}{V}\right), \ V \neq 0. \end{cases} \qquad (3.15)$$

Движение робота без поперечного проскальзывания ведущих колес предполагает выполнение условия, выражающегося следующим неравенством:

$$(m_1 + 2m_k)\left|\frac{\left(V^2 + (\Omega a)^2\right)\cos\beta\,\mathrm{sign}(\Omega)}{\rho} + \dot{\Omega} a\right| < (N_1 + N_2) f, \qquad (3.16)$$

где f – коэффициент трения скольжения.

Контрольные вопросы

1 Опишите применение псевдоскоростей и уравнения Маджи для описания динамики мобильных колесных роботов.

2 Опишите расчетную схему и уравнения движения мобильного робота с двумя независимыми ведущими колесами.

3 Как определяются силы нормальной реакции шероховатой плоскости, действующие на колеса мобильных роботов?

4 Практическое занятие № 4. Уравнения Эйлера – Лагранжа в псевдоскоростях и их использование в задачах динамики мобильных роботов

Цель работы: изучить применение уравнений Эйлера – Лагранжа в псевдоскоростях и в задачах динамики мобильных колесных роботов.

4.1 Уравнения Эйлера – Лагранжа в псевдоскоростях

Если подставить в формулу $T = T(\mathbf{q},\ \dot{\mathbf{q}})$ для кинетической энергии системы выражение (3.1) для вектора обобщенных скоростей, то возникает функция

$$\Theta = \Theta(\mathbf{q}, \dot{\pi}) = T(\mathbf{q}, \mathbf{H}\dot{\pi}) . \tag{4.1}$$

При дифференцировании последнего соотношения по вектору обобщенных координат $\mathbf{q}$ имеет место тождество

$$\frac{\partial \Theta}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{\partial (\mathbf{H}\dot{\pi})}{\partial \mathbf{q}}. \tag{4.2}$$

В уравнении (4.2) используется понятие производной от вектора по вектору: если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{q}$ соответственно l- и s-мерные векторы, то выражение $\dfrac{\partial x}{\partial q}$ означает $(l \times s)$-матрицу вида

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial q_1} & \dots & \dfrac{\partial x_1}{\partial q_s} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial q_1} & \dots & \dfrac{\partial x_1}{\partial q_s} \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяется векторное выражение для частной производной:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{\pi}} = \frac{\partial T}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\mathbf{H}. \tag{4.3}$$

Транспонируя и дифференцируя по времени (4.3), находим

$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\right)^{\mathrm{T}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{\pi}}\right)^{\mathrm{T}} - \frac{d\mathbf{H}^{\mathrm{T}}}{dt}\mathbf{p}, \tag{4.4}$$

где $\mathbf{p}$ – вектор обобщенных импульсов, $\mathbf{p} = \left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}\right)^{\mathrm{T}}$.

Заменяя в уравнении (3.8) частные производные от кинетической энергии согласно формулам (4.2) и (4.4), имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{\pi}}\right)^{\mathrm{T}} - \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mathbf{q}}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} + \left(\frac{d\mathbf{H}^{\mathrm{T}}}{dt} - \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\left(\mathbf{H}\dot{\pi}\right)}{\partial\mathbf{q}}\right)^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{p}. \tag{4.5}$$

Уравнения (4.5) можно назвать матричной формой уравнений Эйлера – Лагранжа.

Замечание. Производную $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\mathbf{q}}\right)^{\mathrm{T}}$ можно рассматривать как производную от энергии Θ по вектору псевдокоординат π и формально записывать левую часть уравнения (4.5) в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{\pi}}\right)^{\mathrm{T}} - \left(\frac{\partial\Theta}{\partial\pi}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{4.6}$$

4.2 Пример решения задачи

Колесный трактор состоит из тележки с двумя зубчатыми ведущими колесами радиусом r. К переднему рояльному колесу приложен момент M_3 ($M'_3 = -M_3$). На ведущие колеса от электродвигателя через дифференциал (передаточное число i = 1) передаются моменты $M_1 = M/2$, $M_2 = M/2$, где M – момент на выходном валу двигателя (рисунок 4.1). Составить уравнения движения трактора, если масса корпуса m; радиус инерции $\rho_{Cz} = \rho$; точ-

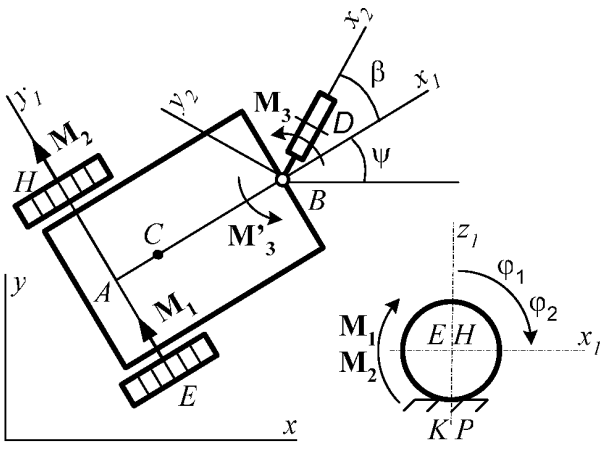


Рисунок 4.1 – Модель колесного трактора

ка C – центр масс корпуса; $CB = b$; $BD = h$; $AE = AH = l$. Рояльное колесо катится без скольжения, зубчатые колеса не скользят вдоль оси Ax_1 и свободно скользят вдоль оси Ay_1. Массой всех колес пренебречь.

Решение

Положение системы определяется пятимерным вектором $\mathbf{q} = (x, y, \psi, \beta, \varphi)^{\mathrm{T}}$, где x, y – координаты центра масс корпуса. На систему наложены две неголономные связи $V_{Kx1} = 0$; $V_{Dy2} = 0$, уравнения которых можно получить, если составить выражения для скоростей точек K и D по графам $C \to A \to E \to K$ и $C \to B \to D$ соответственно:

$$\mathbf{V}_K = \mathbf{V}_C - \hat{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{CA} - \hat{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{AE} + \hat{\mathbf{E}}\mathbf{K}\boldsymbol{\Omega}_1; \tag{4.7}$$

$$\mathbf{V}_D = \mathbf{V}_C - \hat{\boldsymbol{\Omega}}\mathbf{CB} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{D}\boldsymbol{\Omega}_2. \tag{4.8}$$

Проецируя выражение (4.7) на оси $Ax_1y_1z_1$, а выражение (4.8) – на $Bx_2y_2z_2$, получаем

$$V_{Kx1} = V_{Cx1} + \dot{\psi}l - \dot{\varphi}_1 r;$$

$$V_{Dy2} = V_{Cy2} + \dot{\psi}b\cos\beta + \left(\dot{\psi} + \dot{\beta}h\right). \tag{4.9}$$

Учитывая, что $V_{Cx1} = \dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi$; $V_{Cy2} = -\dot{x}\sin(\psi + \beta) + \dot{y}\cos(\psi + \beta)$ и приравнивая выражения для V_{Kx1} и V_{Dy2} к нулю, получим

$$\dot{x}\cos\psi + \dot{y}\sin\psi + \dot{\psi}l - \dot{\varphi}_1 r = 0;$$

$$-\dot{x}\sin\left(\psi + \beta\right) + \dot{y}\cos\left(\psi + \beta\right) + \dot{\psi}b\cos\beta + \left(\dot{\psi} + \dot{\beta}\right)h = 0. \tag{4.10}$$

Матрица $\mathbf{B}$, отвечающая уравнениям (4.10) и вектору $\mathbf{q}$, имеет вид

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & l & 0 & -r \\ -\sin\left(\psi + \beta\right) & \cos\left(\psi + \beta\right) & b\cos\beta + h & h & 0 \end{pmatrix}.$$

Выражение для кинетической энергии $T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ будет иметь вид

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \rho^2\dot{\psi}^2\right).$$

Найдем вектор обобщенных сил $\mathbf{Q} = (Q_x\ Q_y\ Q_\psi\ Q_\beta\ Q_\varphi)^{\mathrm{T}}$. Для этого запишем сумму мощностей всех активных сил на возможных скоростях:

$$\dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_1 - 2\dot{\psi}\frac{l}{r};$$

$$M_1\dot{\varphi}_1^{\hat{a}} + M_2\left(\dot{\varphi}_1^{\hat{a}} - 2\dot{\psi}^{\hat{a}}\frac{l}{r}\right) + M_3\left(\dot{\psi}^{\hat{a}} + \dot{\beta}^{\hat{a}}\right) = Q_x\dot{x}^{\hat{a}} + Q_y\dot{y}^{\hat{a}} + Q_\psi\dot{\psi}^{\hat{a}} + Q_\beta\dot{\beta}^{\hat{a}} + Q_\varphi\dot{\varphi}_1^{\hat{a}}.$$

Принимая во внимание, что $M_1 = M_2 = M/2$, получим

$$Q_x = 0; \quad Q_y = 0; \quad Q_\psi = M\frac{l}{r}; \quad Q_\beta = M_3; \quad Q_\varphi = M\ .$$

Выполним все процедуры оператора (1.1), учитывая, что $\boldsymbol{\lambda} = |\ \lambda_1\ \ \lambda_2\ |^{\mathrm{T}}$:

$$\begin{pmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{x} \\ m\rho^2\ddot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M\dfrac{l}{r} \\ M_3 \\ M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin(\psi+\beta) \\ \sin\psi & \cos(\psi+\beta) \\ l & b\cos\beta + h \\ 0 & h \\ -r & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix};$$

$$m\ddot{x} = \lambda_1\cos\beta - \lambda_2\sin(\psi+\beta);$$

$$m\ddot{x} = \lambda_1\sin\beta + \lambda_2\cos(\psi+\beta);$$

$$m\rho^2\ddot{\psi} = M\frac{\ell}{r} + \lambda_1\ell + \lambda_2(b\cos\beta + h);$$

$$0 = M_3 + \lambda_2 h;$$

$$0 = M - \lambda_1 r.$$

После исключения неопределенных множителей λ_1, λ_2 получим

$$m\ddot{x} = M\cos\psi\frac{1}{r} + M_3\sin(\psi+\beta)\frac{1}{h};$$

$$m\ddot{y} = M\sin\psi\frac{1}{r} + M_3\cos(\psi+\beta)\frac{1}{h};$$

$$m\rho^2\ddot{\psi} = -M_3\left(\frac{b\cos\beta}{h} + 1\right). \tag{4.11}$$

Уравнения (4.10) и (4.11) представляют замкнутую систему, определяющую движение тележки с зубчатыми колесами.

Контрольные вопросы

1 Опишите применение псевдоскоростей и уравнения Эйлера – Лагранжа для описания динамики мобильных колесных роботов.

2 Опишите расчетную схему и уравнения движения колесного трактора с двумя зубчатыми ведущими колесами и передним рояльным колесом.

3 Опишите уравнения замкнутой системы, определяющей движение тележки с зубчатыми колесами.

5 Практическое занятие № 5. Уравнения Аппеля для неголономных механических систем с применением к динамике мобильных колесных роботов

Цель работы: изучить процесс получения уравнений Аппеля для неголономных механических систем в задачах динамики мобильных колесных роботов.

5.1 Уравнения Аппеля для неголономных механических систем

Обычно уравнения Аппеля для неголономных систем записываются в виде

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}}\right)^T = \mathbf{\Pi}, \tag{5.1}$$

где функция

$$S = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} n_\nu w_\nu^2$$

называется энергией ускорений или функцией Аппеля, а П – r-мерный вектор обобщенных сил, который можно определить по одной из следующих формул:

$$\mathbf{\Pi} = \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathbf{w}_\nu}{\partial \ddot{\pi}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{F}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial \dot{\pi}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{F}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n}\mathbf{E}_\nu^T\mathbf{F}_\nu = \mathbf{H}^T\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial \mathbf{q}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{F}_\nu = \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q};$$

$$\mathbf{Q} = \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial \mathbf{q}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{F}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathbf{v}_\nu}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{F}_\nu,$$

где $\mathbf{F}_\nu$ – сила, приложенная к точке m_ν, положение которой определяется вектором $\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_\nu(\mathbf{q}_\nu)$;

$\mathbf{v}_\nu$, $\mathbf{w}_\nu$ – скорость и ускорение точки m_ν, $\mathbf{v}_\nu = \dot{\mathbf{r}}_\nu$, $\mathbf{w}_\nu = \dot{\mathbf{v}}_\nu$;

$\mathbf{E}_\nu$ – прямоугольная $(3 \times r)$-матрица, $\mathbf{E}_\nu = \left(\dfrac{\partial \mathbf{r}_\nu}{\partial \mathbf{q}}\right)\mathbf{H}$;

$\mathbf{Q}$ – вектор обобщенных сил.

Полученные выше формы записи уравнений неголономной механики представляются удобными для использования в системах аналитических вычислений типа MathCAD и др. Выбор конкретного формализма при практическом построении с помощью систем компьютерной алгебры математической модели исследуемого мобильного робота диктуется необходимостью сокращения промежуточных выкладок и уменьшения громоздкости окончательных уравнений.

5.2 Постановка задачи

Мобильный робот, имеющий два ведущих и одно ведомое (пассивное) колесо, движется по ограниченной ровной горизонтальной площадке. Над площадкой подвешено 10–15 маяков, имеющих излучатели и включающихся последовательно или одновременно в зависимости от вида выполняемого задания. Робот должен иметь на борту все необходимые датчики и систему управления движением. Выполняемые роботом задания состоят в следующем.

1 «*Маяки-ворота*». В момент старта включен один маяк. Задача робота – двигаться так, чтобы войти в контакт с маяком. Выключается и включается либо один маяк, либо включаются одновременно два маяка. В последнем случае задача робота – пройти между маяками в образуемые ими ворота.

2 «*Восьмерка*». Маяки, образующие ворота, не выключаются после их прохождения, и тогда робот движется по «восьмерке», объезжая вокруг маяков.

3 «*Змейка*». В момент старта и в процессе заезда постоянно включено несколько маяков, образующих последовательность из ворот. Роботу необходимо двигаться так, чтобы пройти «змейку», не задев маяки.

4 «*Куча*». В момент старта включено больше двух маяков; робот должен двигаться, чтобы войти в контакт с каким-либо из них, после чего маяк выключается. Требуется погасить все маяки. Выбор последовательности объезда маяков произвольный.

Критерием оценки всех заданий является затраченное время.

Выполнение перечисленных заданий требует решения широкого круга задач, являющихся базовыми для мобильных роботов [5–7]:

– получение с помощью сенсорной системы информации о внешней среде, и преобразование ее в форму, удобную для использования в цепях управления;

– планирование движения робота в динамически меняющейся среде;

– управление роботом, реализующее сформированный план.

Решение данных задач связано с управлением движением мобильного автономного колесного робота, оснащенного системой технического зрения (СТЗ).

5.3 Кинематическая модель мобильного робота

Поскольку робот движется в горизонтальной плоскости, то достаточно рассмотреть плоский случай. На рисунке 5.1 изображена соответствующая система координат. Оси вращения колеса совпадают с отрезком *LR* пути. Свяжем с роботом систему координат *OX'Y'*, расположив *O'* посередине *LR* и направив ось *X'* перпендикулярно *LR* в направлении движения. Тогда положение основания робота как твердого тела задается тройкой чисел φ, *x*, *y*, где φ – угол между осями *X* и *X'*; *x*, *y* – координаты точки *O'* в абсолютной системе координат *OXY*.

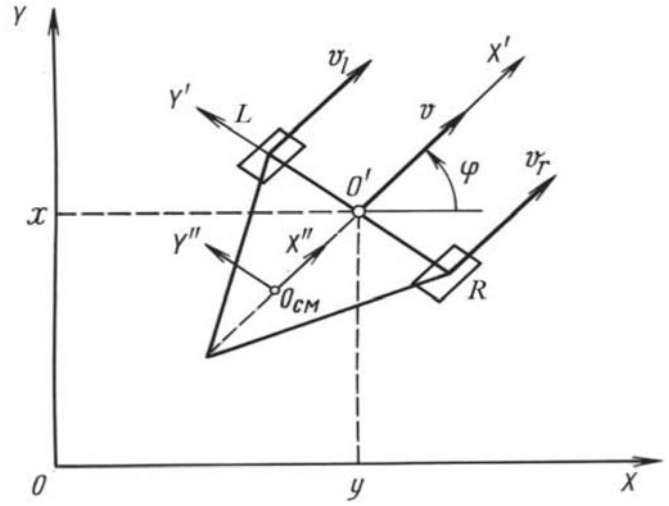


Рисунок 5.1 – Схема движения робота в горизонтальной плоскости

Введем однородную матрицу 3×3 перехода от *OX'Y'* к *OXY*:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

где $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$;

$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

В выражении (5.2) **R** и **p** представляют собой соответственно матрицу ориентации и вектор положения начала системы координат *O'* в абсолютной системе координат.

Если обозначить векторы линейных скоростей точек *O'*, *L* и *R* как **v**, $\mathbf{v}_l$, $\mathbf{v}_r$ соответственно, а через ω – угловую скорость, то можно записать следующие соотношения:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + \omega\Omega r_l; \\ \mathbf{v}_r = \mathbf{v} + \omega\Omega r_r, \end{cases} \tag{5.3}$$

где матрица Ω имеет вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что Ω является ортогональной матрицей, обеспечивающей поворот произвольного вектора на $\pi/2$.

Запишем теперь следующие очевидные соотношения:

$$r_l = \frac{1}{2}y'; \quad r_r = -\frac{1}{2}y';$$

$$\mathbf{v}_l = \upsilon_l x'; \quad \mathbf{v}_r = \upsilon_r x', \tag{5.4}$$

где x' и y' – единичные орты системы координат $OX'Y'$;

$\mathbf{v}_l$, $\mathbf{v}_r$ – проекции соответствующих векторов на ось X'.

Вектор линейной скорости точки O' в силу соотношений (5.4) совпадает с осью X'. Воспользуемся этим при формировании закона управления. Тогда, учитывая соотношения (5.4), а также имея в виду указанное свойство матрицы Ω, после элементарных преобразований соотношений (5.3) получим

$$\begin{cases} \upsilon = \dfrac{1}{2}\left(\upsilon_r + \upsilon_l\right); \\ \omega = \dfrac{1}{l}\left(\upsilon_r - \upsilon_l\right). \end{cases} \tag{5.5}$$

Если теперь ввести в рассмотрение координаты x, y, φ, нетрудно видеть, что

$$\begin{cases} \dot{x} = \upsilon\cos\varphi; \\ \dot{y} = \upsilon\sin\varphi; \\ \dot{\varphi} = \omega. \end{cases} \tag{5.6}$$

Подставив выражения (5.5) в соотношения (5.6), получим

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{1}{2}\left(\upsilon_r + \upsilon_l\right)\cos\varphi; \\ \dot{y} = \dfrac{1}{2}\left(\upsilon_r + \upsilon_l\right)\sin\varphi; \\ \dot{\varphi} = \dfrac{1}{l}\left(\upsilon_r - \upsilon_l\right). \end{cases} \tag{5.7}$$

Соотношения (5.7) представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений 3-го порядка относительно фазового вектора с компонен-

тами (x, y, φ). Скаляры υ_l и υ_r, заданные тем или иным образом (как функции времени или как функции фазовых координат), определяют движение платформы. Таким образом, соотношения (5.7) можно рассматривать как кинематическую модель мобильного трехколесного робота. Линейная и угловая скорости робота определяются из соотношений (5.5).

5.4 Динамическая модель автономного мобильного колесного робота на основе уравнений Аппеля

Анализ связей, наложенных на робота. Мобильный робот перемещается по плоскому рельефу, имея два ведущих колеса радиуса ρ. Колеса вращаются без проскальзывания, и оси их вращения совпадают с линией LR. Учет последнего условия обеспечивается выполнением соотношения $\dot{x}\sin\varphi - \dot{y}\cos\varphi = 0$, полученного из выражения (5.6).

Это соотношение устанавливает ограничения на координаты и скорости и представляет собой одно из уравнений связи, геометрическая интерпретация которого состоит в том, что вектор скорости $\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y})^{\mathrm{T}}$ перпендикулярен орту y'. Таким образом, налагаемая связь является неголономной.

Рассмотрим условия непроскальзывания. Представим робот как систему трех твердых тел, включающую в себя платформу и два ведущих колеса. Положение этой системы задается набором следующих параметров: x, y, φ – положение платформы, q_r, q_l – углы поворота правого и левого колес соответственно.

Условия непроскальзывания получим, воспользовавшись соотношением (5.7), а также тем обстоятельством, что

$$\upsilon_r = \rho \cdot \dot{q}_r; \qquad \upsilon_l = \rho \cdot \dot{q}_l.$$

Тогда уравнения связей имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\rho}{2}\left(\dot{q}_r + \dot{q}_l\right)\cos\varphi; \\ \dot{y} = \dfrac{\rho}{2}\left(\dot{q}_r + \dot{q}_l\right)\sin\varphi; \\ \dot{\varphi} = \dfrac{\rho}{l}\left(\dot{q}_r - \dot{q}_l\right), \end{cases}$$

из которых последнее интегрируется как

$$\varphi = \frac{\rho}{l}\left(q_r - q_l\right) + C,$$

где C – некоторая постоянная.

Окончательно уравнения связи имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\rho}{2}\left(\dot{q}_r + \dot{q}_l\right)\cos\varphi; \\ \dot{y} = \dfrac{\rho}{2}\left(\dot{q}_r + \dot{q}_l\right)\sin\varphi; \\ \varphi = \dfrac{\rho}{l}\left(q_r - q_l\right) + C. \end{cases} \tag{5.8}$$

Таким образом, рассмотренная система имеет 5 – 1 = 4 обобщенные координаты, например (x, y, q_l, q_r), и 5 – 3 = 2 степени свободы.

Уравнения движения. Для вывода уравнений движения воспользуемся уравнением Аппеля в виде

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \ \dots \ , \ n - r,$$

где n – число обобщенных координат;

r – число неголономных уравнений связей;

S – энергия ускорения;

q_i – обобщенные координаты;

Q_i – обобщенные силы.

Пусть M – произвольная точка массы m_v, а $\mathbf{r}_v$ и $\boldsymbol{\rho}_v$ – однородные векторы, характеризующие ее положение в абсолютной и связанной системах координат (рисунок 5.2). Тогда имеет место соотношение

$$\mathbf{r}_\nu = T\boldsymbol{\rho}_\nu, \tag{5.9}$$

где T – матрица 3 × 3, задающая положение и ориентацию системы координат $O'X'Y'$ относительно OXY, используя соотношение (5.2).

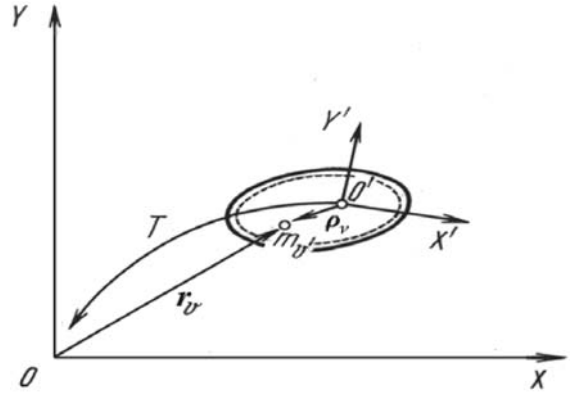


Рисунок 5.2 – Системы координат твердого тела в горизонтальной плоскости

Энергия ускорения S твердого тела выражается следующим образом:

$$S = \frac{1}{2}\sum m_\nu \ddot{\mathbf{r}}_\nu^{\mathrm{T}} \ddot{\mathbf{r}}_\nu \ . \tag{5.10}$$

Продифференцировав дважды уравнение (5.9), запишем:

$$\ddot{\mathbf{r}}_\nu = \ddot{T}\boldsymbol{\rho}_\nu,$$

и подставляя в выражение (5.10), после несложных преобразований получим

$$S = \frac{1}{2} tr\left(\ddot{T}\mathbf{H}\ddot{T}^{\mathrm{T}}\right)_v . \qquad (5.11)$$

Матрица инерции

$$\mathbf{H} = \sum m_v \boldsymbol{\rho}_v \boldsymbol{\rho}_v^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & S_x \\ I_{yx} & I_{yy} & S_y \\ S_x & S_y & m \end{pmatrix},$$

где I_{uv} – моменты 2-го порядка, $I_{uv} = \Sigma m_v u_v v_v$ ($u, v \in \{x, y\}$);

S_u – моменты 1-го порядка ($u \in \{x, y\}$), $S_u = \Sigma m_v u_v$.

Связь между моментами I_{uv} и моментами 2-го порядка вокруг осей i_u имеет вид:

$$I_{xx} = \frac{1}{2}\left(-i_x + i_y + i_z\right);$$

$$I_{yy} = \frac{1}{2}\left(i_x - i_y + i_z\right);$$

$$I_{zz} = \frac{1}{2}\left(i_x + i_y - i_z\right).$$

Сделаем следующие допущения о конструктивных особенностях робота:

– моменты инерции колес значительно меньше соответствующих моментов платформы;

– центр массы платформы лежит на оси X' в точке O_{CM} с координатами ($-b$, 0) (см. рисунок 5.1).

Матрица инерции платформы, с учетом ее симметрии относительно продольной оси в системе координат $O_{CM}X''Y''$, связанной с центром масс, имеет вид

$$\mathbf{H}'' = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix},$$

где m – масса платформы.

Пусть $\mathbf{H}'$ – матрица инерции платформы в связанной системе координат $OX'Y'Z'$; $\mathbf{A}$ – матрица перехода от $OX'Y'Z'$ к $O_{CM}X''Y''Z''$. Тогда, используя известное соотношение, связывающее значения матрицы инерции в различных системах координат

$$\mathbf{H'} = \mathbf{AH''A^T},$$

а также то, что матрица перехода **A** имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получим

$$\mathbf{H}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} i_z & 0 & -mb \\ 0 & \frac{1}{2} i_z & 0 \\ -mb & 0 & m \end{pmatrix}. \qquad (5.12)$$

Учитывая соотношения (5.11) и (5.12), после преобразований получим выражение для энергии ускорения:

$$S = \frac{1}{2}\left[\left(\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2\right) i_z + m\left(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2\right)\right] + bm\left[\ddot{x}\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right) + \ddot{y}\left(\dot{\varphi}^2\sin\varphi - \ddot{\varphi}\cos\varphi\right)\right].$$

Выберем из обобщенных координат x, y, q_l, q_r две координаты q_l, q_r, а для нахождения скоростей и ускорений $\dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}$ воспользуемся уравнениями связи (5.8). После соответствующих преобразований получим

$$S = \frac{1}{2}\left[\left(\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2\right) i_z + \frac{m\rho^2}{4}\left(\ddot{q}_r + \ddot{q}_l\right)^2\right] + \frac{\rho}{2}\dot{\varphi}\left(\ddot{q}_r + \ddot{q}_l\right) - \frac{\rho}{2}\dot{\varphi}\ddot{\varphi}\left(\dot{q}_r + \dot{q}_l\right).$$

В соответствии с уравнением Аппеля имеем

$$\frac{\partial S}{\partial q_r} = Q_r; \quad \frac{\partial S}{\partial q_l} = Q_l.$$

В предположении, что обобщенными силами Q_r, Q_l являются моменты τ_r и τ_l, развиваемые моторами, приводящими в движение колеса, после преобразования получим

$$\begin{cases} m\dot{\upsilon} = -bm\omega^2 + \frac{1}{\rho}\left(\tau_l + \tau_r\right); \\ i_z\dot{\omega} = bm\omega\upsilon + \frac{l}{2\rho}\left(\tau_r - \tau_l\right); \end{cases}$$

Эти соотношения представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно фазового вектора с компонентами $(V, \omega)^{\mathrm{T}}$, а τ_r и τ_l – компоненты вектора управления, порождающие движение системы.

Для моделирования удобной формой представления является следующая:

$$\begin{cases} \dot{x} = \upsilon \cos\varphi; \\ \dot{y} = \upsilon \cos\varphi; \\ \dot{\varphi} = \omega; \\ \dot{V} = -b\omega^2 + \dfrac{1}{\rho m}\left(\tau_l + \tau_r\right); \\ \dot{\omega} = \dfrac{bm\omega V}{i_z} + \dfrac{l}{2\rho i_z}\left(\tau_r - \tau_l\right). \end{cases} \tag{5.13}$$

Контрольные вопросы

1 Приведите уравнения Аппеля для неголономных механических систем.

2 Опишите кинематическую модель мобильного робота.

3 Опишите динамическую модель автономного мобильного колесного робота на основе уравнений Аппеля.

6 Практическое занятие № 6. Описание электроприводов постоянного тока

Цель работы: анализ динамики привода постоянного тока автономного мобильного робота на базе векторно-матричной модели в пространстве состояний.

6.1 Векторно-матричная модель электропривода на базе двигателя постоянного тока

Для исследования электроприводов мобильных роботов (МР) с питанием от аккумуляторной батареи используется математический аппарат на базе векторно-матричных моделей в пространстве состояний во временной области. Он имеет следующие достоинства: удобство обозначений, компактность записи в векторно-матричной форме, простота проведения анализа, наглядность. Поведение привода рассматривается как поведение точки в евклидовом пространстве.

В процессе работы МР осуществляется регулирование скорости, частые пуски, торможения, реверсы. В случае перемещения грузов разного веса изменяются параметры механической части привода МР, что приводит к изменению

приведенного момента инерции привода и статического момента на валу. Привод МР связан с колесами через редуктор. Торможение механизма может осуществляться либо электроприводом, либо дополнительными тормозами.

Диагностика приводов МР выполняется путем наблюдения отклонения (невязки) между фактическими измеренными параметрами состояния приводов МР и их идеальными значениями, полученными с помощью модели.

Для разработки векторно-матричной модели привода МР на базе двигателя постоянного тока в пространстве состояний с учетом вязкого трения составляются дифференциальные уравнения, которыми описываются электромагнитные и электромеханические процессы в ДПТ с независимым возбуждением или с постоянными магнитами:

$$u_Я = R_Я\left(T_Я \frac{di_Я}{dt} + i_Я\right) + e_Я; \tag{6.1}$$

$$J\frac{d\omega}{dt} = M - M_н; \tag{6.2}$$

$$e_Я = k_E\omega; \tag{6.3}$$

$$M = k_M i_Я; \tag{6.4}$$

$$T_Я = \frac{L_Я}{R}, \tag{6.5}$$

где $u_Я, i_Я, e_Я$ – напряжение, ток и противоЭДС якоря ДПТ;

$L_Я$, $R_Я$, $T_Я$ – индуктивность, сопротивление и электромагнитная постоянная времени якоря ДПТ;

ω, M, M_H, J – угловая частота, электромагнитный момент, момент нагрузки на валу ДПТ, момент инерции ротора ДПТ и нагрузки.

Коэффициенты k_E, k_M являются конструктивными постоянными двигателя.

Уравнение (6.1) отражает взаимосвязь между переменными в цепи якоря. Уравнение (6.2) отражает условия механического равновесия.

Если отсутствуют справочные данные, то номинальный момент двигателя M_H, Н·м, конструктивные постоянные и индуктивность якоря рассчитываются из уравнений при номинальных значениях параметров:

$$M_H = \frac{P_H}{\omega} = \frac{30P_H}{\pi n_H}; \tag{6.6}$$

$$k_M = \frac{M_H}{I_Я}; \tag{6.7}$$

$$k_E = \frac{30(U_Я - R_Я I_Я)}{\pi n_H}; \tag{6.8}$$

$$L_Я \approx \frac{30 U_Я c_x}{\pi n_H I_Я}, \tag{6.9}$$

где c_x – эмпирический коэффициент, c_x = 0,3…0,4;

n – частота вращения, об/мин;

ω – угловая частота, рад/с.

Поскольку регулятор привода МР должен обеспечивать регулирование по моменту и скорости вращения, то в качестве обобщенных координат выбраны ток якоря $I_Я$ и частота вращения якоря ω. Управлением являются напряжение на якоре $U_Я$ и момент сопротивления нагрузки M_H. Параметрами модели являются активное сопротивление и индуктивность цепи и якоря $R_Я$ и $L_Я$, а также приведенный момент инерции J и конструктивные постоянные k_E и k_M. Разрешив исходную систему относительно первых производных, получено уравнение ДПТ в пространстве состояний.

Классическая модель ДПТ с постоянными параметрами не соответствует реальности во всем рабочем диапазоне ДПТ. Поэтому была добавлена нелинейность, связанная с вязким и сухим трением.

Для вращательного типа движения контактирующих поверхностей приводов момент трения выражен следующим образом:

$$M_{тр} = k_{в.тр}\omega - k_{с.тр}\mathrm{sign}\omega. \tag{6.10}$$

Для модели привода МР на базе ДПТ получены следующие дифференциальные уравнения первого порядка:

$$L_Я \frac{dI_Я}{dt} = -R_Я I_Я - k_E\omega + U_Я; \tag{6.11}$$

$$J\frac{d\omega}{dt} = k_M I_Я - k_{в.тр}\omega - M_H; \tag{6.12}$$

На базе уравнений (6.11) и (6.12) строится векторно-матричная модель в пространстве состояний. В уравнении (6.12) учтено вязкое и сухое трение в виде ($-k_{в.тр}\,\omega - M_H$). Поскольку дифференциальные уравнения (6.11) и (6.12) нелинейны, то процедура проектирования модели для пространства состояний не может применяться непосредственно. Если определить входной сигнал нагрузки $M_H = k_{в.тр}\,\mathrm{sign}\,\omega$, то можно получить линейную модель, которая в пространстве состояний будет выглядеть следующим образом:

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}\dot{I}\\ \dot{\omega}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{R}{L} & \frac{k_e}{L}\\ \frac{k_M}{J} & \frac{k_{в.тр}}{J}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I\\ \omega\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{L} & 0\\ 0 & -\frac{1}{J}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U\\ M_H\end{bmatrix}; \qquad (6.13)$$

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}I\\ \omega\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}. \qquad (6.14)$$

6.2 Расчет невязки по электрическому току для привода

Для диагностики привода использовано уравнение для вычисления невязки $r(t)$ по электрическому току для привода МР и идеальной модели привода МР:

$$r(t)=I_{Я1}-I_{Я2}\ . \qquad (6.15)$$

При отсутствии дефектов и помех величина невязки равна нулю.

Динамическая модель привода МР представлена в пространстве состояний в классической векторно-матричной форме. В качестве вектора управления задается вектор-столбец, содержащий напряжение питания привода $U_Я$ и момент сопротивления M_H. Входное воздействие задается в виде ступенчатой функции изменения напряжения и момента сопротивления от 0 до номинального значения.

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}I\\ \omega\end{bmatrix};\ \mathbf{y}=\begin{bmatrix}I\\ \omega\end{bmatrix};\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix};\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix};$$

$$a_{11}=-R_Я/L_я;\quad a_{12}=-k_e/L_я;$$

$$a_{21}=k_M/J;\quad a_{22}=-k_{в.тр}/J;$$

$$b_{11}=1/L_я;\quad b_{12}=0;\quad b_{12}=0;\quad b_{22}=-1/J;$$

$$c_{11}=1;\quad c_{12}=0;\quad c_{21}=0;\quad c_{22}=1.$$

6.3 Пример решения задачи

В качестве примера электропривода рассмотрим двигатель постоянного тока ДПТ П-11У4 с параметрами:

– номинальная мощность – 0,3 кВт;

– номинальное напряжение – 220 В;

– номинальный момент – 1,91 Н·м;

– номинальный ток двигателя – 2 А;

– сопротивление обмотки якоря двигателя при 15 °С – 14,6 Ом;

– номинальная частота вращения – 1500 об/мин;

– индуктивность двигателя – 0,248 Гн;

– момент инерции якоря двигателя – 0,0031 кг·м^2;

– коэффициент вязкого трения – 0,001 Н·м·с;

– коэффициент k_M = 0,95 Н·м/А;

– коэффициент k_E = 1,21 В·с/рад.

Для решения задачи анализа динамической модели привода МР в пространстве состояний в векторно-матричной форме выбран интерактивный пакет для численных вычислений MATLAB/Simulink, являющийся международным стандартом для моделирования технических систем в инженерной практике не только в высшей школе, но и в промышленности. MATLAB/Simulink содержит специальные блоки для моделирования технических систем в пространстве состояний в векторно-матричной форме. Основными особенностями Simulink являются следующие:

– принцип вложенности структур, что актуально при моделировании сложных динамических систем;

– наличие полной общетехнической библиотеки;

– обширный набор алгоритмов численного интегрирования;

– открытость, дающая пользователю возможность расширить состав личной библиотеки за счет создания новых типов блоков.

На рисунке 6.1 показана модель в пространстве состояний в векторно-матричной форме в среде динамического моделирования MATLAB/Simulink, где моделируется изменение параметров привода относительно эталонного привода. Если скорость привода уменьшается (увеличивается), то регулятор за счет отрицательной обратной связи увеличивает (уменьшает) ее, что приводит к стремящейся к нулю невязке по угловой скорости.

Если скорость привода уменьшается, то регулятор увеличивает ее с использованием отрицательной обратной связи по скорости. Поэтому невязка по угловой скорости в модели привода стремится к нулю. В данном примере изменены параметры модели привода – сопротивление и индуктивность обмотки якоря двигателя по сравнению с эталонной моделью. Моделирование выполнено при одинаковой нагрузке – моменте сопротивления. Тогда для заданной целевой функции привода – поддержание заданной скорости – необходимо изменять входное напряжение на модели привода относительно эталона, что приведет к изменению электрического тока, что является идентификационным параметром

для диагностики привода. Применение данного идентификационного параметра на практике потребует измерения момента нагрузки на реальном приводе с последующей имитацией работы эталонного привода и сравнением электрического тока реального и эталонного приводов.

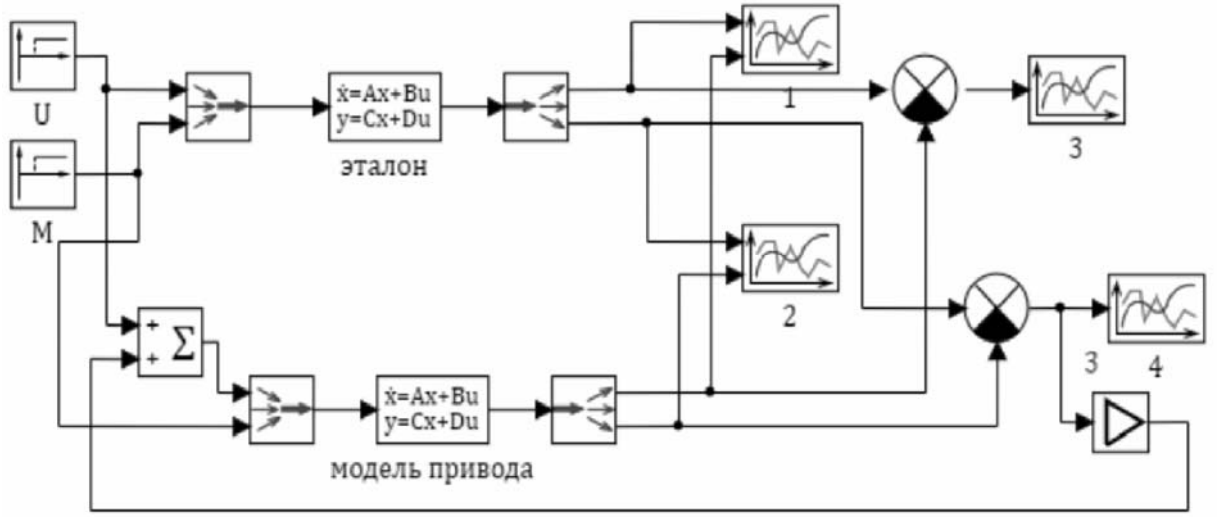


Рисунок 6.1 – Схема вычисления невязки по электрическому току и угловой скорости эталона и модели привода МР в пространстве состояний

При увеличении сопротивления на 10 % от эталонного значения вследствие нагрева привода невязка электрического тока эталона и модели привода МР на базе двигателя постоянного тока увеличивается на 0,32 А.

Контрольные вопросы

1 Опишите векторно-матричную модель электропривода на базе двигателя постоянного тока.

2 Опишите порядок расчета невязки по электрическому току для электропривода постоянного тока.

3 Опишите схему вычисления невязки по электрическому току и угловой скорости эталона и модели привода мобильных роботов в пространстве состояний.

7 Практическое занятие № 7. Стационарные движения колесных роботов

Цель работы: решение задачи управления движением мобильного робота при наличии стационарных (статических) препятствий.

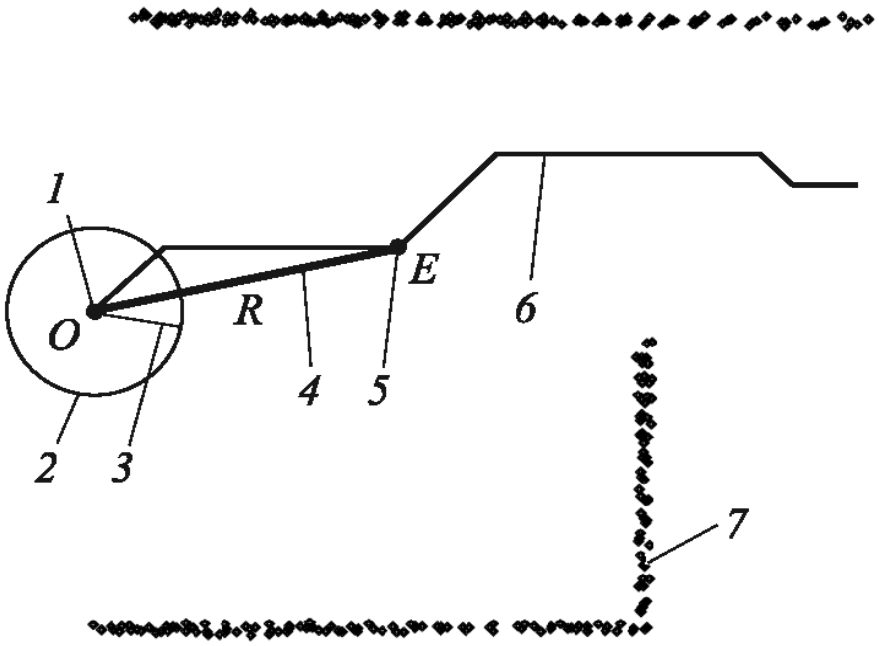
7.1 Постановка задачи

Автономные мобильные роботы для выполнения своих функций должны уметь перемещаться по определенным траекториям в автоматическом режиме.

В современных роботах для этой цели используется навигационная система, которая определяет собственные координаты робота, планирует траекторию в текущий момент времени и управляет его движением.

Задача формулируется следующим образом. Имеется кусочно-линейная траектория от начальной точки до целевой. Она может корректироваться в реальном времени с использованием алгоритма A* (A-звезда). Система навигации мобильного робота отслеживает его положение и вычисляет координаты текущей опорной точки, к которой должен двигаться робот, избегая столкновений со статическими препятствиями. В основе решения задачи в условиях статической среды лежит метод эффективного пути. Эффективный путь – это отрезок прямой, соединяющий текущее положение робота с текущей опорной точкой.

В качестве опорной точки использован второй излом кусочно-линейной траектории (рисунок 7.1), поскольку одного изменения направления траектории с дискретным шагом в 45° относительно положения робота недостаточно для того, чтобы достоверно определить тенденцию дальнейшего изменения траектории. Вторая смена направления показывает устойчивость изменения заданной траектории движения. В противном случае робот продолжает движение в выбранном направлении.



1 – положение робота; *2* – мобильный робот; *3* – текущий курс робота; *4* – эффективный путь; *5* – опорная точка; *6* – заданная траектория; *7* – препятствия

Рисунок 7.1 – Определение опорной точки

Расстояние R между опорной точкой на траектории и текущим положением робота определяется его динамикой. Сверху значение R ограничено максимальной скоростью перемещения $\nu_c = \dot{\nu}_a \Delta t$, которая может быть достигнута роботом через интервал времени Δt:

$$R_{\max}\left(v_c\right)=\left(v_c+\dot{v}_a\Delta t\right)T_{\max},$$

где $\dot{v}_a$ – максимально допустимое ускорение робота;

v_c – текущая скорость перемещения робота;

$T_{\max}$ – время, за которое робот достигнет ближайшее препятствие, находящееся на расстоянии s_l, с максимальной скоростью $v_{\max}$, $T_{\max}=\dfrac{S_l}{v_{\max}}$.

Если изменение направления траектории обнаружено в непосредственной близости от робота, то это изменение является незначительным для робота. Поэтому расстояние между опорной точкой на траектории и текущим положением робота ограничено снизу постоянной $R_{\min}$, которая отфильтровывает незначительные изменения направления траектории. Такие изменения замедляют движение робота, но почти не меняют его положение. Наиболее эффективно установить значение $R_{\min}$ в соответствии с максимальным временем торможения $T_{b\max}=\dfrac{v_{\max}}{\dot{v}_b}$ для того, чтобы робот мог остановиться на расстоянии, равном длине минимального эффективного пути, если изначально он достиг максимальной скорости:

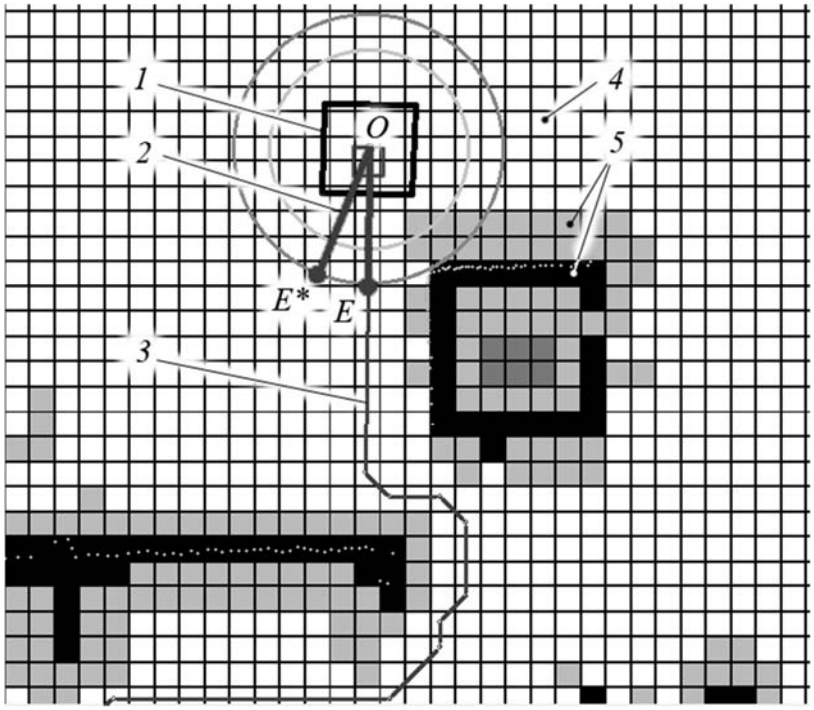
$$R_{\min}=v_{\max}T_{b_{\max}}-\frac{1}{2}\dot{v}_bT_{b_{\max}}^2 .$$

Отсюда следует, что минимальная скорость движения $v_{\min}=\dfrac{R_{\min}}{T_{\max}}$.

7.2 Пример расчета скорректированного положения опорной точки

Метод эффективного пути дает координаты опорной точки на траектории, к которой должен стремиться робот, двигаясь по заданному маршруту. При этом траектория становится более гладкой, и робот может столкнуться с препятствием. Столкновение возможно и в том случае, если некорректно заданы габариты робота в алгоритме поиска пути. Чтобы избежать подобных ситуаций, используют модифицированный метод эффективного пути. Суть модификации заключается в том, чтобы искусственно сместить опорную точку из «запрещенной» зоны, если она туда попадает.

Пусть имеется карта помещения (рисунок 7.2). На ней показаны траектория движения робота *3* и опорная точка *E*, координаты которой вычислены по методу эффективного пути. В окрестности мобильного робота находятся препятствия, обозначенные на карте занятыми ячейками *5*. Граница робота задается окружностью, радиус *W* которой определяется габаритами робота, зоной безопасности и размером ячейки карты заполнения.



1 – мобильный робот; *2* – эффективный путь; *3* – заданная траектория; *4* – свободные клетки; *5* – занятые клетки

Рисунок 7.2 – Результат определения опорной точки

Сначала задается область, в которой необходимо учитывать препятствия, например $N_c \times N_c$ ячеек. Затем каждая ячейка внутри этой области проверяется на наличие препятствия. Если препятствие обнаружено, координаты опорной точки пересчитываются с учетом следующих условий:

– в новой опорной точке робот не должен сталкиваться с препятствием;

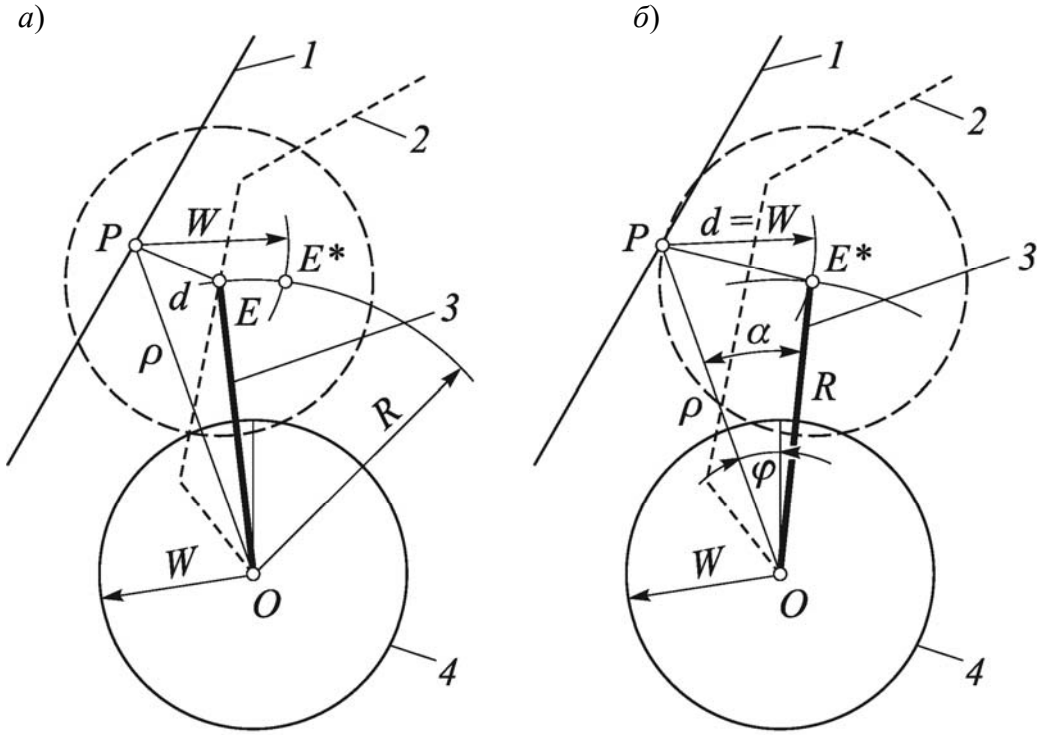
– длина эффективного пути должна сохраняться.

Рассмотрим треугольник *OEP* (рисунок 7.3, *а*). Здесь точка *O* – центр робота; *E* – опорная точка; *P* – центр ячейки с препятствием; *OP* – эффективный путь длиной *R*. Сначала проверяем возможность столкновения робота с препятствием в опорной точке. Для этого рассчитываем расстояние *d* между опорной точкой *E* и точкой *P*:

$$d = |EP| = |OE - OP|.$$

Если $d \geq W$, препятствие находится далеко от робота и оно игнорируется. В противном случае выбирается новое положение опорной точки. Рассмотрим граничный случай, когда окружность, описывающая робот, касается препятствия, т. е. $d = W$. Из рисунка 7.3, *а* очевидно, что новая опорная точка E^* должна находиться на пересечении окружностей (*P*, *W*) и (*O*, *R*). Координаты новой точки находим, зная угол φ, под которым направлен вектор ***OP*** (рисунок 7.3, *б*), и определив угол $\alpha = POE^*$ из теоремы косинусов:

$$W^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cdot \cos\alpha. \qquad (7.1)$$



а – до корректировки; *б* – после корректировки; *1* – препятствие; *2* – заданная траектория; *3* – эффективный путь; *4* – габаритная окружность мобильного робота

Рисунок 7.3 – Расчетная схема алгоритма объезда препятствий

Отметим, что уравнение (7.1) имеет два решения, отличающиеся знаком. Эти решения соответствуют положению опорной точки слева и справа от препятствия. Положительное решение уравнения (7.1) имеет вид

$$\alpha = \arccos\left(\frac{R^2 + \rho^2 + W^2}{2R\rho}\right). \tag{7.2}$$

Координаты новой опорной точки E^* относительно препятствия зависят от расположения старой опорной точки E. Зная векторы $\boldsymbol{OE}$ и $\boldsymbol{OP}$, определим ориентацию эффективного пути и найдем скорректированный вектор $\boldsymbol{OE}^*$:

$$\boldsymbol{OE}^* = \begin{cases} \left(R\cos(\varphi - \alpha),\ R\sin(\varphi - \alpha)\right), & \boldsymbol{OE} \times \boldsymbol{OP} > 0; \\ \left(R\cos(\varphi + \alpha),\ R\sin(\varphi + \alpha)\right), & \boldsymbol{OE} \times \boldsymbol{OP} \le 0. \end{cases} \tag{7.3}$$

По мере движения робота рассчитывается следующая опорная точка и сравнивается с предыдущей. Из всех точек выбирается та, которая наиболее удалена от препятствия. Проверка удаленности проводится отдельно для точек, расположенных слева и справа от препятствия. Отметим, что робот начнет объезжать препятствие непосредственно перед столкновением с ним.

Итак, предлагаемая модификация метода эффективного пути позволяет

определить координаты текущей опорной точки E^* (см. рисунок 7.2) и обеспечить движение робота по заданной траектории без столкновения с неподвижными препятствиями.

Контрольные вопросы

1 Опишите метод эффективного пути для решения задачи управления движением мобильного робота при наличии стационарных (статических) препятствий.

2 Опишите модифицированный метод эффективного пути для расчета скорректированного положения опорной точки.

3 Опишите движение робота и расчетную схему алгоритма объезда препятствий.

8 Практическое занятие № 8. Нестационарные движения колесных роботов

Цель работы: решение задачи управления движением мобильного робота при наличии нестационарных (динамических) препятствий.

8.1 Постановка задачи

При перемещении автономных мобильных роботов реальная среда, в которой они находятся, обычно содержит подвижные препятствия (люди, другие мобильные роботы), поэтому движение в ней по предварительно заданной траектории практически невозможно.

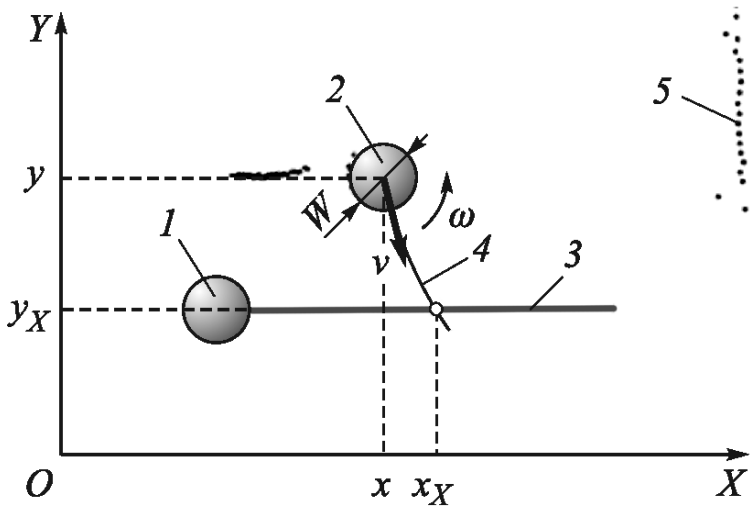
Задача управления движением мобильного робота при наличии подвижных (динамических) препятствий формулируется следующим образом. Имеется кусочно-линейная траектория от начальной точки до целевой. Она может корректироваться в реальном времени с использованием алгоритма A* (A-звезда). Система навигации мобильного робота отслеживает его положение и вычисляет координаты текущей опорной точки, к которой должен двигаться робот, избегая столкновений с динамическими препятствиями. Учет параметров динамических препятствий, с одной стороны, позволяет избежать столкновений с ними, а с другой – оптимизировать траекторию движения.

8.2 Пример решения задачи обхода динамического препятствия

Пусть робот *1* движется по прямой на некотором участке спланированной траектории. При этом робот *2* (динамическое препятствие) движется по пересекающему маршруту, являясь помехой для первого (рисунок 8.1).

Пусть имеются параметры движущегося объекта: его положение в абсолютной системе координат, габаритные размеры, а также скорость. Для решения

поставленной задачи также используется модифицированный метод эффективного пути. Только теперь при наличии подвижных препятствий участок карты заполнения в окрестности робота меняет свое содержимое в зависимости от времени наблюдения и параметров движущихся объектов. В дальнейшем такой участок карты заполнения будет называться динамическим.



1 – мобильный робот; *2* – динамическое препятствие; *3* – заданная траектория движения робота; *4* – траектория движения динамического объекта; *5* – статические препятствия

Рисунок 8.1 – Постановка задачи обхода динамического препятствия

Для обработки динамического участка действия должны осуществляться в приводимой ниже последовательности:

– используя параметры движущегося объекта (препятствия) в текущий момент времени, вычисляем его параметры в последующие моменты времени;

– на динамическом участке карты очищаем клетки, расположенные в зоне текущего положения объекта;

– рассчитываем точку и время пересечения траектории препятствия с траекторией робота;

– добавляем на динамическом участке карты клетки, описывающие препятствие в точке пересечения траекторий.

Выполнив перечисленные действия, можно найти опорную точку модифицированным методом эффективного пути, подставив вместо исходного участка карты заполнения полученный динамический участок.

Сначала рассмотрим получение значений параметров объекта в произвольный момент времени. Рассмотрим модель робота-препятствия (см. рисунок 8.1). Вектор состояния подвижного объекта в текущий момент времени t_0 описывается следующим образом:

$$\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} x & y & \varphi & v & \omega & W \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{8.1}$$

где x, y – положение объекта в абсолютной системе координат;

φ – угол поворота объекта относительно оси X абсолютной системы координат;

v, ω – скорости перемещения и вращения объекта соответственно;

W – радиус описанной вокруг объекта окружности.

Будем считать, что габаритный размер W объекта не меняется во времени, т. е. объект является твердым телом с неизменяемой формой. Кроме того, примем допущение, что скорости v, ω объекта постоянны в окрестности t_0. Тогда значение оставшихся переменных вектора (8.1) в любой момент времени t можно вычислить с помощью уравнений кинематики:

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} \omega dt + \varphi(t_0); \tag{8.2}$$

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} v \cos\varphi(t) dt + x(t_0); \tag{8.3}$$

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} v \sin\varphi(t) dt + y(t_0). \tag{8.4}$$

Выражения (8.2)–(8.4) справедливы только в области, близкой к t_0 ($t \approx t_0$).

Следующий этап – очистка клеток участка карты. С этого момента алгоритм работает не с картой, сохраненной в памяти, а с копией участка в окрестности положения робота (с динамическим участком). На данном этапе всем клеткам, находящимся внутри окружности с центром в точке ($x(t_0)$; $y(t_0)$) и радиусом W присваивается состояние «свободна». Таким образом, если ранее объект был добавлен на карту как статический, то после данной процедуры эта область карты считается свободной.

Для расчета точки пересечения используется итерационный подход. Так как интегрирование уравнений (8.2)–(8.4) проводится численным методом, на каждой итерации имеется отрезок малой длины, описывающий часть траектории движения объекта-препятствия. В качестве текущей траектории робота принимается кусочно-линейный маршрут, данный в условии задачи, с допущением, что отклонение реального движения робота от заданной траектории незначительно. Тогда для определения точки пересечения $X = (x_X; y_X)$ на каждой итерации решается задача пересечения текущего отрезка интегрируемой траектории препятствия с кусочно-линейной траекторией робота, при этом время пересечения t_X определяется номером текущей итерации i: $t_X = t_0 + i \cdot \Delta t$, где Δt – шаг интегрирования.

Последним этапом является добавление клеток на динамический участок карты. Для этого клеткам внутри окружности с центром в точке X и радиусом W присваивается состояние «занята». Теперь для робота реальным препятствием считается не тот объект, который находится в своем текущем положении, а некий мнимый объект, который будет находиться в точке пересечения траекторий к моменту времени t_X. Иными словами, метод эффективного пути с помощью

выражений (8.2) и (8.3) рассчитывает опорную точку, учитывая координаты будущего положения подвижного объекта (препятствия).

8.3 Моделирование движения мобильного робота при наличии статических и динамических препятствий

Для проверки работоспособности метода решения задачи управления движением мобильного робота при наличии препятствий было проведено моделирование. На рисунке 8.2 показаны два робота, которые в ходе моделирования начинают двигаться одновременно. Правый робот движется по заданной траектории (по прямой). Слева находится второй робот – динамический объект, препятствующий движению первого робота. Он движется по криволинейной траектории. Было промоделировано два варианта: первый – с использованием алгоритма объезда статических препятствий, второй – с использованием алгоритма объезда динамических препятствий.

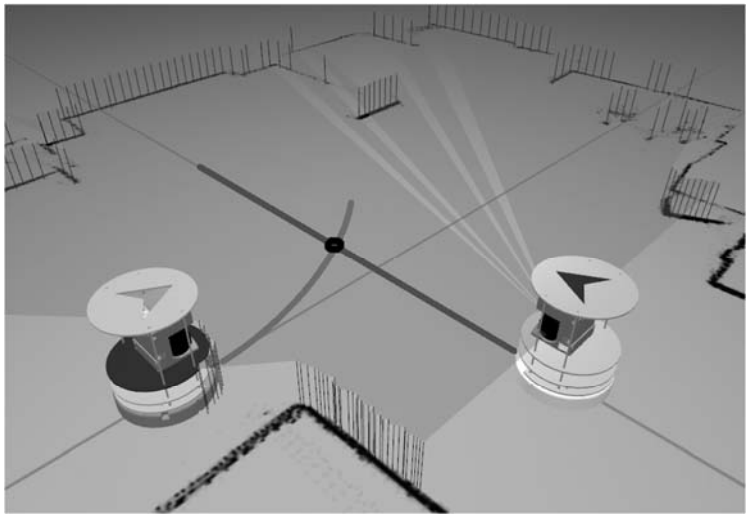
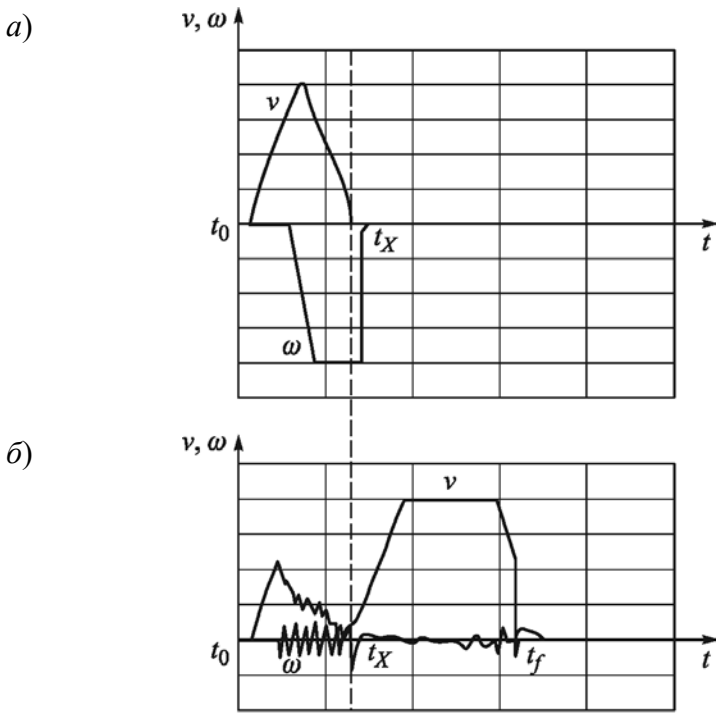


Рисунок 8.2 – Окно программы моделирования процесса управления

Как видно из рисунка 8.3, *а*, в первом случае робот разогнался до максимальной скорости. Затем на пути возникло препятствие, и робот начал поворачивать, пытаясь его объехать. Однако маневр начался слишком поздно и произошло столкновение в точке t_X.

Во втором случае (рисунок 8.3, *б*) робот начал разгоняться, но как только появилось мнимое препятствие в точке пересечения траекторий линейная скорость уменьшилась. При этом появились колебания угловой скорости. Это означает, что опорная точка определялась в каждый момент времени с разных сторон препятствия, замедляя тем самым линейную скорость перемещения. После того как помеха исчезла, робот продолжил движение в направлении к цели с максимальной скоростью и достиг ее в момент t_f.



а – при работе в статической среде; *б* – при наличии динамических препятствий

Рисунок 8.3 – Результаты моделирования

Контрольные вопросы

1 Опишите метод эффективного пути для решения задачи управления движением мобильного робота при наличии нестационарных препятствий.

2 Опишите моделирование движения мобильного робота при наличии статических и динамических препятствий.

Список литературы

1 **Зацепин, М. Ф.** Уравнения Лагранжа, Воронца, Чаплыгина в задачах динамики мобильных роботов / М. Ф. Зацепин, Ю. Г. Мартыненко, Д. В. Тиньков. – Москва: МЭИ, 2005. – 32 с.

2 **Мартыненко, Ю. Г.** Управление движением мобильных колесных роботов / Ю. Г. Мартыненко // Фундаментальная и прикладная математика. – 2005. – Т. 11, № 8. – С. 29–80.

3 **Бартенев, В. В.** Математическая модель движения мобильного робота с двумя независимыми ведущими колесами по горизонтальной плоскости / В. В. Бартенев, С. Ф. Яцун, А. С. Аль-Еззи // Изв. Самар. науч. центра РАН. – 2011. – Т. 13, № 4. – С. 288–293.

4 **Зенкевич, С. Л.** Система управления мобильного колесного робота / С. Л. Зенкевич, А. В. Назарова // Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Приборостроение. – 2006. – № 3. – С. 31–51.

5 **Девянин, Е. А.** О движении колесных роботов / Е. А. Девянин // Мобильные роботы и мехатронные системы: материалы конф. – Москва, 1998. – С. 169–200.

6 **Кобрин, А. И.** Неголономная динамика мобильных роботов и ее моделирование в реальном времени / А. И. Кобрин, Ю. Г., Мартыненко // Мобильные роботы и мехатронные системы: материалы конф. – Москва, 1998. – С. 107–123.

7 **Зенкевич, С. Л.** Моделирование движения робота по сложному маршруту / С. Л. Зенкевич, А. В. Назарова, Д. М. Лисицын // Мобильные роботы и мехатронные системы: материалы конф. – Москва, 2000. – С. 14–27.

8 **Герасимов, В. Н.** Решение задачи управления движением мобильного робота при наличии динамических препятствий / В. Н. Герасимов, Б. Б. Михайлов // Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Приборостроение. – 2012. – С. 83–92.

9 **Булгаков, А. Г.** Промышленные роботы. Кинематика, динамика, контроль и управление / А. Г. Булгаков, В. А. Воробьев. – Москва: СОЛОН-Пр., 2018. – 488 с.

10 Основы робототехники: учебное пособие / Е. Е. Ступина [и др.]. – Новосибирск: Сибпринт, 2019. – 160 с.